MESURE, INTEGRATION, PROBABILITES

Thierry Gallouët Raphaèle Herbin

27 juillet 2021

Le contenu de ce document est, avec quelques compléments, celui du livre publié chez ellipse : Ellipses Edition Marketing, 2013, 978-2-7298-77538.

Ce document est aussi sur HAL : https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01283567v1

Avant-propos

L'objectif de ce livre est de donner une vue d'ensemble de la théorie de la mesure, de l'intégration et des probabilités correspondant à un niveau de troisième année de licence ou de première année de master (en mathématiques).

La lecture de ce livre requiert la connaissance des notions d'analyse réelle, d'algèbre linéaire et de calcul différentiel enseignées en première et deuxième année de licence de mathématiques dans la plupart des universités françaises.

Nous nous sommes attachés à introduire le vocabulaire de la théorie des probabilités en parallèle à celui de l'analyse. Nous espérons ainsi faciliter l'accès conjoint à des études ultérieures dans ces deux branches des mathématiques, ce qui semble devenir indispensable aux mathématiciens se formant en vue d'appliquer ces théories.

Nous attachons une importance considérable aux exercices : plus de 300 sont proposés dans ce livre, certains sont des applications directes du cours, d'autres contiennent des développements importants. Plus de 250 d'entre eux sont assortis d'un corrigé détaillé.

Ce livre, issu d'un polycopié de cours amélioré et complété sur plus de 20 ans, a bénéficié de nombreuses remarques ou questions de nos étudiants et de discussions avec nos collègues (en particulier probabilistes). Nous tenons à les en remercier chaleureusement.

Une liste d'errata sera régulièrement mise à jour sur les sites web des auteurs.

Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin

Table des matières

Chapitre 1

Motivation et objectifs

Nous commençons par donner ici un aperçu des motivations de la théorie de l'intégration, en montrant d'abord les limitations de l'intégrale des fonctions continues (sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$). L'intégrale de Riemann possède essentiellement les mêmes limitations.

1.1 Intégrale des fonctions continues

Nous présentons ici quelques rappels sur l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous montrons pourquoi cette théorie de l'intégrale des fonctions continues semble insuffisante.

Nous nous limitons dans ce paragraphe à l'étude des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, par souci de simplicité des notations. Il va de soi que les notions introduites se généralisent à une intervalle $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$. Nous allons en fait définir l'intégrale des fonctions réglées (on appelle fonction réglée une fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier). Ceci nous donnera l'intégrale des fonctions continues car toute fonction continue est réglée. La définition de l'intégrale des fonctions réglées (comme celle de l'intégrale de Riemann, qui est rappelée dans l'exercice 5.2, et celle de l'intégrale de Lebesgue, qui fait l'objet du chapitre 4) peut être vue en 3 étapes, que nous esquissons ici et qui sont étudiées en détail dans l'exercice 1.2 :

1. *Mesurer les intervalles de* $[0,1]$. Pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, on pose $m(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$.
2. *Intégrer les fonctions en escalier.*

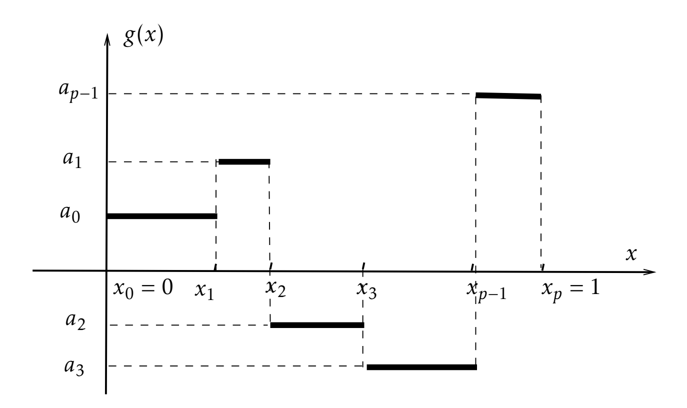


FIGURE 1.1 – Fonction en escalier

Définition 1.1 (Fonction en escalier) *Soit g une fonction de l'intervalle $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; on dit que g est une fonction en escalier si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(x_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $x_0 = 0$, $x_i < x_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$, $x_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que*

$$g(x) = a_i, \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

Avec les notations de cette définition, l'intégrale d'une fonction en escalier est alors

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i m(]x_i, x_{i+1}[). \tag{1.1}$$

On montre que la définition précédente est bien cohérente, au sens où l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i.

3. *Passer à la limite.* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, une fonction réglée, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. On peut montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On pose alors

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n.$$

On montre que cette définition est cohérente car $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ ne dépend que de f et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.2 (Intégrale sur un espace de Banach) Un des intérêts de la méthode présentée ci-dessus est qu'elle permet aussi de définir (sans travail supplémentaire)

l'intégrale de fonctions continues de $[0,1]$ (ou d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$) dans E, où E est un espace de Banach [1] sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (la méthode de construction utilise la structure d'espace de Banach de E, et il peut ne pas y avoir de relation d'ordre sur E). On remplace donc l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ des fonctions qu'on intègre par un espace de Banach E.

Les méthodes de Riemann (voir l'exercice 5.2) et de Lebesgue (présentée dans ce cours) sont limitées à des fonctions prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$ car elles utilisent fortement la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ (elles redonnent, dans le cas de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la même intégrale que ci-dessus). Pour l'intégrale de Lebesgue, il faut alors un travail supplémentaire pour développer une théorie de l'intégration pour des fonctions prenant leurs valeurs dans un espace de Banach (on l'appelle souvent intégrale de Bochner). Plus précisément, ce travail supplémentaire est nécessaire lorsque cet espace est de dimension infinie. Le cas où l'espace est de dimension finie reste simple car on est alors amené à considérer un nombre fini d'intégrales à valeurs dans $\mathbb{R}$, [**droniou**, **gallouet**].

Remarque 1.3 (Remarque de terminologie) Dans tout ce document, on utilisera indifférement le terme "fonction" et le terme "application". Une application (ou une fonction) f de D dans E est la donnée pour tout $x \in$ D de son image par f, notée $f(x)$. (Le domaine de définition de f est donc ici l'ensemble D.) lorsque nous parlons d'une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$ tout entier.

1.2 Insuffisance de l'intégrale des fonctions continues

Dans ce paragraphe, on note E l'ensemble $C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On a défini dans le paragraphe précédent l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ pour tout $f \in$ E (car l'ensemble des fonctions continues est contenu dans l'ensemble des fonctions réglées).

Théorèmes de convergence.

Un inconvénient important de la théorie de l'intégration exposée ci-dessus est que les théorèmes "naturels" de convergence pour cette théorie sont peu efficaces. A vrai dire, le seul théorème simple est un résultat de convergence de l'intégrale sous hypothèse de convergence uniforme d'une suite de fonctions. Rappelons tout d'abord les notions de convergence simple et uniforme des suites de fonctions.

1. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Définition 1.4 (Convergence simple et uniforme) *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E,

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f *lorsque* $n \to +\infty$ *si :*
$$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in [0,1], \exists \mathrm{N}(\varepsilon, x); n \geq \mathrm{N}(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon;$$

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *si :*
$$\forall\varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon); n \geq \mathrm{N}(\varepsilon), x \in [0,1] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour la convergence simple, l'entier N peut dépendre de x, alors que pour la convergence uniforme, il ne dépend que de ε, et pas de x. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ tend simplement et uniformément (sur $[0,1]$) vers 0. On donne à l'exercice 1.1 un exemple de suite qui converge simplement mais pas uniformément.

On rappelle maintenant le théorème classique de convergence de l'intégrale des fonctions continues :

Théorème 1.5 (Convergence de l'intégrale des fonctions continues)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ *et* $f \in \mathrm{E}$. *On a alors :*

$$[f_n \longrightarrow f \text{ uniformément lorsque } n \to +\infty] \Longrightarrow \left[\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ lorsque } n \to +\infty\right].$$

Ce théorème est assez faible, au sens où l'hypothèse de convergence uniforme est une hypothèse forte. Une conséquence de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le théorème suivant (beaucoup plus fort que le précédent, car il ne demande pas d'hypothèse de convergence uniforme) :

Théorème 1.6 (Convergence dominée de l'intégrale des fonctions continues)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$, *et* $f \in \mathrm{E}$. *On suppose que*
$$|f_n(x)| \leq \mathrm{C},\ \forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},$$

où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ *est fixé, et que* f_n *tend simplement vers* f *quand* n *tend vers* $+\infty$. *On a alors :*
$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \text{ quand } n \to +\infty. \tag{1.2}$$

Par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{pour } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n(\frac{2}{n} - x) & \text{pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{pour } x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases} \tag{1.3}$$

(voir figure 1.2) converge simplement mais non uniformément. Elle est dominée par 1, et d'après le théorème 1.6, elle converge. On peut le vérifier directement, car l'intégrale de f_n est facile à calculer et vaut $\frac{1}{n}$. On considère maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 2}$ définie par $g_n(x) = nf_n(x)$. Cette suite converge toujours simplement vers 0, mais non uniformément, et elle n'est plus "dominée". Et de fait, g_n tend simplement vers 0 mais son intégrale vaut 1 et ne tend donc pas vers 0.

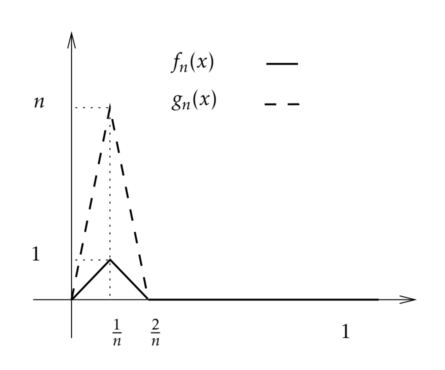


FIGURE 1.2 – Les fonctions f_n et g_n

Le théorème 1.6 est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue, que nous verrons au chapitre 4, il peut être démontré directement, sans utiliser la théorie de l'intégrale de Lebesgue, mais cela est difficile : nous donnons une technique possible à l'exercice 1.10 ; l'idée essentielle est un passage à la limite sur des suites croissantes de fonctions, qui se retrouve également dans la construction de l'intégrale de Lebesgue. Dans l'exercice 1.10, on introduit des suites croissantes de fonctions continues, et on utilise l'intégrale des fonctions continues. En revanche, Lebesgue utilise des suites croissantes de fonctions étagées (voir définition 3.5), ce qui permet également d'utiliser la définition de la mesure et donc de s'affranchir de la notion de topologie (voir définition 2.8) sur l'espace de départ pour construire l'intégrale.

Espaces non complets.

Pour $f \in \mathrm{E}$ on pose (en remarquant que $|f| \in \mathrm{E}$ et $f^2 \in \mathrm{E}$) :

$$\mathrm{N}_1(f) = \int_0^1 |f(x)| dx \text{ et } \mathrm{N}_2(f) = \Big(\int_0^1 (f(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Les applications N_1 et N_2 sont des normes sur E (voir l'exercice 1.6). Malheureusement l'espace E muni de la norme N_1 (ou de la norme N_2) n'est pas vraiment intéressant en pratique, en particulier parce que cet espace n'est pas complet (c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente). Ce n'est pas un espace de Banach. La norme N_2 sur E est induite par un produit scalaire mais, muni

de cette norme, E n'est pas un espace de Hilbert [1], voir l'exercice 1.6. En fait l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est intéressant lorsqu'il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|f\|_u = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, avec laquelle il est complet : c'est donc alors un espace de Banach.

Si l'on travaille avec l'ensemble des fonctions réglées plutôt que l'ensemble des fonctions continues, on n'échappe pas vraiment aux inconvénients cités précédemment (N_1 et N_2 sont d'ailleurs alors des semi–normes). On peut aussi généraliser la définition de l'intégrale ci-dessus en améliorant un peu l'étape 3 (passage à la limite), cette généralisation se fait en introduisant les sommes de Darboux , alors que l'intégrale des fonctions continues peut être définie en utilisant seulement les sommes de Riemann). On obtient ainsi la définition de l'intégrale des fonctions dites Riemann-intégrables (voir l'exercice 5.2). En fait cette généralisation est assez peu intéressante, et les inconvénients sont les mêmes que pour l'intégrale des fonctions continues (ou des fonctions réglées).

L'intégrale de Lebesgue va nous permettre de construire des espaces de Banach avec les normes N_1 et N_2 (et même de Hilbert avec N_2). Dans le cas des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, ceci pourrait être fait par un procédé de complétion de l'espace E muni de la norme N_1 ou N_2 à partir des suites de Cauchy pour N_1 ou N_2 (procédé semblable à celui qui est utilisé pour construire $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$). L'intégrale de Lebesgue va permettre de construire des espaces de Banach en utilisant seulement sur l'espace de départ une structure d'espace mesuré. Cette méthode est en particulier très intéressante pour la théorie des probabilités.

1.3 Les probabilités

La théorie des probabilités s'est développée dans le but de modéliser les phénomènes aléatoires, c'est-à-dire de développer un formalisme mathématique pour exprimer les problèmes posés par ces phénomènes. Le terme aléatoire vient du latin *alea* qui signifie en latin jeu de dé ou jeu de hasard ; il est employé pour désigner tous les phénomènes qui semblent être dus au hasard. Il s'oppose au terme déterministe, qui s'applique aux phénomènes dont on connaît l'issue. Le mot hasard vient lui même du mot arabe al-zhar qui veut dire dés, puis par extension chance. On utilisera également le mot stochastique (du grec stokhastikos, qui vise bien) qui est un synonyme d'aléatoire. En anglais, les termes utilisés en théorie des probabilités sont random (hasard, qui vient du français randonnée !) stochastic et aleatory.

Par exemple, la chute d'un corps est un phénomène déterministe : pour une position et une vitesse initiale données, on sait parfaitement quelle sera la trajectoire et la

1. Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

vitesse du corps soumis à son poids. Le lancer d'un dé est assimilable à la chute d'un corps, et pourtant, le résultat du lancement du dé est généralement perçu comme aléatoire : on ne sait pas avant l'expérience quel est le nombre entre 1 et 6 que l'on va obtenir, parce qu'on ne connaît pas vraiment les conditions initiales du lancement du dé (position, vitesse) et que, même si on les connaissait, on aurait du mal à calculer rapidement le résultat de ce lancement. Ainsi, de nombreux phénomènes physiques qui ont des causes déterministes sont modélisés à l'aide de modèles au moins en partie aléatoires (en météorologie par exemple). Il existe cependant des phénomènes physiques véritablement aléatoires comme l'interférence d'atomes dans un dispositif à deux fentes d'Young, et de manière plus générale, les phénomènes quantiques (voir à ce sujet le livre grand public [**mouchet**]).

Une partie importante des phénomènes aléatoires est de nature discrète, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des "cas possibles" dans $\mathbb{N}$. Lorsque de plus l'ensemble des "cas possibles" ou des "éventualités" est fini, le calcul des probabilités se ramène à des problèmes de dénombrement. Lorsque l'ensemble des "éventualités" est de nature infinie non-dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie de la mesure. Les liens qui existent entre la théorie des probabilités et la théorie de la mesure et de l'intégration sont nombreux, mais malheureusement, le vocabulaire est souvent différent. Nous essaierons ici de montrer clairement les liens entre les deux théories et de donner systématiquement les termes probabilistes et analystes employés pour les mêmes notions.

1.4 Objectifs

Du point de vue de l'intégration, l'objectif est de construire une théorie de l'intégration donnant des théorèmes de convergence efficaces et de bons espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces vectoriels normés complets et des espaces hilbertiens. La démarche pour construire cette théorie est décrite au chapitre 4 ; elle est voisine de celle que l'on a utilisée pour l'intégrale des fonctions réglées (ou pour l'intégrale de Riemann, cf. Exercice 5.2).

La théorie de l'intégration que nous allons ainsi obtenir contient, pour les fonctions d'un intervalle compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la théorie de l'intégrale de Riemann (cf. Exercice 5.2) qui contient elle-même la théorie de l'intégrale des fonctions réglées (et donc la théorie de l'intégrale des fonctions continues).

Du point de vue probabiliste, l'objectif est d'introduire les notions de base et de mettre en évidence les liens entre les outils d'analyse et les outils probabilistes.

1.5 Structure du cours

Ce cours est formé de 11 chapitres (y compris ce chapitre introductif), selon le découpage suivant :

— Le chapitre 2 est une introduction à la théorie de la mesure ; on y définit en particulier l'application λ nécessaire pour mesurer les parties de $\mathbb{R}$. On y introduit aussi les premières notions de probabilités.

— Dans le chapitre 3, on introduit le concept de fonction mesurable, et son synonyme probabiliste, *i.e.* le concept de variable aléatoire, qui est une notion fondamentale pour le calcul des probabilités. On y définit les notions de convergence presque partout et son synonyme probabiliste presque sûre, et de convergence en mesure et son synonyme probabiliste convergence en probabilité.

— On définit au chapitre 4 l'intégrale sur un espace mesuré (suivant les étapes 1 à 3 définies plus haut), et l'espérance des variables aléatoires réelles en théorie des probabilités. On définit également dans ce chapitre la notion de convergence en moyenne.

— On s'intéresse au chapitre 5 aux mesures définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire les parties mesurables au sens de Borel, que l'on aura définie au chapitre 2) et aux propriétés particulières de l'intégrale définies sur $\mathbb{R}$. On y étudie les lois de probabilités de densité.

— On étudie au chapitre 6 les espaces L^p, ensembles des (classes de) fonctions mesurables de puissance p–ième intégrable, et plus particulièrement l'espace L^2, qui est un espace de Hilbert. On donne des résultats de dualité et on introduit les notions de convergence faible et de convergence étroite (pour les probabilités).

— Le chapitre 7 est consacré au produits d'espaces mesurés, à l'intégration de fonctions de plusieurs variables, au produit de convolution.

— Dans le chapitre 8, on revient sur l'étude des espaces L^p dans le cas particulier de la mesure de Lebesgue sur les boréliens d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On donne des résultats de densité, de séparabilité et de compacité.

— Le chapitre 9 est consacré aux vecteurs aléatoires. On y généralise des notions vues pour les variables aléatoires réelles.

— Le chapitre 10 est consacré à l'étude de la transformée de Fourier des fonctions de L^1 (classes de fonctions mesurables intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$) et de L^2 (classes de fonctions mesurables de carré intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$) et des mesures. On introduit la fonction caractéristique de la théorie des probabilités.

— Le chapitre 11 est consacré à l'espérance conditionnelle et aux martingales.

1.6 Exercices

Exercice 1.1 (Convergences simple et uniforme) Construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f_n \to f$ simplement, quand $n \to +\infty$, et $f_n \not\to f$ uniformément, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On prend la fonction définie par* (1.3)*, voir figure 1.2, qu'on rappelle :*

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{pour } x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n(\frac{2}{n} - x) & \text{pour } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{pour } x \in x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$*. Pour tout* $x \in [0,1]$*, on a bien* $f_n(x) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*. Enfin* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne tend pas uniformément vers* 0 *car* $\|f_n\|_u = \max\{|f_n(x)|; x \in [0,1]\} = 1 \not\to 0$*, quand* $n \to +\infty$*.*

Exercice 1.2 (Intégrale d'une fonction continue) Une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$.

Pour g en escalier et $x_0, \ldots, x_n$ comme dans la définition ci-dessus, on pose

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i),$$

où a_i est la valeur prise par g sur $]x_i, x_{i+1}[$.

1. Montrer que la définition précédente est bien cohérente, c'est-à-dire que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i. Montrer que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Soit* $n \geq 1$ *et* $x_0, \ldots, x_n$ *tels que* $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$ *et g constante sur chaque intervalle* $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$*. On note* a_i *est la valeur prise par g sur* $]x_i, x_{i+1}[$*.*
   Soit également $m \geq 1$ *et* $y_0, \ldots, y_m$ *tels que* $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = 1$ *et g constante sur chaque intervalle* $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$*. On note* b_i *est la valeur prise par g sur* $]y_i, y_{i+1}[$*.*
   On doit montrer que

   $$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i).$$

   On considère l'union des points x_i *et des points* y_i*, c'est-à-dire que* $z_0, \ldots, z_p$ *sont tels que* $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{p-1} < z_p = 1$ *et* $\{z_i,\ i \in \{0, \ldots, p\}\} = \{x_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}\} \cup \{y_i,$

$i \in \{0,\dots,m\}\}$ (on a donc, en particulier, $p \geq \max\{m,n\}$). On note c_i est la valeur prise par g sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$, il existe $k_i \in \{0,\dots,p\}$ tel que $x_i = z_{k_i}$ (en particulier, $k_0 = 0$ et $k_n = p$) et on a donc

$$x_{i+1} - x_i = \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} (z_{j+1} - z_j).$$

Comme $a_i = c_j$ si $k_i \leq j \leq k_{i+1} - 1$ (car $]z_j, z_{j+1}[\subset]x_i, x_{i+1}[$), on en déduit

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} c_j(z_{j+1} - z_j) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i).$$

De la même manière, on a

$$\sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i) = \sum_{i=0}^{p-1} c_i(z_{i+1} - z_i),$$

d'où l'on conclut

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(y_{i+1} - y_i).$$

On a bien montré que l'intégrale de g ne dépend que du choix de g et non du choix des x_i.

On montre maintenant que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$ (cet ensemble est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Soit g et h deux fonctions en escalier et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq 1$ et $x_0, \dots, x_n$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ et g constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$. Soit également $m \geq 1$ et $y_0, \dots, y_m$ tels que $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = 1$ et h constante sur chaque intervalle $]y_i, y_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. On considère ici encore l'union des points x_i et des points y_i, c'est-à-dire que $z_0, \dots, z_p$ sont tels que $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{p-1} < z_p = 1$ et $\{z_i,\ i \in \{0,\dots,p\}\} = \{x_i,\ i \in \{0,\dots,n\}\} \cup \{y_i,\ i \in \{0,\dots,m\}\}$. Les fonctions g, h et $\alpha g + \beta h$ sont donc constantes sur chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$ (ceci montre d'ailleurs que $\alpha g + \beta h$ est bien une fonction en escalier et donc que l'ensemble des fonctions en escalier est bien un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). En notant a_i la valeur de g sur $]z_i, z_{i+1}[$ et b_i la valeur de h sur $]z_i, z_{i+1}[$, on obtient :

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(z_{i+1} - z_i),\ \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} b_i(z_{i+1} - z_i).$$

On en déduit que

$$\alpha \int_0^1 g(x)dx + \beta \int_0^1 h(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} (\alpha a_i + \beta b_i)(z_{i+1} - z_i) = \int_0^1 (\alpha g(x) + \beta h(x))dx$$

car $\alpha a_i + \beta b_i$ est la valeur de $\alpha g + \beta h$ sur $]z_i, z_{i+1}[$.

Ceci prouve bien que l'application qui à g associe l'intégrale de g est linéaire de l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

(a) Construire une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour $n \geq 1$, on choisit (par exemple) f_n ainsi : $f_n(x) = f(\frac{i}{n})$, si $x \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$, $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Pour bien définir f_n sur tout $[0,1]$, on prend aussi $f_n(1) = f(1)$.*

La fonction f_n est bien en escalier (elle est constante sur chaque intervalle $]\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$ pour $i \in \{0,\ldots,n-1\}$). Elle converge uniformément vers f, quand $n \to +\infty$, car f est uniformément continue. Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u = \max\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0,1]\} \leq \max\{|f(x) - f(y)|, x,y \in [0,1]; |x-y| \leq \frac{1}{n}\} \to 0$, quand $n \to +\infty$. Noter que, pour ce choix de f_n, on a

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}.$$

Cette somme est une somme de Riemann associée à f et on va voir ci-après qu'elle converge vers $\int_0^1 f(x)dx$ quand $n \to +\infty$.

(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier telle que f soit limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, où I_n est l'intégrale de la fonction en escalier f_n, converge. Enfin, montrer que la limite $\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$ ne dépend que de f, et non de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors

$$\int_0^1 f(x)dx = \mathrm{I}.$$

Corrigé – *Si g est une fonction en escalier, il est clair que la fonction $|g|$ (définie par $|g|(x)) = |g(x)|$) est aussi en escalier et que l'on a*

$$|\int_0^1 g(x)dx| \leq \int_0^1 |g(x)|dx \leq \|g\|_u.$$

On en déduit que

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, |\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_m| = |\int_0^1 (f_n - f_m)dx| \leq \|f_n - f_m\|_u.$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers f) pour la norme $\|\cdot\|_u$, c'est une suite de Cauchy pour cette norme. La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans $\mathbb{R}$.

Soit maintenant une autre suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que f soit aussi limite uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit J_n l'intégrale de la fonction en escalier g_n. On remarque que $|\mathrm{I}_n - \mathrm{J}_n| \leq \|f_n - g_n\|_u$, d'où l'on déduit que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n$ car $\|f_n - g_n\|_u \leq \|f_n - f\|_u + \|g_n - f\|_u \to 0$, quand $n \to +\infty$. La limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne dépend donc que de f, et non du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que l'application qui à f associe l'intégrale de f est linéaire de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et que, pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Corrigé – *Soit $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit deux suites de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergeant uniformément vers f et g. La suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de fonction en escalier convergeant uniformément vers $\alpha f + \beta g$ (qui appartient bien à $C([0,1],\mathbb{R})$). En passant à la limite, quand $n \to +\infty$ dans l'égalité*

$$\int_0^1 (\alpha f_n + \beta g_n)(x)dx = \alpha \int_0^1 f_n(x)dx + \beta \int_0^1 g_n(x)dx$$

(qui est vraie grâce à la linéarité de l'intégrale sur l'ensemble des fonctions en escalier, démontrée à la question 1.), on obtient

$$\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx + \beta \int_0^1 g(x)dx.$$

Enfin, si $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on choisit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. On a déjà vu que

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f_n(x)|dx \leq \|f_n\|_u.$$

On obtient les inégalités désirées en passant à la limite sur n, car $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $|f|$ et $\|f_n\|_u \to \|f\|_u$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 1.3 (Sur l'intégrale des fonctions continues) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $\varphi_n \to \varphi$ simplement quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \to 0$, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Corrigé – *Ceci est une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :*

$$\left|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx\right| \leq \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx.$$

2. Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Corrigé – *Ceci est aussi une conséquence d'une inégalité vue dans l'exercice définissant l'intégrale d'une fonction continue :*

$$\left|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx\right| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_u.$$

3. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers φ simplement, mais non uniformément, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *On prend, pour $n \geq 2$:*
$\varphi_n(x) = nx$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0. Elle ne converge pas uniformément vers 0, car $\|\varphi_n\|_u = 1 \not\to 0$. On a bien $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

4. Donner un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers φ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *On prend, pour $n \geq 2$:*
$\varphi_n(x) = n^2x$, pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\varphi_n(x) = n^2(\frac{2}{n} - x)$, pour $x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $\varphi_n(x) = 0$, pour $x \in]\frac{2}{n}, 1]$.

On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\varphi_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers 0. Pourtant $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 1 \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

5. Montrer que si la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les deux conditions :
   (a) Pour tout ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\varepsilon, 1]$,
   (b) Les φ_n sont à valeurs dans $[-1, +1]$,

   alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Corrigé – *Par la condition (a), la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur $]0,1]$. La condition (b) donne alors $\varphi(x) \in [-1,1]$ pour tout $x \in]0,1]$ (et donc aussi pour tout $x \in [0,1]$ car φ est continue sur $[0,1]$).*

Soit $\varepsilon > 0$. *On utilise maintenant le fait que* $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^\varepsilon f(x)dx + \int_\varepsilon^1 f(x)dx$, *pour tout* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, *pour obtenir :*

$$|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \leq 2\varepsilon + \max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\}.$$

D'après (a), *il existe* n_0 *tel que* $\max_{x\in[\varepsilon,1]}\{|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\} \leq \varepsilon$ *pour* $n \geq n_0$. *On a donc* $|\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))dx| \leq 3\varepsilon$ *pour* $n \geq n_0$, *ce qui prouve que* $\int_0^1 \varphi_n(x) \to \int_0^1 \varphi(x)dx$ *quand* $n \to +\infty$.

6. Vérifier que la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ satisfait les conditions énoncées à la question 5. Donner l'allure générale du graphe de ces fonctions pour des petites valeurs de n ; que devient le graphe lorsque $n \to +\infty$?

Corrigé – *On a bien* $\varphi_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour tout* $x \in [\varepsilon, 1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $0 \leq \varphi_n(x) \leq \frac{\sqrt{n}}{n\varepsilon^2} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *La condition* (a) *de la question 5 est donc vérifiée. La condition* (b) *est également vérifiée en remarquant que* $2x\sqrt{n} \leq 1 + nx^2$ *pour tout* $x \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *(on a donc* $\varphi_n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*). La question 5 donne donc que* $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

La fonction φ_n *est croissante pour* $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$, *elle atteint son maximum en* $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, *ce maximum vaut* $\frac{1}{2}$ *(*φ_n *ne converge donc pas uniformément vers* 0 *quand* $n \to +\infty$*). La fonction* φ_n *est ensuite décroissante pour* $x \in [\frac{1}{\sqrt{n}}, 1]$ *et tend vers* 0 *pour tout* x.

7. On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^2 dx = 0. \tag{1.4}$$

A-t-on $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx = 0$? [On pourra par exemple utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon \geq 0$, ne dépendant que de ε, t. q. $a \leq \varepsilon + c_\varepsilon a^2$.]

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *On remarque que (pour* $a \geq 0$*)* $a \leq \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$ *(en fait, on a même* $2a \leq \varepsilon + \frac{a^2}{\varepsilon}$*). Le plus facile, pour s'en convaincre, est de remarquer que* $a \leq \frac{a^2}{\varepsilon}$ *si* $a \geq \varepsilon$ *(donc* $a \leq \max\{\varepsilon, \frac{a^2}{\varepsilon}\}$*)). On a donc*

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 (\varphi_n(x) - \varphi(x))^2 dx.$$

Par l'hypothèse (1.4), Il existe n_0 *te que le dernier terme de l'inégalité précédente soit inférieur à* ε *si* $n \geq n_0$. *On a donc* $\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \leq 2\varepsilon$ *si* $n \geq n_0$. *On a bien montré que* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx\,dx = 0$.

8. Même question que ci-dessus en remplaçant l'hypothèse (1.4) par :
   $\exists p > 1; \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0.$

   Corrigé – *la démonstration est identique à la précédente en remarquant que* $a \leq \varepsilon + \frac{a^p}{\varepsilon^{p-1}}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $a \geq 0$.

9. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

   et que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0$.

   Corrigé – *On utilise la même inégalité qu'à la question 7 avec* $\varepsilon = \frac{1}{\delta}$, *c'est-à-dire* $a \leq \frac{1}{\delta} + \delta a^2$. *On a donc, pour tout* $x \in [0, 1]$,

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{\delta} + \delta|\varphi_n(x)|^2.$$

   On en déduit, pour $\eta \in]0, 1]$, *en intégrant sur l'intervalle* $[0, \eta]$:

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)| dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta \int_0^\eta |\varphi_n(x)|^2 dx,$$

   et donc, avec (1.5),

$$\int_0^\eta |\varphi_n(x)| dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta C.$$

   De même, on a

$$\int_0^\eta |\varphi(x)| dx \leq \frac{\eta}{\delta} + \delta \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$$

   Soit $\varepsilon > 0$, *on choisit* $\delta > 0$ *pour avoir* $\delta C \leq \varepsilon$ *et* $\delta \int_0^1 \varphi^2(x) dx \leq \varepsilon$, *puis, on choisit* $\eta > 0$ *pour avoir* $\frac{\eta}{\delta} \leq \varepsilon$. *On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_\eta^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx + 4\varepsilon.$$

   Comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* φ *sur* $[\eta, 1]$, *il existe* n_0 *tel que* $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in [\eta, 1]$ *et tout* $n \geq n_0$. *On en déduit* $\int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq 5\varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$. *Ceci prouve que* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx = 0$.

10. Construire un exemple de suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait aux hypothèses de la question précédente et qui n'est pas bornée (donc qui ne satisfait pas aux hypothèses de la question 5).

Corrigé – *On prend, pour $n \geq 2$:*

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}x & si\ x \in [0, \frac{1}{n}], \\ n\sqrt{n}(\frac{2}{n} - x) & si\ x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & si\ x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

On a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([0,1],\mathbb{R})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_n \to 0$ uniformément sur $[\varepsilon, 1]$ quand $n \to +\infty$. Enfin, $\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx \leq 2$ (car $|\varphi_n(x)| \leq \sqrt{n}$ pour $x \in [0, \frac{2}{n}]$).

11. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.5) par :

    Il existe $p > 1$ et $C > 0$ tels que $\int_0^1 |\varphi_n(x)|^p dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

    Corrigé – *Oui, le raisonnement fait pour $p = 2$ s'adapte ici en remarquant que $a \leq \frac{1}{\delta} + \delta^{p-1} a^p$ (pour $\delta > 0$ et $a \geq 0$).*

12. Peut-on remplacer l'hypothèse (1.5) par : il existe $C > 0$ tel que $\int_0^1 |\varphi_n(x)| dx \leq C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$?

    Corrigé – *Non, il suffit de reprendre comme contre–exemple les fonctions φ_n construites à la question 4.*

Exercice 1.4 (Discontinuités d'une fonction croissante) Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f a une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note $f(x_+)$ et $f(x_-)$ ces limites au point x.

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{f(y), y < x\}$ est majoré par $f(x)$ (car f est croissante). Cet ensemble admet donc une borne supérieure (dans $\mathbb{R}$) que l'on note $f(x_-)$ (et on a $f(x_-) \leq f(x)$). Comme $f(x_-)$ est un majorant de l'ensemble $\{f(y), y < x\}$, on a $f(y) \leq f(x_-)$ pour tout $y < x$. Puis, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y < x$ t.q $f(x_-) - \varepsilon < f(y) \leq f(x_-)$ car $f(x_-)$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\{f(y), y < x\}$. On a donc, comme f est croissante*

   $$y \leq z < x \Rightarrow f(x_-) - \varepsilon < f(z) \leq f(x_-).$$

   Ceci prouve que $f(x_-) = \lim_{y\to x_-} f(y)$. (On rappelle que $y \to x_-$ signifie $y \to x$ avec $y < x$.) On a ainsi montré que f admet une limite à gauche en x et cette limite notée $f(x_-)$ vérifie $f(x_-) \leq f(x)$.

   De manière analogue on montre que f admet une limite à droite en x et cette limite notée $f(x_+)$ vérifie $f(x) \leq f(x_+)$. Le nombre réel $f(x_+)$ est la borne inférieure de l'ensemble $\{f(y), y > x\}$ (cet ensemble est minoré par $f(x)$).

2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable. [On pourra considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $A_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \geq (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.]

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$. On remarque donc que le point x est un point de discontinuité de f si et seulement si $f(x_+) - f(x_-) > 0$. On note D l'ensemble des points de discontinuité de f, on a donc*

   $$D = \{x \in \mathbb{R},\ f(x_+) - f(x_-) > 0\}.$$

   Pour montrer que D est au plus dénombrable (c'est-à-dire fini ou dénombrable, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une injection de D dans $\mathbb{N}$), on va utiliser le fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. (Une démonstration de ce résultat est donnée à la fin de la preuve de cette question.)

   On note $D_{[0,1]}$ l'ensemble des points de discontinuité de f inclus dans $[0,1]$ et on va montrer que $D_{[0,1]}$ est au plus dénombrable. Si $f(1_+) = f(0_-)$, la fonction f est constante sur $[0,1]$ et $D_{[0,1]} = \emptyset$. On s'intéresse donc au cas $f(1_+) > f(0_-)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \{x \in [0,1], f(x_+) - f(x_-) \geq (f(1_+) - f(0_-))/n\}$.

   On suppose $A_n \neq \emptyset$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_p \in A_n$ avec $x_i < x_{i+1}$ si $i \in \{1, \ldots, p-1\}$. Comme f est croissante, on a $f((x_i)_+) \leq f((x_{i+1})_-)$ et

   $$f(1_+) - f(0_-) \geq \sum_{i=1}^{p} (f((x_i)_+) - f((x_i)_-) \geq \frac{p(f(1_+) - f(0_-))}{n}.$$

   On a donc $p \leq n$ ce qui prouve que A_n est de cardinal fini.

   On remarque maintenant que $D_{[0,1]} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est fini, on en déduit que $D_{[0,1]}$ est au plus dénombrable.

   La raisonnement que nous venons de faire peut se faire aussi en remplaçant $[0,1]$ par $[-k,k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. En notant $D_{[-k,k]}$ l'ensemble des points de discontinuité de f inclus dans $[-k,k]$ on montre ainsi que $D_{[-k,k]}$ est au plus dénombrable. Finalement, comme $D = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} D_{[-k,k]}$, on obtient bien que D est au plus dénombrable.

   Pour conclure on donne maintenant une démonstration du fait qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

   Soit E un ensemble et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que l'ensemble B_n est au plus dénombrable. On pose $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Comme B_n est au plus dénombrable, il existe une application injective φ_n de B_n dans $\mathbb{N}$. Pour $x \in B$, on définit $\varphi(x) \in \mathbb{N}$ en posant

   $$n_x = \min\{n, x \in B_n\} \text{ et } \varphi(x) = 2^{n_x} 3^{\varphi_{n_x}(x)}.$$

   Il est facile de voir de φ est injective (car 2 et 3 sont des nombres premiers et donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $n_x = n_y$, on en déduit que $x = y$ car φ_{n_x} est injective). L'application φ est donc injective de B dans $\mathbb{N}$, ce qui prouve que B est au plus dénombrable.

Exercice 1.5 (Fonctions réglées) Une fonction réelle définie sur $[a,b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) est dite réglée si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est au plus dénombrable.
2. Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a,b]$ si et seulement si elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $]a,b[$, à droite en a, à gauche en b.

Exercice 1.6 (Normes définies par l'intégrale)

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,+1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\varphi \in E$, on pose

$$\|\varphi\|_1 = \int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\,dt \text{ et } \|\varphi\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace normé.

   Corrigé – *Il est clair que* $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $f \in E$ *et que* $\|\alpha f\|_1 = |\alpha|\|f\|_1$, $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$.

   Il reste à vérifier que $\|f\|_1 = 0$ *implique* $f = 0$. *Pour le montrer, il suffit de remarquer que si* $f \neq 0$, *il existe* $t \in [-1,1]$ *tel que* $a = f(t) \neq 0$ *et donc, par continuité de* f, *il existe* $\alpha, \beta \in [-1,1]$, $\alpha < \beta$ *et* $f > \frac{a}{2}$ *sur* $[\alpha,\beta]$. *D'où l'on déduit* $\|f\|_1 \ge \frac{a}{2}(\beta - \alpha) > 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_n \in E$ par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ nx & \text{si } 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

   (a) Montrer que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(E, \|\cdot\|_1)$, alors $\varphi(x) = 0$ si $x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $x > 0$.

   Corrigé – *On a* $\displaystyle\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx \le \|\varphi_n - \varphi\|_1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En faisant tendre* n *vers* $+\infty$ *on en déduit* $\int_{-1}^{0} |\varphi(x)|dx = 0$ *et donc (par continuité de* φ*) que* $\varphi = 0$ *sur* $[-1,0]$.

   Soit $\varepsilon > 0$. *On a aussi* $\int_{\varepsilon}^{1} |\varphi(x) - 1|dx \le \|\varphi_n - \varphi\|_1$ *pour tout* n *tel que* $\frac{1}{n} \le \varepsilon$. *On en déduit, en faisant tendre* n *vers* $+\infty$ *que* $\int_{\varepsilon}^{0} |\varphi(x) - 1|dx = 0$ *et donc* $\varphi = 1$ *sur* $[\varepsilon, 1]$. *Comme* ε *est arbitraire, on a finalement* $\varphi = 1$ *sur* $]0,1]$. *Noter que ceci est en contradiction avec* $\varphi = 0$ *sur* $[-1,0]$ *et la continuité de* φ *en* 0. *La suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge donc pas dans* $(E, \|\cdot\|_1)$.

   (b) En déduire que $(E, \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Corrigé – *La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathrm{E},\|\cdot\|_1)$ (il suffit pour s'en convaincre de remarquer que $\|\varphi_n-\varphi_m\|_1\le\frac{1}{n}$ si $m\ge n$) et ne converge pas dans $(\mathrm{E},\|\cdot\|_1)$. L'espace $(\mathrm{E},\|\cdot\|_1)$ n'est donc pas complet.*

3. Montrer que $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$ est un espace préhilbertien (c'est-à-dire que sa norme est induite par un produit scalaire) mais n'est pas complet (ce n'est donc pas un espace de Hilbert).

Corrigé – *Pour $f,g\in\mathrm{E}$, on pose $(f\mid g)_2=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.*
L'application $(f,g)\mapsto(f\mid g)_2$ est un produit scalaire sur E, c'est-à-dire que c'est une application bilinéaire de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et telle que $(f\mid f)_2=0$ implique $f=0$.

Elle induit donc une norme sur E qui est justement le la norme $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire $\|f\|_2=\sqrt{(f\mid f)_2}$. L'espace $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$ est donc un espace préhilbertien (voir le paragraphe 6.2).

L'espace $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$ n'est pas complet car la même suite qu'à la question précédente, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy dans $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$ (on a aussi $\|\varphi_n-\varphi_m\|_2\le\frac{1}{n}$ si $m\ge n$) et ne converge pas dans $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$ (un raisonnement analogue à celui de la question précédente montre que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(\mathrm{E},\|\cdot\|_2)$, alors $\varphi(x)=0$ si $x<0$ et $\varphi(x)=1$ si $x>0$, ce qui est en contradiction avec la continuité de φ en 0).

Exercice 1.7 (Rappels sur la convergence des suites réelles) On rappelle que si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\limsup_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\sup_{p\ge n}u_p.$$

1. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty}u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de u.

Corrigé – *On note $a_n=\sup_{p\ge n}u_p\in\overline{\mathbb{R}}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, ceci montre que $\limsup_{n\to+\infty}u_n$ est bien définie. On pose $a=\lim_{n\to+\infty}a_n=\limsup_{n\to+\infty}u_n$.*

On montre tout d'abord que a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On distingue trois cas :

***Cas 1** Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n=-\infty$.*
On a alors $u_p=-\infty$ pour tout $p\ge n$ et donc $u_n\to-\infty$ et $a=-\infty$ est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

***Cas 2** $a_n=+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\sup_{p\ge n}u_p=+\infty$, il existe donc $\varphi(n)\ge n$ telle que $u_{\varphi(n)}\ge n$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a=+\infty$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Cas 3 *$a_n > -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $a_q < +\infty$. Dans ce cas, on a $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq q$. Pour tout $n \geq q$, il existe $\varphi(n) \geq n$ telle que $a_n - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq a_n$ (par définition d'un $\sup$). La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geq q}$ est donc une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge vers $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$, donc a est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Il reste à montrer que a est supérieur ou égal à toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit b une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \to +\infty$ et $u_{\varphi(n)} \to b$, quand $n \to +\infty$. Comme $a_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc, en passant à limite quand $n \to +\infty$, $a \geq b$. a est donc la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on sait par la question précédente qu'il existe une suite extraite de u qui converge vers $\limsup_{n\to+\infty} u_n$. Donner un exemple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que aucune sous-suite ne converge simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ (on rappelle que $(\limsup_{n\to+\infty} f_n)(x) = \limsup_{n\to+\infty}(f_n(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Comme $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$, il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. On définit maintenant f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Soit $x \in \mathbb{R}$,

   — *Si le cardinal de $\psi(x)$ est fini, on prend $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   — *Si le cardinal de $\psi(x)$ est infini, on peut écrire $\psi(x) = \{\varphi_x(p), p \in \mathbb{N}\}$ où φ_x est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. on prend alors $f_n(x) = 1$ si $n \notin \psi(x)$, $f_n(x) = 1$ si $n = \varphi_x(2q)$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = 0$ si $n = \varphi_x(2q+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.*

   Avec ce choix de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ est la fonction constante et égale à 1. On montre maintenant que aucune sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$. En effet, soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(x) = \mathrm{Im}(\varphi)$ (car ψ est surjective). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n \geq p$ tel que $\varphi(n) = \varphi_x(2q+1)$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$ (car $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(p-1)\}$ ne peut pas contenir $\{\varphi_x(2q+1),\ q \in \mathbb{N}\}$), on a donc $f_{\varphi(n)}(x) = 0$, ce qui montre que $f_{\varphi(n)}(x) \not\to 1$ quand $n \to +\infty$. La sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas simplement vers $\limsup_{n\to+\infty} f_n$.

3. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $\liminf_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\limsup_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$.

   Donner un exemple d'une telle suite.

   Corrigé – *On note A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après la question 1 (et son analogue avec $\liminf$) on a $0, 1 \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \subset [0,1]$. On montre maintenant que $\mathrm{A} = [0,1]$.*

   Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $u_p > a$ (car $\sup_{p\geq n} u_p \geq 1$). De même, il existe $q > p$ tel que $u_q < a$ (car $\inf_{q\geq p} u_q \leq 0$). On pose $\varphi(n) = \min\{q > p\,;$

$u_q < a\}$. On a donc $u_{\varphi(n)} < a \le u_{\varphi(n)-1}$ (noter que ceci est aussi vrai si $q = p+1$, grâce au choix de p). Comme $|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)-1}| \to 0$ quand $n \to +\infty$ (noter que $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ car $\varphi(n) > n$), on a $u_{\varphi(n)} \to a$ quand $n \to +\infty$ et donc $a \in \mathrm{A}$. Ceci prouve que $\mathrm{A} = [0,1]$.

On obtient un exemple d'une telle suite de la manière suivante :

Pour $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique (p,q) avec $p \in \mathbb{N}$, $0 \le q \le p$ tel que $n = \frac{p(p+1)}{2} + q$, on pose alors $u_n = \frac{q}{p+1}$ si $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et $u_n = \frac{p-q}{p+1}$ si $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.8 (Fonctions caractéristiques d'ensembles)

Soit E un ensemble. Lorsque A est une partie de E, on définit $\mathbf{1}_\mathrm{A} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_\mathrm{A}(x) = 1, \text{ si } x \in \mathrm{A}, \\ &\mathbf{1}_\mathrm{A}(x) = 0, \text{ si } x \notin \mathrm{A}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

La fonction $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est appelée “fonction caractéristique de A” (elle est souvent aussi notée χ_A).

1. Montrer que si A et B sont deux sous-ensembles disjoints de E, alors

$$\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A} + \mathbf{1}_\mathrm{B}.$$

En déduire que si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de E deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} = \mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n}.$$

(On précisera aussi le sens donné à “$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}$”).

Corrigé – *Si A et B sont 2 parties de E, il est facile de voir que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(x)$ est différent de $\mathbf{1}_\mathrm{A}(x) + \mathbf{1}_\mathrm{B}(x)$ seulement si $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Si A et B sont deux parties disjointes de E, on a bien $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A} + \mathbf{1}_\mathrm{B}$.*

Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de E, on définit, pour $x \in \mathrm{E}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}(x),$$

cette limite existe toujours dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si les (A_n) sont disjoints deux à deux, cette limite est égale à 0 si $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et est égale à 1 si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ (car x appartient alors à un seul A_n).

2. Montrer que si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A} - \mathbf{1}_\mathrm{B}$.

Corrigé – *Si $x \in \mathrm{B}$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_\mathrm{A}(x) - \mathbf{1}_\mathrm{B}(x) = 0$.*

Si $x \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_\mathrm{A}(x) - \mathbf{1}_\mathrm{B}(x) = 1$.

Si $x \in \mathrm{A}^c$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}}(x) = \mathbf{1}_\mathrm{A}(x) - \mathbf{1}_\mathrm{B}(x) = 0$.

Ceci donne bien $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A} - \mathbf{1}_\mathrm{B}$.

3. Montrer que, pour A et B sous-ensembles de E, on a $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

   Corrigé – *Si* $x \in A \cap B$*, on a* $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$.
   Si $x \in (A\cap B)^c = A^c \cup B^c$*, on a* $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 0$.
   Ceci donne bien $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

   Corrigé – *Soit* $a_1,\ldots,a_n$ *les valeurs prises par* f *(noter que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$*). On pose alors* $A_i = \{x \in E\,;\, f(x) = a_i\}$*. On voit alors que* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 1.9 (Limite uniforme dans $\mathbb{R}$) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (de sorte que $f \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$).

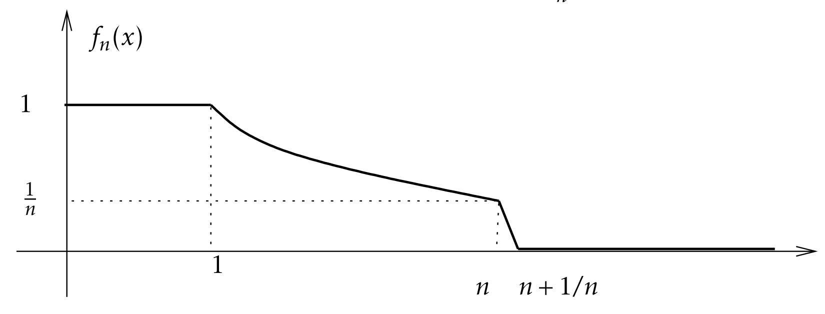
1. On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

   On note $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ cette limite.

   Montrer, en donnant un exemple, que $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ peut ne pas exister dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Pour* $n \geq 1$*, on définit* f_n *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x} & si\ 1 \leq x \leq n, \\ n + \frac{1}{n} - x & si\ n < x < n + \frac{1}{n}, \\ 0 & si\ x \geq n + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1\ si\ 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{x}\ si\ 1 \leq x \end{cases}$$

Plus précisément, on a $\|f_n - f\|_u \le \frac{1}{n} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.
D'autre part, pour $a \ge 1$, $\int_0^a f(x)\,dx = 1 + \log(a) \to \infty$ *quand* $a \to \infty$.

2. On suppose de plus que $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ et $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(x)\,dx$ existent dans $\mathbb{R}$.

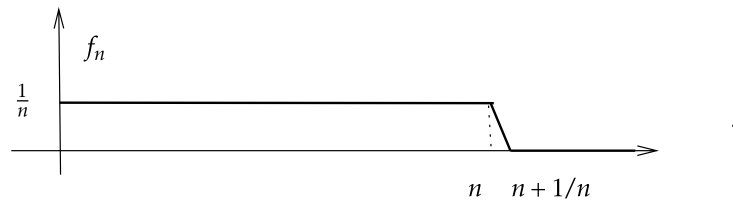
On note alors $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ cette dernière limite. L'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

est-elle satisfaite ?

Corrigé – *Pour* $n \ge 1$, *on définit* f_n *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si\ 0 \le x < n, \\ n + \frac{1}{n} - x & si\ n < x < n + \frac{1}{n}, \\ 0 & si\ x \ge n + \frac{1}{n}. \end{cases}$$



La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0 *car* $\|f_n\|_u = \frac{1}{n} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *mais* $1 \le \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 1.10 (Convergence dominée et intégrale des fonctions continues)

Cet exercice est difficile.

On note $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Noter que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une norme.

Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit f^+ par $f^+(x) = \max(f(x),0)$ (pour tout $x \in [0,1]$), et $f^- = (-f)^+$ (de sorte que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$). Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), On dit que $f \ge g$ si $f(x) \ge g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. On désigne par 0 la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) identiquement nulle. Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire. On dit que T est positive si :

$$f \in E,\ f \ge 0 \Rightarrow T(f) \ge 0.$$

Soit $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive.

1. Montrer que T est continue de $(E, \|.\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$. [Indication : On pourra remarquer que, pour tout $f \in E$, $T(f) \leq T(\mathbf{1})\|f\|_\infty$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante et égale à 1 sur $[0,1]$.]
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Montrer que f_n tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
   [Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $O_n = \{x \in [0,1]; f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ et utiliser la compacité de $[0,1]$.]
   En déduire que $T(f_n) \to T(f)$, quand $n \to +\infty$.
3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, pour tout $x \in [0,1]$.
   Montrer que $T(g) \leq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que $f \in A^+$ s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$.

4. Soit $f \in A^+$, montrer que $\sup_{g\in E, g\leq f} (T(g)) < +\infty$.

On définit T sur A^+ par $T(f) = \sup_{g\in E, g\leq f} (T(g))$.

Noter que ceci est compatible avec la définition de T sur E et que si $f, g \in A^+$ on a alors : $f \geq g \Rightarrow T(f) \geq T(g)$.

5. ("Convergence croissante") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que $f_{n+1} \geq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$ et $\lim_{n\to+\infty} T(f_n) < +\infty$. Montrer que $f \in A^+$ et $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.
   [Indication : Considérer $g_p = \sup_{0\leq n\leq p} (f_{p,n})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_{p,n})_{p\in\mathbb{N}} \subset E$ tels que $f_{p+1,n} \geq f_{p,n}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} f_{p,n}(x) = f_n(x)$, pour tout $x \in [0,1]$.]
6. ("Convergence décroissante") Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^+$ et $f \in E$ telles que $f_{n+1} \leq f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que $T(f) = \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.
   [Indication : On pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $h_n \in A^+$ tel que $h_n \geq f_n - f_{n+1}$ et $T(h_n) \leq T(f_n) - T(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Puis, en remarquant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n(x) \geq f_0(x) - f(x)$, pour tout $x \in [0,1]$, et en utilisant la question 5, montrer que $T(f) \geq \lim_{n\to+\infty} T(f_n)$.]

7. ("Convergence dominée") Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $g \in E$ telles que :
   1. $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|g_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que $T(g) = \lim_{n\to+\infty} T(g_n)$.
   [Indication : On pourra utiliser la question 6 avec $f_n = \sup_{p\ge n} g_p - \inf_{p\ge n} g_p$ et remarquer que $g - g_n \le f_n$ et $g_n - g \le f_n$.]
8. (Exemple.) En choisissant convenablement T, montrer le résultat suivant :
   Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ et $f \in E$ telles que :
   1. $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in [0,1]$.
   2. $|f_n(x)| \le 1$, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   alors $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$, quand $n \to +\infty$.
   Donner un contre–exemple à ce résultat si la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée.

Exercice 1.11 (Théorème de Bernstein) On veut démontrer ici le théorème suivant :

Théorème 1.7 (Bernstein) *Soient* E *et* F *deux ensembles quelconques ; il existe une bijection de* E *dans* F *si et seulement s'il existe une injection de* E *dans* F *et une injection de* F *dans* E.

Bien sûr, l'existence d'une bijection de E dans F donne l'existence d'une injection de E dans F et d'une injection de F dans E. Il s'agit maintenant de montrer la réciproque. On suppose donc qu'il existe une injection E dans F, notée f, et une injection de F dans E, notée g. A partir de f et g, on va construire une bijection h de E dans F.

Soit $x \in E$ donné. Pour déterminer $h(x)$, on commence par considérer la suite des images de x (alternativement par f et g) et la suite des antécédents de x (alternativement par g et f). Bien sûr, la suite des images de x est infinie. Mais, lorsque f ou g n'est pas surjective, la suite des antécédents de x peut ne pas être infinie (si $x \notin \mathrm{Im}(g)$ elle s'arrête tout de suite !). Le choix de $h(x)$ va être fait en fonction de cette suite des antécédents. Voici tout d'abord la construction de cette suite.

On pose $x_0 = x$.

Construction de x_k pour $k > 0$. Soit $k > 0$. On suppose x_{k-1} connu (ce qui est vrai pour $k = 1$).

- Si k est impair, on prend $x_k = f(x_{k-1})$ (de sorte que $x_k \in F$).
- Si k est pair, on prend $x_k = g(x_{k-1})$ (de sorte que $x_k \in E$).

Construction de x_k pour $k < 0$. Soit $k < 0$, On suppose que x_{k+1} existe (ce qui est vrai pour $k = -1$).

— Si $|k|$ est impair et si $x_{k+1} \notin \text{Im}(g)$, la suite des antécédents s'arrête.
  On pose alors $\text{N} = k$ (et x_N n'existe pas).
— Si $|k|$ est impair et si $x_{k+1} \in \text{Im}(g)$, on prend x_k tel que $g(x_k) = x_{k+1}$ (x_k est unique car g est injective).
— Si $|k|$ est pair et si $x_{k+1} \notin \text{Im}(f)$, la suite des antécédents s'arrête.
  On pose alors $\text{N} = k$ (et x_N n'existe pas).
— Si $|k|$ est pair et si $x_{k+1} \in \text{Im}(f)$, on prend x_k tel que $f(x_k) = x_{k+1}$ (x_k est unique car f est injective).

Enfin, si la suite des antécédents ne s'arrête jamais, on pose $\text{N} = -\infty$. On a ainsi construit une suite $(x_k)_{k>\text{N}}$

On définit maintenant $h(x)$ dans F. On distingue trois cas.

Si $-\text{N}$ est impair, on prend $h(x) = f(x)$, c'est-à-dire $h(x) = x_1$,

Si $-\text{N}$ est pair, on prend $h(x) = y$, avec $g(y) = x$, c'est-à-dire $h(x) = x_{-1}$,

Si $\text{N} = -\infty$, on prend $h(x) = f(x)$.

Montrer que l'application h ainsi définie est une bijection de E dans F.

Corrigé – *L'application g est une bijection de* F *sur son image, notée* $\text{Im}(g)$ *(qui est une partie de* E*). On note* $\widehat{g}$ *l'application réciproque (qui est donc une bijection de* $\text{Im}(g)$ *dans* F*). La construction de h montre que pour tout $x \in \text{E}$ on a $h(x) = f(x)$ ou $h(x) = \widehat{g}(x)$.*

On montre tout d'abord que h est injective. Soit $x, z \in \text{E}$ tels que $h(x) = h(z)$. On veut montrer que $x = z$. On distingue 3 cas.

Cas 1 : $h(x) = f(x), h(z) = f(z)$. *Dans ce cas, comme f est bijective, on a $x = z$.*

Cas 2 : $h(x) = \widehat{g}(x), h(z) = \widehat{g}(z)$. *Dans ce cas, comme $\widehat{g}$ est bijective, on a $x = z$.*

Cas 3 : $h(x) = f(x), h(z) = \widehat{g}(z)$. *On note $(x_k)_{k>\text{N}_x}$ et $(z_k)_{k>\text{N}_z}$ les suites associées à x et z. Par définition de h, on a donc $h(x) = x_1$ et $h(z) = z_{-1}$. De plus, on a $\text{N}_z > -\infty$, $-\text{N}_z$ pair et $\text{N}_x = -\infty$ ou $-\text{N}_x$ impair.*
De l'égalité $x_1 = z_{-1}$, on déduit que les antécédents de x_1 sont les mêmes que ceux de z_{-1} et donc que $\text{N}_z = \text{N}_x - 2$, ce qui est impossible car $-\text{N}_z$ pair et $\text{N}_x = -\infty$ ou $-\text{N}_x$ impair. Ce cas est donc impossible.

Bien sûr, le cas $h(x) = \widehat{g}(x)$ et $h(z) = f(z)$ est identique au cas 3. On a donc bien montré que h est injective.

On montre maintenant que h est surjective. Soit $y \in \text{F}$. On pose $x = g(y)$ et on considère la suite associée à x, notée $(x_k)_{k>\text{N}}$, de sorte que $y = x_{-1}$. Ici aussi, on peut distinguer 3 cas.

Cas 1 : $\mathrm{N} = -\infty$. *Dans ce cas, la suite des antécédents de x_{-2} est aussi infinie et on a donc $h(x_{-2}) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*
Cas 2 : $\mathrm{N} > -\infty$ **et** $-\mathrm{N}$ **impair.** *Comme x_{-1} existe (puisque $x_{-1} = y$), on a $\mathrm{N} \le -3$ et donc x_{-2} existe. La suite des antécédents de x_{-2} est alors la même que la suite des antécédents de x avec un décalage de 2, on a alors aussi $h(x_{-2}) = f(x_{-2}) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*
Cas 3 : $\mathrm{N} > -\infty$ **et** $-\mathrm{N}$ **pair.** *On a alors $h(x) = x_{-1} = y$. On a donc $y \in \mathrm{Im}(h)$.*

Ceci termine la démonstration de la bijectivité de h.

Exercice 1.12 (Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$)

En utilisant le théorème de Bernstein (théorème 1.7), montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Corrigé – *Il s'agit donc de construire une injection, notée f, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et une injection, notée g, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.*
Pour f, on prend $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est bien une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.
On construit maintenant une application g injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.
Soit $r \in \mathbb{Q}$. On distingue 3 cas,

1. *Si $r = 0$, on pose $h(r) = 0$.*
2. *Si $r > 0$. On note $\mathrm{I}_r = \{q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $rq \in \mathbb{N}^\star\}$, $q_r = \min \mathrm{I}_r$ et $p_r = rq_r$ de sorte que $p_r \in \mathbb{N}^\star$ et $r = p_r/q_r$. On pose alors $g(r) = 2^{p_r}3^{q_r}$ (on a bien $g(r) \in \mathbb{N}$).*
3. *Si $r < 0$. On note $\mathrm{I}_r = \{q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $-rq \in \mathbb{N}^\star\}$, $q_r = \min \mathrm{I}_r$ et $p_r = -rq_r$ de sorte que $p_r \in \mathbb{N}^\star$ et $r = -p_r/q_r$. On pose alors $g(r) = 5^{p_r}3^{q_r}$ (on a bien $g(r) \in \mathbb{N}$).*

On montre mainenant que g est injective. Soit $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $g(r) = g(s)$, il s'agit de montrer que $r = s$. On distingue ici 4 cas.

1. *Si $r = 0$ ou $s = 0$, on a $g(r) = g(s) = 0$ et donc $r = s = 0$.*
2. *Si r et s sont de signes contraires. On peut supposer $r > 0$ et $s > 0$ (le cas $r < 0$ et $s > 0$ est semblable). Dans ce cas, on ne peut pas avoir $g(r) = g(s)$ car $g(r)$ est un multiple de 2 mais $g(s)$ n'est pas un multiple de 2.*
3. *Si $r > 0$ et $s > 0$, on a $g(r) = 2^{p_r}3^{q_r} = 2^{p_s}3^{q_s} = g(s)$. Mais, comme 2 et 3 sont des nombres premiers, ceci impose $p_r = p_s$ et $q_r = q_s$, ce qui donne bien $r = s$.*
4. *Si $r < 0$ et $s < 0$, on a $g(r) = 5^{p_r}3^{q_r} = 5^{p_s}3^{q_s} = g(s)$. Mais, comme 5 et 3 sont des nombres premiers, ceci impose $p_r = p_s$ et $q_r = q_s$, ce qui donne encore $r = s$.*

On a bien montré que $r = s$ et donc que g est injective.

Exercice 1.13 (Limites sup et inf d'ensembles) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On note

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\ge n} \mathrm{A}_p \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\ge n} \mathrm{A}_p.$$

1. On suppose la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone, c'est-à-dire que $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou que $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ en fonction de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

   Corrigé – *Si* $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a alors*
   $$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$
   Si $\mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a alors*
   $$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

2. Même question que précédemment si la suite est définie par : $\mathrm{A}_{2p} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}_{2p+1} = \mathrm{B}$, $p \in \mathbb{N}$, A et B étant deux parties données de E.

   Corrigé – *Dans ce cas, on a* $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ *et* $\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \mathrm{A}\cup\mathrm{B}$.

3. Montrer que :
$$1_{\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n} = \limsup_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}$$
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n \subset \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$$
$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n^c}(x) < \infty\}$$
$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}(x) = \infty\}.$$

   Corrigé – *On remarque d'abord que, si* $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$, $1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\mathrm{B}_n}$ *et* $1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\mathrm{B}_n}$.

   — *Soit* $x \in \mathrm{E}$,
   $$1_{\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n}(x) = 1_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcup_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x))$$
   $$= \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x)) = \limsup_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_p}(x).$$
   Donc $1_{\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n} = \limsup_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}$.

   De même, soit $x \in \mathrm{E}$,
   $$1_{\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n}(x) = 1_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p}(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x))$$
   $$= \lim_{n\to+\infty}(\inf_{p\geq n} 1_{\mathrm{A}_p}(x)) = \liminf_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_p}(x).$$
   Donc $1_{\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n} = \liminf_{n\to+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}$.

   — *Si* $x \in \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \bigcap_{p\geq n} \mathrm{A}_p$, *on a donc* $x \in \bigcup_{p\geq m} \mathrm{A}_p$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *(on a, par exemple,* $x \in \mathrm{A}_p$ *avec* $p = \max\{m, n\}$*). On en déduit* $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geq m} \mathrm{A}_p = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$. *Donc* $\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n \subset \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$.

— *Soit* $x \in \mathrm{E}$. *On voit que* $x \in \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ *si et seulement s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in \mathrm{A}_p$ *pour tout* $p \geq n$*, ce qui est équivalent à dire que* x *n'appartient à* A_n^c *que pour un nombre fini de* n *ou encore que* $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n^c}(x) < \infty$. *On a donc bien*

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n^c}(x) < \infty\}.$$

— *Soit* $x \in \mathrm{E}$. *On voit que* $x \in \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$ *si et seulement si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $p \geq n$ *tel que* $x \in \mathrm{A}_p$*, ce qui est équivalent à dire que* x *n'appartient à* A_n *que pour un nombre infini de* n *ou encore que* $\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}(x) = \infty$. *On a donc bien*

$$\limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{\mathrm{A}_n}(x) = \infty\}.$$

Chapitre 2

Tribus et mesures

2.1 Introduction

2.1.1 Cas d'un problème "discret"

Pour introduire la série de définitions qui suivent, commençons par quelques exemples, tirés du calcul des probabilités. Le calcul des probabilités s'intéresse à mesurer la "chance" qu'un certain événement, résultat d'une expérience, a de se produire. Considérons par exemple l'expérience qui consiste à lancer un dé. On appelle éventualité associée à cette expérience un des résultats possibles de cette expérience, et univers des possibles l'ensemble E de ces éventualités. Dans notre exemple, les éventualités peuvent être $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 ; on pourrait choisir aussi comme éventualités les résultats correspondant au dé cassé. On peut donc tout de suite remarquer que l'ensemble E des univers du possible dépend de la modélisation, c'est-à-dire de la formalisation mathématique que l'on fait du problème. Notons qu'il est parfois difficile de définir l'ensemble E.

À partir des éventualités, qui sont donc les éléments de l'univers des possibles E, on définit les événements, qui forment un ensemble de parties de E. Dans notre exemple du lancer de dé, l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(\mathrm{E})$. Dans l'exemple du dé, la partie $\{2, 4, 6\}$ de E est l'événement : "le résultat du lancer est pair". On appelle événement élémentaire un singleton, par exemple $\{6\}$ dans notre exemple du lancer de dé, événement certain l'ensemble E tout entier, et l'événement vide l'ensemble vide $\emptyset$ (qui a donc une chance nulle de se réaliser). Pour mesurer la chance qu'a un événement de se réaliser, on va définir une application p de l'ensemble des événements (donc de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ dans notre exemple du lancer de dé) dans $[0, 1]$ avec certaines propriétés (qui semblent naturelles…). La chance (ou probabilité) pour un événement $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ de se réaliser sera donc le nombre $p(\mathrm{A})$, appartenant à $[0, 1]$.

L'exemple du lancer de dé, que nous venons de considérer, est un problème discret fini, au sens ou l'ensemble E est fini. On peut aussi envisager des problèmes discrets infinis, l'ensemble E est alors infini dénombrable (on rappelle qu'un ensemble I est dénombrable s'il existe une bijection de I dans $\mathbb{N}$, il est au plus dénombrable s'il existe une injection de I dans $\mathbb{N}$), ou des problèmes (parfois appelés continus) où E est infini non dénombrable.

2.1.2 Exemple continu

Considérons maintenant l'expérience qui consiste à lancer une balle de ping-pong sur une table de ping-pong. Soit E l'ensemble des points de la table de ping-pong, on peut voir E comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, un événement élémentaire est alors un point $(x, y) \in E$ (le point d'impact de la balle), et un événement semble être une partie quelconque A de $\mathcal{P}(E)$. On suppose qu'on a effectué le lancer sans viser, c'est-à-dire en supposant que n'importe quel point de la table a une chance égale d'être atteint (les événements élémentaires sont dit équiprobables), et que la balle tombe forcément sur la table (on est très optimiste…). On se rend compte facilement que la probabilité pour chacun des points de E d'être atteint doit être nulle, puisque le nombre des points est infini. On peut aussi facilement deviner que la probabilité pour une partie A d'être atteinte (dans le modèle équiprobable) est le rapport entre la surface de A et la surface de E. La notion intuitive de surface correspond en fait à la notion mathématique de mesure que nous allons définir dans le prochain paragraphe. Malheureusement, comme on l'a dit dans le chapitre introductif, il ne nous sera pas mathématiquement possible de définir une application convenable, *i.e.* qui vérifie les propriétés (4.1)-(4.2), et qui mesure toutes les parties de $\mathbb{R}$ (au sens intuitif de longueur) ou $\mathbb{R}^2$ (au sens intuitif de surface), ou même du sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ (voir à ce sujet l'exercice 2.28). On va donc définir un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ (qu'on appelle tribu) sur lequel on pourra définir une telle application. Dans le cas d'un ensemble fini, la tribu sera, en général, $\mathcal{P}(E)$ tout entier. Mais, dans le cas de la balle de ping-pong que vous venons de décrire, l'ensemble des événements sera une tribu strictement incluse dans $\mathcal{P}(E)$.

2.2 Tribu ou σ−algèbre

Définition 2.1 (Tribu ou σ−algèbre) *Soient* E *un ensemble,* T *une famille de parties de* E *(i.e.* $T \subset \mathcal{P}(E)$*). La famille* T *est une tribu (on dit aussi une* σ*−algèbre) sur* E *si* T *vérifie :*

1. $\emptyset \in T, E \in T$,

2. T *est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$.

3. T *est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T*, on a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

4. T *est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*, on a* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$ *(On rappelle que* $\mathrm{A}^c = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$*).*

Il est clair que, pour montrer qu'une partie T de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1-4 de la définition précédente. Il suffit de vérifier par exemple $\emptyset \in \mathrm{T}$ (ou $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$), 2 (ou 3) et 4.

Exemples de tribus sur E : $\{\emptyset, \mathrm{E}\}$ et $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ sont des tribus sur E.

Définition 2.2 (Langage probabiliste) *Soient* E *un ensemble quelconque (parfois appelé l'univers des possibles) et* T *une tribu ; on appelle éventualités les éléments de* E *et événements les éléments de* T*. On appelle événement élémentaire un singleton appartenant à* T*. On dit que deux événements* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *sont incompatibles si* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$*.*

Proposition 2.3 (Stabilité par intersection des tribus) *Soient* E *et* I *deux ensembles. Pour tout* $i \in \mathrm{I}$*, on se donne une tribu* T_i *sur* E*. Alors, la famille (de parties de* E*)*

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E};\ \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i,\ \forall i \in \mathrm{I}\}$$

est encore une tribu sur E*.*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de la première question de l'exercice 2.2. ■

Cette proposition nous permet de définir ci-après la notion de tribu engendrée.

Définition 2.4 (Tribu engendrée) *Soient* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*. On appelle tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *la plus petite tribu contenant* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire la tribu* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ *intersection de toutes les tribus sur* E *contenant* $\mathcal{C}$ *(cette intersection est non vide car* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *est une tribu contenant* $\mathcal{C}$*).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est identique à celle de tribu en remplaçant "dénombrable" par "finie".

Définition 2.5 (Algèbre) *Soient* E *un ensemble,* $\mathcal{A}$ *une famille de parties de* E *(i.e.* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$*). La famille* $\mathcal{A}$ *est une algèbre sur* E *si* $\mathcal{A}$ *vérifie :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}, \mathrm{E} \in \mathcal{A}$,

2. *$\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$ *on a* $A \cup B \in \mathcal{A}$.
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout* $A, B \in \mathcal{A}$ *on a* $A \cap B \in \mathcal{A}$.
4. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on a* $A^c \in \mathcal{A}$.

Remarque 2.6 (Algèbre engendrée) *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. *Comme pour les tribus, on peut définir l'algèbre engendrée par* $\mathcal{C}$. *C'est la plus petite algèbre contenant* $\mathcal{C}$, *c'est-à-dire l'intersection de toutes les algèbres contenant* $\mathcal{C}$ *(voir l'exercice 2.9).*

Soit E un ensemble, $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ et $T(\mathcal{C})$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (voir la définition 2.4 et l'exercice 2.2). Il est important de remarquer que, contrairement à ce que l'on pourrait être tenté de croire, les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ ne sont pas tous obtenus, à partir des éléments de $\mathcal{C}$, en utilisant les opérations : intersection dénombrable, union dénombrable et passage au complémentaire. Plus précisément, on pose :

$$\mathcal{R}^1(\mathcal{C}) = \{A \subset E \text{ tel que } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{avec, pour tout } n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},$$
$$\mathcal{R}^2(\mathcal{C}) = \{A \subset E \text{ tel que } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{avec, pour tout } n, A_n \in \mathcal{C} \text{ ou } A_n^c \in \mathcal{C}\},$$
$$\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}^1(\mathcal{C}) \cup \mathcal{R}^2(\mathcal{C}).$$

Prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ (donc $T(\mathcal{C})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, voir définition ci-après). Il est facile de voir que $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset T(\mathcal{C})$. Cependant, $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ n'est pas une tribu (cela est moins facile à voir). En posant : $\mathcal{S}_0 = \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_n = \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n-1})$, pour $n \geq 1$, on peut aussi montrer que $\overline{\mathcal{S}} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$ n'est pas une tribu (et que $\overline{\mathcal{S}} \subset T(\mathcal{C})$).

Remarque 2.7 *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{P}(E)$. *Il est alors facile de voir que* $T(\mathcal{C}_1) \subset T(\mathcal{C}_2)$ *(cf. Exercice 2.2).*

La construction de la tribu de Borel s'appuie sur la topologie des ouverts de $\mathbb{R}$. Rappelons à toutes fins utiles qu'une topologie est précisément la donnée des ouverts :

Définition 2.8 (Topologie) *Soit* E *un ensemble. Une topologie sur* E *est donnée par une famille de parties de* E, *appelées ouverts de* E, *contenant* $\emptyset$ *et* E, *stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble* E, *muni de cette famille de parties, est alors un espace topologique.*

Définition 2.9 (Tribu borélienne) *Soit* E *un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de* E*, cette tribu sera notée* $\mathcal{B}(E)$*. Dans le cas* $E = \mathbb{R}$*, cette tribu est donc notée* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On appelle borélien de* $\mathbb{R}$ *un élément de la tribu borélienne.*

Un des objectifs principaux de ce chapitre est de construire une application λ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

1. $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$,
2. $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. (Noter que $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ grâce à la stabilité d'une tribu par union dénombrable.)

C'est l'objet du paragraphe 2.5. Une question naturelle est de savoir si l'on peut prendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. La réponse est non (voir les exercices 2.28 et 2.29). On peut même démontrer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ (alors que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$).

On donne maintenant un rappel rapide sur les cardinaux (sans entrer dans les aspects difficiles de la théorie des ensembles, et donc de manière peut-être un peu imprécise).

Soient A et B deux ensembles.

1. On dit que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ s'il existe une application bijective de A dans B. Pour montrer que deux ensembles ont même cardinaux, il est souvent très utile d'utiliser le théorème de Bernstein (voir l'exercice 1.11). Ce théorème dit que s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B (et donc $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$). Le théorème de Bernstein motive également la définition suivante.
2. On dit que $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$ s'il existe une application injective de A dans B.
3. Un autre théorème intéressant, dû à Cantor, donne que, pour tout ensemble X, on a $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ (c'est-à-dire $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$ et $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$). On a donc, en particulier, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > \mathrm{card}(\mathbb{R})$. La démonstration du théorème de Cantor est très simple. Soit $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$. On va montrer que φ ne peut pas être surjective. On pose $A = \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$ (A peut être l'ensemble vide). Supposons que $A \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Soit alors $a \in X$ tel que $A = \varphi(a)$. Si $a \in A = \varphi(a)$, alors $a \notin A$ par définition de A. Si $a \notin A = \varphi(a)$, alors $a \in A$ par définition de A. On a donc montré que A ne peut pas avoir d'antécédent (par φ) et donc φ n'est pas surjective.

Proposition 2.10 *On note $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_2 = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{]a,\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Alors $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Noter que d'autres caractérisations de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, semblables, sont possibles.)*

DÉMONSTRATION – On a, par définition de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On va démontrer ci-après que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ (le fait que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_3)$ est laissé au lecteur).

Comme $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, on a $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$. Il suffit donc de démontrer l'inclusion inverse. On va montrer que $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on aura alors que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose $\mathrm{O} \neq \emptyset$ (on sait déjà que $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$). Le lemme 2.11 ci-après nous donne l'existence d'une famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathrm{A}}$ d'intervalles ouverts telle que $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$ et $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_n$. Noter qu'on a aussi $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ en posant $\mathrm{I}_n = \emptyset$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}_2 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ pour tout $n \in \mathrm{A}$ et $\emptyset \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$, on en déduit, par stabilité dénombrable d'une tribu, que $\mathrm{O} \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. Donc, $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. On a bien montré que $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. ■

Lemme 2.11 *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts bornés.*

DÉMONSTRATION – Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathrm{O} \neq \emptyset$. On pose $\mathrm{A} = \{(\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^2 ; \beta < \gamma,]\beta,\gamma[\subset \mathrm{O}\}$. On a donc $\bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[\subset \mathrm{O}$. On va montrer que $\mathrm{O} \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$ (et donc que $\mathrm{O} = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$).

Soit $x \in \mathrm{O}$, il existe $\alpha_x > 0$ tel que $]x-\alpha_x, x+\alpha_x[\subset \mathrm{O}$. En prenant $\beta_x \in \mathbb{Q} \cap]x-\alpha_x, x[$ et $\gamma_x \in \mathbb{Q} \cap]x, x+\alpha_x[$ (de tels β_x et γ_x existent) on a donc $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \mathrm{O}$ et donc $(\beta_x,\gamma_x) \in \mathrm{A}$. D'où $x \in]\beta_x,\gamma_x[\subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$. On a bien montré que $\mathrm{O} \subset \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$ et donc que $\mathrm{O} = \bigcup_{(\beta,\gamma)\in\mathrm{A}}]\beta,\gamma[$. Comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, A est au plus dénombrable et le lemme est démontré. ■

On peut aussi montrer que tout ouvert non vide est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (cf. le lemme 2.44 page 65).

Définition 2.12 (Espace et partie mesurable ou probabilisable) *Soient* E *un ensemble et* T *une tribu sur* E. *Le couple* (E, T) *est appelé espace mesurable ou (en langage probabiliste !) espace probabilisable. Les parties de* E *qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de* T *sont dites mesurables ou probabilisables (resp. non mesurables, non probabilisables).*

2.3 Mesure, probabilité

Définition 2.13 (Mesure) *Soit* (E,T) *un espace mesurable. On appelle mesure une application* $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(avec* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$*) vérifiant :*

1. $m(\emptyset) = 0$,

2. m *est* σ*-additive, c'est-à-dire que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* T *disjoints deux à deux (i.e. tels que* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, si* $n \neq m$*) on a :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.1}$$

Remarque 2.14

1. Dans la définition précédente on a étendu à $\overline{\mathbb{R}}_+$ l'addition dans $\mathbb{R}_+$. On a simplement posé $x + (+\infty) = +\infty$, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Noter également que la somme de la série dans la définition précédente est à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que, bien sûr, $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ signifie simplement que $\sum_{p=0}^{n} a_p \to a$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) quand $n \to +\infty$.
2. Soient $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Remarquer que $x + y = x + z$ implique $y = z$ si $x \neq +\infty$.
3. Dans la définition précédente, la condition 1. peut être remplacée par la condition : $\exists \ A \in T, m(A) < \infty$. La vérification de cette affirmation est laissée au lecteur attentif.
4. Il est intéressant de remarquer que, pour une série à termes positifs, l'ordre de sommation est sans importance. Plus précisément, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et si φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$. C'est l'objet du lemme 2.15.
5. Une conséquence immédiate de la σ-additivité est l'additivité, c'est-à-dire que

$$m(\bigcup_{p=0}^{n} A_p) = \sum_{p=0}^{n} m(A_p)$$

   pour toute famille finie $(A_p)_{p=0,\ldots,n}$ d'éléments de T, disjoints deux à deux. L'additivité se démontre avec la σ-additivité en prenant $A_p = \emptyset$ pour $p > n$ dans (2.1).
6. Dans le cas $E = \mathbb{R}$ et $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il est facile de construire des mesures sur T, mais il n'existe pas de mesure sur T, notée m, telle que $m(]a, b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ (voir les exercices 2.29 et 2.28). Une telle mesure existe si on prend pour T la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, c'est l'objet de la section 2.5.

Lemme 2.15 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective ; alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}.$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p) \text{ et } B = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} (= \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}).$$

Noter que $A, B \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On veut montrer que $A = B$.

On montre d'abord que $B \le A$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $N = \max\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$. Comme $a_q \ge 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \le \sum_{p=0}^{N} a_p \le A$. On en déduit, faisant tendre n vers ∞ que $B \le A$.

En raisonnant avec l'inverse de φ on a aussi $A \le B$ et finalement $A = B$. ■

Définition 2.16 (Mesure finie et probabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1. *On appelle mesure finie une mesure* m *sur* T *telle que* $m(E) < \infty$.
2. *On appelle probabilité une mesure* p *sur* T *telle que* $p(E) = 1$.

Définition 2.17 (Espace mesuré, espace probabilisé) *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* m *une mesure (resp. une probabilité) sur* T. *Le triplet* (E, T, m) *est appelé espace mesuré (resp. espace probabilisé).*

Définition 2.18 (Mesure σ-finie) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est σ-finie (ou que* (E, T, m) *est σ-fini) si il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$A_n \in T,\ \ m(A_n) < +\infty, \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \textit{ et } \ \ E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Remarque 2.19 Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini. Une conséquence de la définition 2.18 est qu'il existe alors une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de T telle que $m(E_n) < +\infty$ pour tout n, $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$. En effet, à partir de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la définition 2.18, on construit une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$E_0 = A_0 \text{ et, pour } n > 0,\ E_n = A_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} E_p.$$

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les propriétés désirées.

Exemple 2.20 (Mesure de Dirac) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $a \in E$. *On définit sur* T *la mesure* δ_a *par (pour* $A \in T$*) :*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \textit{si } a \notin A, \\ 1 & \textit{si } a \in A. \end{cases} \tag{2.2}$$

On peut remarquer que la mesure de Dirac est une probabilité.

Remarque 2.21 (Comment choisir la probabilité) Soit (E, T) un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur T. C'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rende compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion de fréquence, qui est une notion expérimentale à l'origine. Soit $A \in T$ un événement, dont on cherche à évaluer la probabilité $p(A)$. On effectue pour cela N fois l'expérience dont l'univers des possibles est E, et on note N_A le nombre de fois où l'événement A est réalisé. A N fixé, on définit alors la *fréquence* $f_N(A)$ de l'événement A par :

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Expérimentalement, il s'avère que $f_N(A)$ admet une limite lorsque $N \to +\infty$. C'est ce qu'on appelle la loi empirique des grands nombres. On peut donc définir expérimentalement $p(A) = \lim_{N\to+\infty} f_N(A)$. Cependant, on n'a pas ainsi démontré que p est une probabilité : il ne s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On donnera plus loin la loi forte des grands nombres (proposition 6.102), qui permettra de justifier mathématiquement la loi empirique. On peut remarquer que $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1$.

Exemple 2.22 (Le cas équiprobable) Soit (E, T, p) un espace probabilisé. On suppose que tous les singletons appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équiprobables. On a alors : $p(\{x\}) = \frac{1}{\mathrm{card} E}$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.23 (Mesure atomique) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré tel que :* $\{x\} \in T$ *pour tout* x *de* E. *On dit que* m *est portée par* $S \in T$ *si* $m(S^c) = 0$. *Soit* $x \in E$, *on dit que* x *est un atome ponctuel de* m *si* $m(\{x\}) \neq 0$. *On dit que* m *est purement atomique si elle est portée par la partie de* E *formée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.*

Définition 2.24 (Mesure diffuse) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* m *une mesure sur* T . *On dit que* m *est diffuse si* $\{x\} \in T$ *et* $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$. *(Cette définition est aussi valable pour une mesure signée sur* T, *définie dans la section 2.4.)*

Définition 2.25 (Partie négligeable) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $A \subset E$. *On dit que* A *est négligeable s'il existe un ensemble* $B \in T$ *tel que* $A \subset B$ *et* $m(B) = 0$.

Définition 2.26 (Mesure complète) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on dit que* m *est complète (ou que l'espace* (E, T, m) *est complet) si toutes les parties négligeables sont mesurables, c'est-à-dire appartiennent à* T.

La proposition suivante donne les principales propriétés d'une mesure.

Proposition 2.27 (Propriétés des mesures) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. La mesure m vérifie les quatre propriétés suivantes :*

1. Monotonie : Soit $A, B \in T, A \subset B$, *alors*

$$m(A) \le m(B). \tag{2.3}$$

2. σ-sous-additivité : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.4}$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \subset A_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.5}$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_{n+1} \subset A_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et telle que il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$, *alors*

$$m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(m(A_n)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n)). \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ces propriétés est facile : elles découlent toutes du caractère positif et du caractère σ-additif de la mesure. Attention : ces propriétés ne sont pas vérifiées par les mesures signées que nous verrons à la section 2.4.

1. *Monotonie.* Soit $A, B \in T$, $A \subset B$. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ et $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Comme $A \in T$ et $B \setminus A = B \cap A^c \in T$, l'additivité de m (voir la remarque 2.14) donne $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \ge m(A)$, car m prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

   Noter aussi que $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ si $0 \le m(A) \le m(B) < \infty$ (mais cette relation n'a pas de sens si $m(A) = m(B) = \infty$).

2. σ−*sous additivité.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. On veut montrer que

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

   On pose $B_0 = A_0$ et, par récurrence sur n, $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} B_i)$ pour $n \ge 1$. Par récurrence sur n on montre que $B_n \in T$ pour tout n en remarquant que, pour $n > 1$, $B_n = A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c)$. La construction des B_n assure que

$$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \ne m \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

   Pour vérifier cette dernière propriété, on remarque que

$$B_n \subset A_n \text{ et donc } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Puis, si $x \in A_n$ et $x \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B_i$, on a alors

$$x \in A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} B_i^c) = B_n.$$

Ceci prouve que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

et donc, finalement,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On utilise maintenant la σ-additivité de m et la monotonie de m (car $B_n \subset A_n$) pour écrire que

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

3. *Continuité croissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par monotonie de m, on a

$$m(A_{n+1}) \ge m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on définit la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ pour tout } n \ge 1$$

(noter que $A_{n-1} \subset A_n$). On a

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, B_n \in T \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \ne m.$$

La σ-additivité de m nous donne

$$m(A) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m(B_p).$$

Puis, comme $A_n = \bigcup_{p=0}^{n} B_p$, l'additivité de m (qui se déduit de la σ-additivité) nous donne

$$\sum_{p=0}^{n} m(B_p) = m(A_n) \text{ et donc } m(A) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n).$$

4. *Continuité décroissante.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $m(A_{n_0}) < \infty$.

   Par monotonie, on a $m(A_{n+1}) \le m(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} m(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

   On a aussi, par monotonie,

$$m(A) \le m(A_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Comme $m(A_{n_0}) < \infty$, on a aussi

$$m(A_n) < \infty \text{ pour tout } n \geq n_0 \text{ et } m(A) < \infty.$$

On pose $B_n = A_{n_0} \setminus A_n = A_{n_0} \cap A_n^c \in T$, pour tout $n \geq n_0$. La suite $(B_n)_{n \geq n_0}$ est croissante ($B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$) et

$$B = \bigcup_{n\geq 0} B_n = \bigcup_{n\geq n_0} (A_{n_0} \setminus A_n) = A_{n_0} \setminus \bigcap_{n\geq n_0} A_n = A_{n_0} \setminus A.$$

La continuité croissante donne

$$m(A_{n_0} \setminus A) = m(B) = \lim_{n\to+\infty} m(B_n) = \lim_{n\to+\infty} m(A_{n_0} \setminus A_n). \tag{2.7}$$

Comme $A \subset A_{n_0}$, on a $m(A_{n_0} \setminus A) = m(A_{n_0}) - m(A)$ (car $m(A) \leq m(A_{n_0}) < \infty$, on utilise ici la remarque à la fin de la preuve de la monotonie). De même, comme $A_n \subset A_{n_0}$ (pour $n \geq n_0$), on a $m(A_{n_0} \setminus A_n) = m(A_{n_0}) - m(A_n)$ (car $m(A_n) \leq m(A_{n_0}) < \infty$). En utilisant une nouvelle fois que $m(A_{n_0}) < \infty$, on déduit de (2.7) que $m(A) = \lim_{n\to+\infty} m(A_n)$. ■

Théorème 2.28 (Mesure complétée) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré, on note* $\mathcal{N}_m$ *l'ensemble des parties négligeables. On pose* $\overline{T} = \{A \cup N,\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$. *Alors* $\overline{T}$ *est une tribu, et il existe une et une seule mesure, notée* $\overline{m}$, *sur* $\overline{T}$, *égale à m sur* T. *De plus, une partie de* E *est négligeable pour* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *si et seulement si elle est négligeable pour* (E, T, m). *la mesure* $\overline{m}$ *est complète et l'espace mesuré* $(E, \overline{T}, \overline{m})$ *s'appelle le complété de* (E, T, m). *La mesure* $\overline{m}$ *s'appelle la mesure complétée de la mesure m.*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 2.33.

On introduit maintenant la notion de mesure absolument continue, cette notion est intéressante en liaison avec les mesures de densité (définition 4.21). On montrera au chapitre 6 que, si (E, T, m) un espace mesuré σ-fini et μ une mesure finie sur T, alors μ est absolument continue par rapport à m si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à m (théorème 6.78). Cette notion de mesure absolument continue peut être sautée en première lecture.

Définition 2.29 (Mesure absolument continue, mesure étrangère)

Soient (E, T) *un espace mesurable, et m et μ des mesures (positives) sur* T.

1. *On dit que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m (et on note* $\mu << m$*) si pour tout* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$, *alors* $\mu(A) = 0$.
2. *On dit que la mesure μ est étrangère à la mesure m (et note* $\mu \perp m$*) s'il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $\mu(A^c) = 0$.

Proposition 2.30 *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* m *et* μ *des mesures (positives) sur* T *; on suppose de plus que la mesure* μ *est* σ*-finie. Alors il existe une mesure* μ_a *absolument continue par rapport à* m *et une mesure* μ_e *étrangère à* m *(et à* μ_a*) telle que* $\mu = \mu_a + \mu_e$.

DÉMONSTRATION – On suppose tout d'abord que μ est une mesure finie. On pose $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in T, m(A) = 0\}$. Il existe donc une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $m(A_n) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mu(A_n) \to \alpha$, quand $n \to +\infty$. On pose alors $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

On a $C \in T$, $0 \leq m(C) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) = 0$ (par σ-sous additivité de m), $\mu(C) \geq \mu(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par monotonie de μ) et donc, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, $\mu(C) \geq \alpha$. Enfin, la définition de α donne alors $\mu(C) = \alpha$. On a donc trouvé $C \in T$ tel que $m(C) = 0$ et $\mu(C) = \alpha$.

Pour $A \in T$, on pose $\mu_e(A) = \mu(A \cap C)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap C^c)$.

Il est clair que μ_e et μ_a sont des mesures sur T et que $\mu = \mu_e + \mu_a$. Comme $\mu_e(C^c) = 0$ et $\mu_a(C) = 0$, les mesures μ_a et μ_e sont étrangères. Comme $m(C) = 0$ et $\mu_e(C^c) = 0$, les mesures μ_e et m sont aussi étrangères. Il reste à montrer que μ_a est absolument continue par rapport à m.

Soit $B \in T$ tel que $m(B) = 0$. On veut montrer que $\mu_a(B) = 0$, c'est-à-dire que $\mu(B \cap C^c) = 0$. On pose $D = B \cap C^c$ et $F = C \cup D$. Comme $D \cap C = \emptyset$, on a

$$m(F) = m(C) + m(D) \leq m(C) + m(B) = 0 \text{ et } \mu(F) = \mu(C) + \mu(D) = \alpha + \mu(D).$$

Comme $m(F) = 0$, la définition de α donne que $\mu(F) \leq \alpha$. On a donc $\alpha + \mu(D) \leq \alpha$, d'où l'on déduit, comme $\alpha \in \mathbb{R}$ (et c'est ici que l'on utilise le fait que μ est une mesure finie), que $\mu(D) = 0$, c'est-à-dire $\mu_a(B) = 0$. On a bien ainsi montré que μ_a est absolument continue par rapport à m.

On considère maintenant le cas général où μ est σ-finie. Il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (voir la remarque 2.19).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $A \in T$, on pose

$$\mu^{(n)}(A) = \mu(A \cap E_n).$$

La mesure $\mu^{(n)}$ est donc finie sur T. Le raisonnement précédent donne donc l'existence de $\mu_a^{(n)}$ absolument continue par rapport à m et de $\mu_e^{(n)}$ étrangère à m (et à $\mu_a^{(n)}$) telle que $\mu^{(n)} = \mu_a^{(n)} + \mu_e^{(n)}$. On pose alors, pour $A \in T$:

$$\mu_e(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_e^{(n)}(A);\ \mu_a(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_a^{(n)}(A).$$

μ_e et μ_a sont bien des mesures sur T (voir l'exercice 4.2) et il est clair que $\mu = \mu_e + \mu_a$, μ_a absolument continue par rapport à m et μ_e étrangère à m (et à μ_a). ■

Il est parfois utile (surtout en théorie des probabilités, mais une telle question apparaît aussi dans le section 2.5 et dans le chapitre 7) de montrer l'unicité d'une mesure ayant

des propriétés données. La proposition suivante donne une méthode pour montrer une telle unicité (d'autres méthodes sont possibles, voir, par exemple, la proposition 5.8 dans le chapitre 5).

Proposition 2.31 (Condition suffisante pour l'égalité de deux mesures) *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* m, μ *deux mesures sur* T. *On suppose qu'il existe* $\mathcal{C} \subset T$ *tel que*

1. $\mathcal{C}$ *engendre* T,
2. $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie (c'est-à-dire* $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}$*),*
3. *Il existe une suite* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *telle que* $E_n \cap E_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$, $m(E_n) < \infty$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *et* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,
4. $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{C}$.

On a alors $m = \mu$ *(c'est-à-dire* $m(A) = \mu(A)$ *pour tout* $A \in T$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 2.22 qui découle de l'exercice 2.14 (consacré au théorème $\pi - \lambda$ de E. Dynkin).

2.4 Mesure signée

Définition 2.32 (Mesure signée) *Soit* (E, T) *un espace mesurable. On appelle mesure signée (sur* T*) une application* $m : T \to \mathbb{R}$ *vérifiant la propriété de* σ*-additivité, c'est-à-dire telle que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *telle que* $A_n \cap A_m = \emptyset$, *si* $n \neq m$,

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n). \tag{2.8}$$

Noter qu'une mesure signée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En prenant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans (2.8), on en déduit que $m(\emptyset) = 0$.

On peut aussi considérer des mesures à valeurs complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$). Dans ce cas, les parties réelles et imaginaires de ces mesures à valeurs complexes sont des mesures signées.

Dans toute la suite du cours, les mesures considérées seront en général positives, c'est-à-dire (cf. définition 2.13) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Lorsque l'on s'intéressera à des mesures prenant leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on précisera qu'il s'agit de mesures signées. Noter que les mesures signées ne vérifient pas, en général, les propriétés (2.3) et (2.4). Pour avoir un contre–exemple, il suffit de considérer une mesure signée m (non nulle) telle que $-m$ soit une mesure (positive).

Proposition 2.33 (Décomposition de Hahn d'une mesure signée) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* m *une mesure signée sur* T*. Alors, il existe deux mesures (positives) finies, notées* m^+ *et* m^-*, telles que :*

1. $m(A) = m^+(A) - m^-(A)$*, pour tout* $A \in T$.

2. Les mesures m^+ *et* m^- *sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe* $C \in T$ *tel que* $m^+(C) = 0$*, et* $m^-(E \setminus C) = 0$.

Une conséquence des propriétés ci-dessus est que $m^-(A) = -m(A \cap C)$ *et* $m^+(A) = m(A \cap C^c)$ *pour tout* $A \in T$.

De plus, la décomposition de m *en différence de deux mesures (positives) finies étrangères est unique. Elle s'appelle décomposition de Hahn de* m*.*

DÉMONSTRATION – La démonstration d'existence de m^+ et m^- est décomposée en trois étapes. Dans la première étape, on va montrer que, si $A \in T$, il existe $\tilde{A} \in T$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0.$$

Cette première étape nous permettra, dans l'étape 2, de montrer l'existence de $C \in T$ tel que $m(C) = \sup\{m(A), A \in T\}$; ceci montre, en particulier que $\sup\{m(A), A \in T\} < \infty$.

Enfin, dans l'étape 3, on pose $m^+(A) = m(A \cap C)$ et $m^-(A) = -m(A \cap C^c)$ (pour tout $A \in T$) et on remarque que m^+ et m^- sont des mesures finies, étrangères et telles que $m = m^+ - m^-$.

Étape 1. Soit $A \in T$, on montre, dans cette étape, qu'il existe $\tilde{A} \in T$ tel que $\tilde{A} \subset A$, $m(\tilde{A}) \geq m(A)$ et :

$$B \in T,\ B \subset \tilde{A} \ \Rightarrow\ m(B) \geq 0. \tag{2.9}$$

On commence par montrer, par récurrence sur n, l'existence d'une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T tels que :

1. $B_0 = A$,
2. $B_{n+1} \subset B_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
3. $m(B_n \setminus B_{n+1}) \leq \beta_n = \max\{\frac{\alpha_n}{2}, -1\}$ où $\alpha_n = \inf\{m(C), C \in T, C \subset B_n\}$.

On prend $B_0 = A$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, on suppose B_p connu pour $p \leq n$. On a

$$\alpha_n = \inf\{m(C), C \subset B_n\} \leq 0$$

(car $\emptyset \subset B_n$). Si $\alpha_n = -\infty$, il existe $C_n \in T$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n = -1.$$

Si $-\infty < \alpha_n < 0$, on a $\beta_n > \alpha_n$, il existe donc $C_n \in T$ tel que

$$C_n \subset B_n \text{ et } m(C_n) \leq \beta_n.$$

Si $\alpha_n = 0$, on prend $C_n = \emptyset$. Enfin, on prend $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$ et on obtient bien les propriétés désirées en remarquant que $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$.

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est-à-dire $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour $m > n$, on a donc $C_m \subset B_m \subset B_{n+1}$ et donc $C_m \cap C_n = \emptyset$ (car $B_{n+1} = B_n \setminus C_n$). Par σ-additivité de m, on en déduit

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n).$$

Comme $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n) \in \mathbb{R}$, la série de terme général $m(C_n)$ est convergente. On a donc

$$m(C_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \text{ et donc } \beta_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

(car $m(C_n) \leq \beta_n \leq 0$) et, finalement,

$$\alpha_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On pose maintenant

$$\tilde{A} = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

On a, bien sûr, $\tilde{A} \in T$ et $\tilde{A} \subset A$. On montre maintenant que $\tilde{A}$ vérifie (2.9). Soit $C \in T$, $C \subset \tilde{A}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \subset B_n$ et donc $m(C) \geq \alpha_n$. Quand $n \to +\infty$, on en déduit que $m(C) \geq 0$. ce qui donne bien (2.9).

Il reste à montrer que $m(\tilde{A}) \geq m(A)$. Comme $A = \tilde{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$ (et que cette union est "disjointe"), la σ-additivité de m donne que $m(A) = m(\tilde{A}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} m(C_n) \leq m(\tilde{A})$. Ce qui termine la première étape.

Étape 2. On pose $\alpha = \sup\{m(A), A \in T\}$ et on montre, dans cette étape, qu'il existe $C \in T$ tel que $m(C) = \alpha$.

Par définition d'une borne supérieure, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $m(A_n) \to \alpha$ quand $n \to +\infty$. Grâce à l'étape 1, on peut supposer (quitte à remplacer A_n par $\tilde{A_n}$ construit comme dans l'étape 1) que A_n vérifie (2.9), c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B \in T, \ B \subset A_n \ \Rightarrow \ m(B) \geq 0. \tag{2.10}$$

On pose $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On commence par montrer que $m(C) \geq m(A_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On peut écrire C comme une union "disjointe" :

$$C = A_m \cup (\bigcup_{n\neq m} C_{n,m}),$$

avec $C_{n,m} \in T$ et $C_{n,m} \subset A_n$ pour tout $m \neq n$. En effet, il suffit pour cela de construire par récurrence (sur n) la suite des $C_{n,m}$ en prenant pour $C_{n,m}$ l'intersection de C avec A_n à laquelle on retranche A_m et les $C_{n,m}$ précédemment construits.
Par σ-additivité de m, on a

$$m(C) = m(A_m) + \sum_{n\neq m} m(C_{n,m})$$

puis, comme $C_{n,m} \subset A_n$, on a, par (2.10), $m(C_{n,m}) \geq 0$. On en déduit $m(C) \geq m(A_m)$.

En faisant tendre m vers ∞, on a alors $m(C) \geq \alpha$ et donc, finalement $m(C) = \alpha$.

Étape 3. Construction de m^+ et m^-.

Pour construire m^+ et m^-, on utilise un élément C de T tel que $m(\mathrm{C}) = \alpha = \sup\{m(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathrm{T}\}$ (l'existence de C a été montré à l'étape 2). Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose :

$$m^+(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}),\ m^-(\mathrm{A}) = -m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c).$$

On a $m^+(\emptyset) = m^-(\emptyset) = 0$ (car $m(\emptyset) = 0$) et les applications m^+ et m^- sont des applications $\sigma-$additives de T dans $\mathbb{R}$ (car m est $\sigma-$additive). Pour montrer que m^+ et m^- sont des mesures finies, il suffit de montrer qu'elles prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ce que l'on montre maintenant.

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a, par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha = m(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + m(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{C}) \leq m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + \alpha.$$

On en déduit $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \geq 0$, ce qui prouve bien que $m^+(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+$. On a aussi, encore une fois par additivité de m et grâce à la définition de α,

$$\alpha \geq m(\mathrm{C}) + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) = \alpha + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c).$$

On en déduit $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) \leq 0$ et donc $m^-(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}_+$.

Les applications m^+ et m^- sont des mesures finies (noter que $m^+(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}) < \infty$ et $m^-(\mathrm{E}) = m(\mathrm{E} \cap \mathrm{C}^c) < \infty$). Elles sont étrangères car

$$m^+(\mathrm{C}^c) = m(\mathrm{C}^c \cap \mathrm{C}) = m(\emptyset) = 0 \text{ et } m^-(\mathrm{C}) = -m(\mathrm{C} \cap \mathrm{C}^c) = 0.$$

Enfin, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a, par σ-additivité de m :

$$m(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) = m^+(\mathrm{A}) - m^-(\mathrm{A}).$$

Ceci termine la démonstration de l'existence de m^+ et m^-.

Pour montrer l'unicité de cette décomposition de m, on suppose que μ et ν sont deux mesures finies étrangères telles que $m = \mu - \nu$. Comme elle sont étrangères, il existe $\mathrm{D} \in \mathrm{T}$ tel que $\mu(\mathrm{D}^c) = \nu(\mathrm{D}) = 0$. On montre alors que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a nécessairement :

$$\mu(\mathrm{A}) = \sup\{m(\mathrm{B});\ \mathrm{B} \in \mathrm{T},\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A}\}. \tag{2.11}$$

En effet, si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, on a $m(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{B}) - \nu(\mathrm{B}) \leq \mu(\mathrm{B}) \leq \mu(\mathrm{A})$ (par positivité de ν et monotonie de μ). Puis, en prenant $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{D}$, on a

$$m(\mathrm{B}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) - \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}) = \mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}^c) = \mu(\mathrm{A}).$$

Ceci prouve bien que (2.11) est vraie (et prouve que le sup est atteint pour $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{D}$). L'égalité (2.11) donne donc de manière unique μ en fonction de m. L'unicité de ν découle alors du fait que $\nu = \mu - m$. ∎

Remarque 2.34 Une conséquence de la proposition 2.33 est que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ apparaissant dans (2.8) est absolument convergente car (pour toute famille $(\mathrm{A}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$, si $n \neq m$) on a

$$\sum_{p=0}^{n} |m(\mathrm{A}_p)| \leq \sum_{p=0}^{n} m^+(\mathrm{A}_p) + \sum_{p=0}^{n} m^-(\mathrm{A}_p) \leq m^+(\mathrm{E}) + m^-(\mathrm{E}) < \infty.$$

En fait, la définition 2.32 donne directement que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n)$ apparaissant dans (2.8) est commutativement convergente (c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans

$\mathbb{R}$, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris). Elle est donc absolument convergente (voir l'exercice 2.34). Nous verrons plus loin que cette équivalence entre les séries absolument convergentes et les séries commutativement convergentes est fausse pour des séries à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

2.5 La mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens

Il serait bien agréable, pour la suite du cours, de montrer l'existence d'une application λ, définie sur tout $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, telle que l'image par λ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ soit la longueur de cet intervalle, et qui vérifie les propriétés (4.1) et (4.2). Malheureusement, on peut montrer qu'une telle application n'existe pas (voir les exercices 2.29 et 2.28). Le théorème suivant donne l'existence d'une telle application définie seulement sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (l'exercice 2.29 donne alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Cette application s'appelle la mesure de Lebesgue.

Théorème 2.35 (Carathéodory) *Il existe une et une seule mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ et appelée mesure de Lebesgue sur les boréliens, telle que $\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ telle que $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.*

Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce théorème. Pour la partie "existence" de ce théorème, nous donnons dans cette section une démonstration due à Carathéodory. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On définit $\lambda^*(A)$ par :

$$\lambda^*(A) = \inf_{(A_i)_{i\in\mathbb{N}}\in E_A} \sum_{i=1}^{n} \ell(A_i),$$

où E_A est l'ensemble des familles dénombrables d'intervalles ouverts dont l'union contient A, et $\ell(A_i)$ représente la longueur de l'intervalle A_i. On peut montrer (voir l'exercice 2.28) que l'application λ^* ainsi définie de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ n'est pas σ- additive (ce n'est donc pas une mesure).

On montre toutefois dans cette section que la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une mesure, qu'on note λ, mesure de Lebesgue. L'existence de la mesure de Lebesgue peut aussi être démontrée en utilisant un théorème plus général (de F. Riesz) que nous verrons dans un chapitre ultérieur (théorème 5.6 page 266).

Après la définition de λ^* et la démonstration de propriétés de λ^*, on donne la démonstration de la partie existence du théorème de Carathéodory (voir page 61). La partie unicité du théorème de Carathéodory (voir page 65) peut être démontrée en utilisant la régularité des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Théorème 2.43, très utile dans la suite du cours)

et d'un lemme classique sur les ouverts de $\mathbb{R}$ (lemme 2.44). Cette partie "unicité" peut aussi être démontrée, plus directement, en utilisant la proposition 2.31.

Définition 2.36 (Définition de λ^*) *Soit* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$*. On pose*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n); (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_A\},$$

avec $E_A = \{(I_n)_{n\in\mathbb{N}};\ I_n =]a_n, b_n[,\ -\infty < a_n \le b_n < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\}$ *et* $\ell(I) = b - a$ *si* $I =]a, b[,\ -\infty < a \le b < +\infty$*.*

Proposition 2.37 (Propriétés de λ^*) *L'application* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(définie dans la définition 2.36) vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$*,*

2. (Monotonie) $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$*, pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tel que* $A \subset B$*,*

3. (σ−sous additivité) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*, alors*

$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n),$$

4. $\lambda^*(]a, b[) = b - a$ *pour tout* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $-\infty < a < b < +\infty$*.*

DÉMONSTRATION – On remarque tout d'abord que $\lambda^*(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (car $\lambda^*(A)$ est la borne inférieure d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Propriété 1. Pour montrer que $\lambda^*(\emptyset) = 0$, il suffit de remarquer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_\emptyset$ avec $I_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $0 \le \lambda^*(\emptyset) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) = 0$.

Propriété 2. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \subset B$. On a $E_B \subset E_A$ et donc $\lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$.

Propriété 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de considérer le cas où $\lambda^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sinon, l'inégalité est immédiate).
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(I_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \in E_{A_n}$ telle que

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m}) \le \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On remarque alors que $(I_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est un recouvrement de A par des intervalles ouverts et donc que :

$$\lambda^*(A) \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}).$$

Noter que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \ell(I_{n,m}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_{\varphi(n)})$, où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ (cette somme ne dépend pas de la bijection choisie, voir le lemme 2.15 page 45). Avec le lemme 2.38 ci-dessous, on en déduit :

$$\lambda^*(A) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (\sum_{m\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,m})) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien, en faisant tendre ε vers 0 :

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n).$$

Propriété 4. Pour montrer la quatrième propriété, on commence par montrer que

$$\lambda^*([a,b]) = b-a,\ \forall a,b \in \mathbb{R}, a<b. \tag{2.12}$$

Soit donc $a,\ b\in\mathbb{R}$, $a<b$.
Comme $[a,b]\subset]a-\varepsilon,b+\varepsilon[$, pour tout $\varepsilon>0$, on a $\lambda^*([a,b])\leq b-a+2\varepsilon$. On en déduit $\lambda^*([a,b])\leq b-a$.
Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{[a,b]}$. Par compacité de $[a,b]$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $[a,b]\subset\bigcup_{p=0}^{n} I_p$. On peut alors construire (par récurrence) i_0, i_1, $\ldots$, $i_q\in\{0,\ldots,n\}$ tels que $a_{i_0}<a$, $a_{i_{p+1}}<b_{i_p}$ pour tout $p\in\{0,\ldots,q-1\}$, $b<b_{i_q}$. On en déduit que

$$b-a<\sum_{p=0}^{q} b_{i_p}-a_{i_p}\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n) \text{ et donc } b-a\leq\lambda^*([a,b]).$$

Ceci donne bien (2.12).
En remarquant que $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]\subset]a,b[\subset[a,b]$ pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, et $0<\varepsilon<(b-a)/2$, la monotonie de λ^* donne (avec (2.12)) que $\lambda^*(]a,b[)=b-a$ pour tout $a,b\in\mathbb{R},a<b$. La monotonie de λ^* donne alors aussi que

$$\lambda^*([a,b[)=\lambda^*(]a,b])=\lambda^*(]a,b[)=b-a \text{ pour tout } a,b\in\mathbb{R},a<b$$

, et enfin que

$$l^*(]-\infty,a])=\lambda^*(]-\infty,a[)=\lambda^*(]a,+\infty])=\lambda^*([a,+\infty])=+\infty \text{ pour tout } a\in\mathbb{R}.$$

. ■

Lemme 2.38 (Double série à termes positifs) *Soit $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}\subset\mathbb{R}_+$. Alors on a :*

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}=\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}).$$

DÉMONSTRATION – On pose

$$A=\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m} \text{ et } B=\sum_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_{n,m}),$$

Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$. On rappelle que $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a_{n,m}=\sum_{p\in\mathbb{N}} a_{\varphi(p)}$.
Pour tout $i,\ j\in\mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\{0,\ldots,i\}\times\{0,\ldots j\}\subset\{\varphi(0),\ldots,\varphi(n)\}$. Comme $a_{n,m}\geq 0$ pour tout (n,m), on en déduit que

$$A\geq\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)}\geq\sum_{n=0}^{i}(\sum_{m=0}^{j} a_{n,m})$$

et donc, en faisant tendre j puis i vers $+\infty$, que $A \geq B$. Un raisonnement similaire donne que $B \geq A$ et donc $A = B$. ■

On introduit maintenant la tribu de Lebesgue, sur laquelle on montrera que λ^* est une mesure.

Définition 2.39 (Tribu de Lebesgue) *On pose* $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$ *pour tout* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$*. On rappelle que* λ^* *est définie dans la définition 2.36 (et que* $E^c = \mathbb{R} \setminus E$*). Cet ensemble de parties de* $\mathbb{R}$ *noté* $\mathcal{L}$ *s'appelle tribu de Lebesgue (on montre dans la proposition 2.42 que* $\mathcal{L}$ *est bien une tribu).*

Remarque 2.40 On peut avoir une première idée de l'intérêt de la définition 2.39 en remarquant qu'elle donne immédiatement l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$. En effet, soit $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ tels que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et soit $A \subset \mathbb{R}$. On suppose que $E_1 \in \mathcal{L}$ et on utilise la définition de $\mathcal{L}$ avec $A \cap (E_1 \cup E_2)$, on obtient (car $E_1 \cap E_2 = \emptyset$) :

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) \\ &= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2).\end{aligned}$$

Par récurrence sur n, on a donc aussi

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i),$$

dès que $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$, $A, E_n \subset \mathbb{R}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

En particulier, en prenant $A = \mathbb{R}$, on obtient l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire

$$\lambda^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_i),$$

si $E_1, \ldots, E_{n-1} \in \mathcal{L}$ et $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 2.41 Pour tout $E, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a, par $\sigma-$sous additivité de λ^*,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39), il suffit donc de montrer que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Proposition 2.42 (Propriétés de $\mathcal{L}$) *$\mathcal{L}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ et $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. $\mathcal{L}$ et λ^* sont définies dans les définitions 2.36 et 2.39.*

DÉMONSTRATION – Il est immédiat que $\emptyset \in \mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}$ est stable par “passage au complémentaire”. On sait aussi que $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Il reste donc à démontrer que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et que la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure. Ceci se fait en deux étapes décrites ci-après.

Étape 1. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union finie et que, si $n \geq 2$ et $(E_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathcal{L}$ est telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors on a :

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_i), \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

(Cette dernière propriété donne l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ en prenant $A = \mathbb{R}$, cette propriété d'additivité a déjà été signalée dans la remarque 2.40.)

Par une récurrence facile, il suffit de montrer que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{L}$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ et de montrer la propriété (2.13) pour $n = 2$. Soit donc $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$. On pose $E = E_1 \cup E_2$. Pour montrer que $E \in \mathcal{L}$, il suffit de montrer (voir la remarque 2.41) que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c), \text{ pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Par σ−sous additivité de λ^* on a

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)) \leq \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2),$$

et donc

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \ &\leq \lambda^*(A \cap E_1) \\ &\quad + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).\end{aligned}$$

Comme $E_2 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A \cap E_1^c) = \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \lambda^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c).$$

Puis, comme $E_1 \in \mathcal{L}$, on a

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_1^c).$$

On en déduit

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \leq \lambda^*(A).$$

Ce qui prouve que $E \in \mathcal{L}$.

Pour montrer (2.13) avec $n = 2$ si $E_1, E_2 \in \mathcal{L}$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, il suffit de remarquer que (pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$)

$$\begin{aligned}\lambda^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) &= \lambda^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)) \\ &= \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1) + \lambda^*([(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2)] \cap E_1^c) \\ &= \lambda^*(A \cap E_1) + \lambda^*(A \cap E_2).\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $E_1 \in \mathcal{L}$.) Ceci termine l'étape 1.

Une conséquence de cette étape (et du fait que $\mathcal{L}$ est stable par passage au complémentaire) est que $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie.

Étape 2. On montre, dans cette étape, que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable et la restriction de λ^* à $\mathcal{L}$ est une mesure (ce qui termine la démonstration de la proposition 2.42).

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On veut montrer que $E \in \mathcal{L}$. On commence par remarquer que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec $F_0 = E_0$ et, par récurrence, pour $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus \bigcup_{p=0}^{n-1} F_p$. L'étape 1 nous donne que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ et, comme $F_n \cap F_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on peut utiliser (2.13). Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a donc :

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \tag{2.14}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \lambda^*(A \cap F_p) + \lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c). \tag{2.15}$$

En utilisant le fait que $E^c \subset (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c$ et la monotonie de λ^*, on a

$$\lambda^*(A \cap (\bigcup_{p=0}^{n} F_p)^c) \geq \lambda^*(A \cap E^c).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (2.15) et en utilisant la $\sigma-$sous additivité de λ^*, on en déduit alors que

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c).$$

Ceci prouve que $E \in \mathcal{L}$ (voir remarque 2.41) et donc que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Il reste à montrer que λ^* est une mesure sur $\mathcal{L}$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ telle que $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Par monotonie de λ^* on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(\bigcup_{p=0}^{n} E_p) \leq \lambda^*(E) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et donc, en utilisant l'additivité de λ^* sur $\mathcal{L}$ (démontrée à l'étape 1, voir (2.13) avec $A = E$), $\sum_{p=0}^{n} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E)$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p) \leq \lambda^*(E).$$

D'autre part, $\lambda^*(E) \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p)$, par $\sigma-$sous additivité de λ^*. On a donc

$$\lambda^*(E) = \sum_{p=0}^{+\infty} \lambda^*(E_p).$$

Ceci prouve que $\lambda^*_{|\mathcal{L}}$ est une mesure. ■

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "EXISTENCE" DU THÉORÈME *2.35* Pour montrer la partie "existence" du théorème 2.35, il suffit, grâce aux propositions 2.37 et 2.42, de montrer que $\mathcal{L}$ (définie dans la définition 2.39) contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour cela, il suffit

de montrer que $]a,+\infty[\in \mathcal{L}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (car $\{]a,+\infty[,\ a \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit donc $a \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{E} =]a,+\infty[$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$\lambda^*(\mathrm{A}) \geq \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c).$$

On peut supposer que $\lambda^*(\mathrm{A}) < +\infty$ (sinon l'inégalité est immédiate).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de $\lambda^*(\mathrm{A})$, il existe $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_{\mathrm{A}}$ telle que $\lambda^*(\mathrm{A}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_n) - \varepsilon$. Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{E} \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}))$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c \subset (\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c))$, la $\sigma-$sous additivité de λ^* donne

$$\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) \quad \text{et} \quad \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c).$$

Comme $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}$ et $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c$ sont des intervalles, la fin de la démonstration de la proposition 2.37 donne $\lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) = \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E})$ et $\lambda^*(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c) = \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c)$. On en déduit

$$\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) + \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_n)$$

(car $\ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}) + \ell(\mathrm{I}_n \cap \mathrm{E}^c) = \ell(\mathrm{I}_n)$) et donc $\lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}) + \lambda^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{E}^c) \leq \lambda^*(\mathrm{A}) + \varepsilon$. Quand $\varepsilon \to 0$ on trouve l'inégalité recherchée. On a bien montré que $\mathrm{E} \in \mathcal{L}$. ■

On va maintenant démontrer un théorème important dont on peut déduire, en particulier, la partie "unicité" du théorème 2.35.

Théorème 2.43 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que m est finie sur les compacts, c'est-à-dire que $m(\mathrm{K}) < +\infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$ (noter qu'un compact est nécessairement dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Alors, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tel que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. En particulier, on a donc, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m(\mathrm{A}) = \inf\{m(\mathrm{O}),\ \mathrm{O}$ ouvert contenant $\mathrm{A}\}$ et $m(\mathrm{A}) = \sup\{m(\mathrm{K}),\ \mathrm{K}$ compact inclus dans $\mathrm{A}\}$.*

DÉMONSTRATION – On appelle T l'ensemble des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ et $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ -\infty < a < b < +\infty\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ceci donnera $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On montre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$. Soit $-\infty < a < b < +\infty$ et $\mathrm{A} =]a,b[$.

Pour tout $n \geq n_0$ avec n_0 tel que $(2/n_0) < b - a$ on a :

$$[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset \mathrm{A} \subset]a,b[.$$

Pour $n \geq n_0$, on pose $\mathrm{B}_n =]a, a + (1/n)[\cup]b - (1/n), b[$. La suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ est une suite décroissante et $\bigcap_{n\geq n_0} \mathrm{B}_n = \emptyset$. Comme m est finie sur les compacts, on a $m(\mathrm{B}_n) \leq m([a,b]) < +\infty$. En utilisant la continuité décroissante de m (proposition 2.27), on a donc :

$$m(]a,b[\setminus [a + (\frac{1}{n}), b - \frac{1}{n}]) = m(]a, a + \frac{1}{n})[\cup]b - \frac{1}{n}, b[) = m(\mathrm{B}_n) \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ en prenant n assez grand on a $m(B_n) \le \varepsilon$. En prenant $O = A$ et $F = [a + (1/n), b - (1/n)]$, on a bien O ouvert, F fermé, $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$, ce qui prouve que $]a, b[\in T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On veut montrer que $A \in T$. On va commencer par traiter le cas (simple) où $m(A) < +\infty$ puis le cas (plus difficile) où $m(A) = +\infty$.

Premier cas. On suppose que $m(A) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe O_n ouvert et F_n fermé tel que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $m(O_n \setminus F_n) \le (\varepsilon/2^n)$. On pose

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ et } \tilde{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

On a $\tilde{F} \subset A \subset O$, $m(O \setminus \tilde{F}) \le 2\varepsilon$, car $(O \setminus \tilde{F}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \setminus F_n)$, et O ouvert mais $\tilde{F}$ n'est pas nécessairement fermé...

Cependant, puisque $m(A) < +\infty$, on a aussi $m(\tilde{F}) < +\infty$. Par continuité croissante de m (appliquée à la suite $(\bigcup_{p=0}^{n} F_p)_{n\in\mathbb{N}}$), on a $m(\bigcup_{p=0}^{n} F_p) \to m(\tilde{F})$, quand $n \to +\infty$, d'où (puisque $m(\tilde{F}) < +\infty$) $m(\tilde{F}) - m(\bigcup_{p=0}^{n} F_p) \to 0$. On prend alors $F = \bigcup_{p=0}^{N} F_p$ avec N assez grand pour que $m(\tilde{F} \setminus F) = m(\tilde{F}) - m(F) \le \varepsilon$. On a bien $F \subset A \subset O$, O ouvert, F fermé et, comme $(O \setminus F) = (O \setminus \tilde{F}) \cup (\tilde{F} \setminus F)$, on a $m(O \setminus F) = m(O \setminus \tilde{F}) + m(\tilde{F} \setminus F) \le 3\varepsilon$, ce qui prouve que $A \in T$.

Deuxième cas. On suppose maintenant que $m(A) = +\infty$ (et le raisonnement précédent n'est plus correct si $m(\tilde{F}) = +\infty$). On raisonne en trois étapes :

1. Soit $p \in \mathbb{Z}$. On remarque d'abord que $A_n \cap [p, p+1[\in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe O ouvert et F fermé tel que $F \subset A_n \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc :
$$F_k = F \cap [p, p+1-\frac{1}{k}] \subset A_n \cap [p, p+1[\subset O_k = O \cap]p - \frac{1}{k}, p+1[.$$
On a F_k fermé, O_k ouvert et $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[$. On en déduit :
$$m(O_k \setminus F_k) \le \varepsilon + m(]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[).$$
Or la continuité décroissante de m donne que $m((]p - \frac{1}{k}, p[\cup]p+1-\frac{1}{k}, p+1[) \to 0$ quand $k \to +\infty$ (on utilise ici le fait que $m([p-1, p+1]) < +\infty$ car m est finie sur les compacts). Il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m(O_k \setminus F_k) \le 2\varepsilon$, ce qui donne bien que $A_n \cap [p, p+1[\in T$.
2. Comme $m(A \cap [p, p+1[) < +\infty$, on peut maintenant utiliser le premier cas avec $A \cap [p, p+1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap [p, p+1[)$. Il donne que $A \cap [p, p+1[\in T$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
3. On montre enfin que $A \in T$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe un ouvert O_p et un fermé G_p tel que $G_p \subset A \cap [p, p+1[\subset O_p$ et $m(O_p \setminus G_p) \le \varepsilon/(2^{|p|})$. On prend

$O = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} O_p$ et $F = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} G_p$. On obtient $F \subset A \subset O$, $m(O \setminus F) \le 3\varepsilon$ et O est ouvert. Il reste à montrer que F est fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ tel que $x_n \to x$ (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to +\infty$. On veut montrer que $x \in F$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]p-1, p+1[$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in]p-1, p+1[$ pour tout $n \ge n_0$. Comme $x_n \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} G_q$ et que $G_q \subset [q, q+1[$ pour tout q, on a donc $x_n \in G_p \cup G_{p-1}$ pour tout $n \ge n_0$. Comme $G_p \cup G_{p-1}$ est fermé, on en déduit que $x \in G_p \cup G_{p-1} \subset F$ et donc que F est fermé.

Ceci montre bien que $A \in T$ et termine la démonstration du fait que T est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a donc bien montré que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$.

On montre maintenant que $m(A) = \inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque d'abord que la monotonie d'une mesure donne

$$m(A) \le \inf\{m(O), \text{O ouvert contenant A}\}.$$

Puis, l'inégalité inverse est immédiate si $m(A) = +\infty$. Enfin, si $m(A) < +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. On a donc $O \setminus A \subset O \setminus F$ et donc (par monotonie de m)

$$m(O \setminus A) \le \varepsilon \text{ et } m(O) = m(A) + m(O \setminus A) \le m(A) + \varepsilon.$$

On a donc trouvé un ouvert O contenant A tel que $m(O) - \varepsilon \le m(A)$. On en déduit que $\inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\} \le m(A)$ et finalement que $m(A) = \inf\{m(O)$, O ouvert contenant A$\}$.

De manière semblable, on montre aussi que $m(A) = \sup\{m(K), \text{K compact, } K \subset A\}$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ici aussi, on commence par remarquer que la monotonie d'une mesure donne

$$m(A) \ge \sup\{m(K), \text{K compact}, K \subset A\}.$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe F fermé tel que $F \subset A$ et $m(A \setminus F) \le \varepsilon$. Si $m(A) = +\infty$, on en déduit que $m(F) = +\infty$ et donc que $m(K_n) \uparrow +\infty$ quand $n \to +\infty$ (par continuité croissante de m) avec $K_n = F \cap [-n, n]$. Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\sup\{m(K), \text{K compact inclus dans A}\} = +\infty = m(A).$$

Si $m(A) < +\infty$, on a $m(A) \ge m(F) \ge m(A) - \varepsilon$ et donc, pour n assez grand (toujours par continuité croissante de m),

$$m(K_n) \ge m(F) - \varepsilon \ge m(A) - 2\varepsilon \text{ avec } K_n = F \cap [-n, n].$$

Comme K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que ε est arbitraire, on en déduit que $\sup\{m(K)$, K compact inclus dans A$\} \ge m(A)$ et donc, finalement,

$$m(A) = \sup\{m(K), \text{K compact}, K \subset A\}.$$

■

Pour démontrer la partie "unicité" du théorème 2.35 avec le théorème 2.43 on a aussi besoin du petit lemme suivant (différent du lemme 2.11 car dans le lemme 2.44 on

demande que les intervalles ouverts soient disjoints et on ne demande plus qu'ils soient bornés).

Lemme 2.44 (Ouverts de $\mathbb{R}$) *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$*, alors* O *est une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux, c'est-à-dire qu'il existe* $(I_n)_{n\in J}$ *tel que* $J \subset \mathbb{N}$*,* I_n *est un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *pour tout* n*,* $I_n \cap I_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$ *et* $O = \bigcup_{n\in J} I_n$.

DÉMONSTRATION – Pour $x \in O$ on pose

$$O_x = \{y \in O; I(x,y) \subset O\}, \text{ avec } I(x,y) = \{tx + (1-t)y, t \in [0,1]\}$$

(on a donc $I(x,y) = [x,y]$ ou $[y,x]$). On remarque que $O = \bigcup_{x\in O} O_x$ et que O_x est, pour tout $x \in O$, un intervalle ouvert (c'est l'intervalle $]\inf O_x, \sup O_x[$, avec $\inf O_x$, $\sup O_x \in \overline{\mathbb{R}}$). Il est aussi facile de voir que, pour tous x, $y \in O$, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ implique que $O_x = O_y$. On peut trouver $A \subset O$ tel que $O = \bigcup_{x\in A} O_x$ et $O_x \cap O_y = \emptyset$ si x, $y \in A$, $x \neq y$. Comme $O_x \neq \emptyset$ pour tout $x \in A$, on peut donc construire une application de A dans $\mathbb{Q}$ en choisissant pour chaque $x \in A$ un rationnel de O_x (ce qui est possible car tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un rationnel). Cette application est injective car

$$O_x \cap O_y = \emptyset \text{ si } x, y \in A, x \neq y.$$

L'ensemble A est donc au plus dénombrable, ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Remarque 2.45 Dans la démonstration du lemme 2.44, O_x est la composante connexe de x. Le lemme 2.44 consiste donc à remarquer qu'un ouvert est réunion de ses composantes connexes, que celles ci sont disjointes deux à deux et sont des ouverts connexes et donc des intervalles ouverts (car un connexe dans $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle).

DÉMONSTRATION DE LA PARTIE "UNICITÉ" DU THÉORÈME *2.35*

On a construit une mesure, notée λ, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\lambda(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supposons que m soit aussi une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On veut montrer que $\lambda = m$ (sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Nous le montrons ici avec deux méthodes différentes, utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31.

Première méthode, avec le théorème 2.43 sur la régularité d'une mesure finie sur les compacts. En utilisant le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44) et les propriétés de σ-additivité de λ et de m, on montre que $\lambda(O) = m(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m et pour λ, car m et λ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts), on obtient $\lambda(A) = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *i.e.* $m = \lambda$.

Deuxième méthode, avec la proposition 2.31. On utilise la proposition 2.31 avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{C} = \{]a,b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$. On sait que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On prend maintenant $F_n =]n, n+1]$ pour n

$\in \mathbb{Z}$. La famille $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Pour $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, on a, par continuité décroissante de m,

$$\begin{aligned} m(]a,b]) &= \lim_{p\to+\infty} m(]a,b+\frac{1}{p}[) \\ &= \lim_{p\to+\infty} (b-a+\frac{1}{p}) \\ &= b-a \\ &= \lambda(]a,b]). \end{aligned}$$

On a donc $m = \lambda$ sur $\mathcal{C}$ (et $m(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$). On peut donc appliquer la proposition 2.31. Elle donne $\lambda = m$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.46 Nous avons vu que la mesure de Lebesgue, notée λ, est régulière. Ceci ne donne pas, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'égalité de la mesure de A avec la mesure de son intérieur ou de son adhérence. Il suffit, pour s'en convaincre, de prendre, par exemple, $A = \mathbb{Q}$. On a alors $\lambda(A) = 0$ (voir la remarque 2.49) et $\lambda(\overline{A}) = +\infty$.

Remarque 2.47 Nous avons donc, dans cette section, construit une application, notée λ^*, de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette application n'est pas une mesure mais nous avons montré que la restriction de λ^* à la tribu de Lebesgue, notée $\mathcal{L}$, est une mesure. Puis, nous avons démontré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ et obtenu ainsi, en prenant la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la mesure que nous cherchions. On peut se demander toutefois quelle est la différence entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Du point de vue des cardinaux, cette différence est considérable car $\mathrm{card}(\mathcal{L}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ alors que $\mathrm{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$ mais du point de vue de l'intégration, la différence est dérisoire, comme nous pourrons le voir avec l'exercice 4.19 (plus complet que l'exercice 2.33) car l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda^*_{|\mathcal{L}})$ est simplement le complété de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R})})$.

On donne maintenant une propriété, spécifique à la mesure de Lebesgue, qui est à la base de toutes les formules de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 2.48 (Invariance par translation "généralisée") *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$. *Pour* $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, *on note* $\alpha A + \beta = \{\alpha x + \beta,\ x \in A\}$. *On a alors :*

1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *implique* $\alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

2. $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 1$, *cette propriété s'appelle* "invariance par translation de λ".

DÉMONSTRATION – Pour la première partie de la proposition, on pose $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \alpha A + \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On montre facilement que T est une tribu contenant les intervalles ouverts, on en déduit que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour la deuxième partie, on pose, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m_1(A) = \lambda(\alpha A + \beta)$ et $m_2(A) = |\alpha|\lambda(A)$. Il est facile de voir que m_1 et m_2 sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les bornés, et qu'elles sont égales sur l'ensemble des intervalles ouverts. On raisonne alors comme dans la démonstration de la partie "unicité" du théorème 2.35, en utilisant le théorème 2.43 ou la proposition 2.31. Par exemple, en utilisant le lemme 2.44 et les propriétés de σ-additivité de m_1 et de m_2, on montre que $m_1(O) = m_2(O)$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Puis, en utilisant la dernière assertion du théorème de régularité (qui s'applique pour m_1 et pour m_2), on obtient $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $\lambda(\alpha A + \beta) = |\alpha|\lambda(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

Remarque 2.49 La mesure de Lebesgue est diffuse (c'est-à-dire que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Donc, si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, on a $\lambda(D) = 0$. Ainsi,

$$\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

La réciproque est fausse. On construit par exemple un ensemble (dit "ensemble de Cantor", K, qui est une partie compacte non dénombrable de [0,1], vérifiant $\lambda(K) = 0$, voir exercice 2.32).

Définition 2.50 (Mesure de Lebesgue sur un borélien de $\mathbb{R}$) *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(ou, plus généralement,* $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $T = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ B \subset I\}$ *(on peut montrer que* $T = \mathcal{B}(I)$*, où* I *est muni de la topologie induite par celle de* $\mathbb{R}$*, voir l'exercice 2.3 page 75). Il est facile de voir que* T *est une tribu sur* I *et que la restriction de* λ *(définie dans le théorème 2.35) à* T *est une mesure sur* T*, donc sur les boréliens de* I *(voir l'exercice 2.17 page 91). On note toujours par* λ *cette mesure.*

2.6 Indépendance et probabilité conditionnelle

2.6.1 Probabilité conditionnelle

Commençons par expliquer la notion de probabilité conditionnelle sur l'exemple du lancer de dé. On se place dans le modèle équiprobable : soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T = \mathcal{P}(E)$ et p la probabilité définie par $p(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $\forall x \in E$. La probabilité de l'événement A "obtenir 6" est $\frac{1}{6}$. Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la chance d'obtenir un 6, alors que l'on sait déjà que le résultat est pair (événement $B = \{2, 4, 6\}$). Intuitivement, on a envie de dire que la "chance" d'obtenir un 6 est alors $\frac{1}{\mathrm{card} B} = \frac{1}{3}$.

Définition 2.51 (Probabilité conditionnelle) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $A, B \in T$.

Si $p(B) \neq 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B *(on dit aussi probabilité de* A *par rapport à* B*), notée* $p(A|B)$*, est définie par* $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Si $p(\mathrm{B}) = 0$ *la probabilité conditionnelle de* A *par rapport à* B*, notée* $p(\mathrm{A}|\mathrm{B})$*, n'est pas définie. C'est un nombre arbitraire entre* 0 *et* 1.

De cette définition on déduit la formule de Bayes : soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}$, alors :

$$p(\mathrm{B})p(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \tag{2.16}$$

Remarque 2.52 Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $p(\mathrm{A}) \neq 0$. Alors l'application $p_{\mathrm{A}} : \mathrm{T} \to [0, 1]$ définie par :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}, \forall \mathrm{B} \in \mathrm{T}$$

est une probabilité sur T. On dit que "la masse de p_{A} est concentrée en A" : on a en effet : $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 0$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. On a aussi $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 1$.

Remarque 2.53 *Voici un corollaire immédiat de la relation 2.16. Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *est un espace probabilisé et* $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *une partition de* E *telle que* $p(\mathrm{C}_n) \neq 0$*. On a alors, pour tout* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*,*

$$p(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(\mathrm{C}_n)p(\mathrm{A}|\mathrm{C}_n).$$

2.6.2 Evénements indépendants, tribus indépendantes

Définition 2.54 (Indépendance de deux événements)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ *un espace probabilisé. On dit que deux événements* A *et* B *sont indépendants si* $p(\mathrm{A})p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Remarque 2.55 Lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, il y a des événements qui semblent *a priori* indépendants, c'est-à-dire que la réalisation de l'un semble n'avoir aucune influence sur la réalisation de l'autre. On choisira alors, pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte cette indépendance. Attention toutefois, pour une probabilité p donnée, deux événements peuvent être indépendants alors qu'ils ne paraissent pas intuitivement indépendants, voir à ce sujet l'exercice 9.15 page 575 sur les variables aléatoires indépendantes.

Exemple 2.56 Prenons comme exemple le lancer simultané de deux dés : *a priori*, il parait raisonnable de supposer que les résultats obtenus pour chacun des deux dés n'influent pas l'un sur l'autre, et on va donc chercher une probabilité qui respecte cette indépendance. L'univers des possibles est ici

$$\mathrm{E} = \{(i, j), 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}.$$

Les résultats de chaque lancer simultané des deux dés étant équiprobables, on a donc envie de définir, pour $A \in \mathcal{P}(E)$, $p(A) = \frac{\text{card} A}{36}$. Voyons maintenant si deux événements *a priori* indépendants sont indépendants pour cette probabilité. Considérons par exemple l'événement A : "obtenir un double 6" ; on peut écrire : $A = B \cap C$, où B est l'événement "obtenir un 6 sur le premier dé" et C l'événement "obtenir un 6 sur le deuxième dé". On doit donc vérifier que : $p(A) = p(B)p(C)$. Or $B = \{(6, j), 1 \leq j \leq 6\}$ et $C = \{(i, 6), 1 \leq i \leq 6\}$. On a donc $p(B) = p(C) = \frac{1}{6}$, et on a bien $p(A) = p(B)p(C)(= \frac{1}{36})$.

On généralise la notion d'indépendance de deux événements en introduisant la notion d'indépendance de tribus.

Définition 2.57 (Indépendance des tribus) *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de tribus incluses dans* T.

1. *Soit* $N > 1$. *On dit que les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes (on dit aussi que la suite* $T_1, \ldots, T_N$ *est indépendante) si pour toute famille* $(A_1, \ldots, A_N)$ *d'événements tels que* $A_k \in T_k$ *pour* $k = 1, \ldots, N$ *on a :* $p(\bigcap_{k=1}^{N} A_k) = p(A_1)p(A_2) \ldots p(A_N)$.
2. *On dit que la suite* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est indépendante (ou que les tribus* $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ *sont indépendantes) si pour tout* $N \geq 1$, *les* N *tribus* T_k, $k = 1, \ldots, N$, *sont indépendantes.*

On peut facilement remarquer que si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé (E, T, p), ils sont indépendants (au sens de la définition 2.54) si et seulement si les tribus $T_A = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ et $T_B = \{\emptyset, E, B, B^c\}$ sont indépendantes (voir l'exercice 3.19). Par contre, si A, B et C sont trois événements d'un espace probabilisé (E, T, p), le fait que $p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C)$ n'implique pas que les tribus T_A, T_B et T_C sont indépendantes (il suffit, par exemple, de considérer le cas où $C = \emptyset$ et $A = B$ avec $p(A) \in]0, 1[$). La bonne notion d'indépendance est la notion d'indépendance de tribus et c'est par elle qu'on définit l'indépendance de plusieurs événements (définition 2.58).

Définition 2.58 (Evénements indépendants) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *des événements, on dit que les* N *événements* $(A_k)_{k=1,\ldots,N}$ *sont indépendants si les* N *tribus engendrées par les événements* A_k, $k = 1 \ldots, N$ *(c'est-à-dire les* N *tribus définies par* $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$ *pour* $k = 1 \ldots, N$*) sont indépendantes.*

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements $A_1, \ldots, A_N$ sont indépendants, c'est-à-dire que les tribus engendrées par $A_1, \ldots, A_N$

sont indépendantes) si et seulement si

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1,\dots,N\},$$

voir l'exercice 3.19. Nous terminons ce paragraphe par une proposition sur les tribus indépendantes. Cette proposition utilise la tribu engendrée par une famille de tribus, ce que nous definissons maintenant.

Définition 2.59 (Tribu engendrée par une famille de tribus) *Soient* E *un ensemble et* I *un ensemble d'indices. Soit* $(T_k)_{k\in I}$ *une famille de tribus de* E. *La tribu engendrée par la famille* $(T_k)_{k\in I}$ *est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant, pour tout* k*, la tribu* T_k. *Cette tribu est notée* $\sigma((T_k)_{k\in I})$ *ou* $\tau((T_k)_{k\in I})$.

Proposition 2.60 *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,\dots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *La tribu* T_0 *est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus* $T_1,\dots,T_N$ *(cette tribu est définie dans la définition 2.59).*
2. *(Généralisation) Soit* $N > 1$, $q > 1$, $n_0,\dots,n_q$ *tel que* $n_0 = 0$, $n_i \le n_{i+1}$ *(pour* $i = 0,\dots,q-1$*),* $n_q = N$ *et* $(T_k)_{k\in\{0,\dots N\}}$ *une suite indépendante de tribus incluses dans* T. *Pour* $i = 1,\dots,q$*, on note* τ_i *la tribu engendrée par les tribus* T_n *pour* $n = n_{i-1},\dots,n_i$. *Alors, les tribus* $\tau_1,\dots,\tau_q$ *sont indépendantes.*

DÉMONSTRATION – On montre tout d'abord le premier item de la proposition. On note S la tribu engendrée par les tribus $T_1,\dots,T_N$. Comme S est la plus petite tribu contenant les tribus T_k ($k = 1,\dots,N$), elle est incluse dans T. On veut montrer que T_0 et S sont indépendantes, c'est-à-dire que $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $A \in T_0$ et tout $B \in S$. Pour le montrer, on va utiliser la proposition 2.31 (donnant l'unicité d'une mesure). Soit $A \in T_0$, on définit les mesures m et μ sur T en posant :

$$m(B) = p(A\cap B),\ \mu(B) = p(A)p(B),\ \text{pour } B \in T,$$

et on pose :

$$\mathcal{C} = \{\bigcap_{k=1}^{N} A_k,\ A_k \in T_k \text{ pour } k = 1,\dots,N\}.$$

Pour $B \in \mathcal{C}$, on a $B = \bigcap_{k=1}^{N} A_k$ avec $A_k \in T_k$ avec $k = 1,\dots,N$. On a donc, en utilisant l'indépendance des tribus $T_0, T_1,\dots,T_N$,

$$m(B) = p(A\cap B) = p(A)p(A_1)p(A_2)\dots p(A_N) = p(A)p(B) = \mu(B).$$

On a donc $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection et que $E \in \mathcal{C}$, la proposition 2.31 nous donne $m = \mu$ sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Comme cette tribu contient toutes les tribus T_k ($k = 1,\dots,N$), elle contient aussi S (en fait, elle est égale à S). On a donc bien montré que $p(A\cap B) = p(A)p(B)$ pour tout $B \in S$ et pour tout $A \in T_0$.

Pour montrer le deuxième item (qui est une généralisation du premier), il suffit de faire une récurrence finie de q étapes et d'utiliser la technique précédente. Par exemple, pour $q = 2$ la technique précédente donne :

$$p((\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k) \cap B_2) = p(\bigcap_{k=0}^{n_1} A_k)p(B_2),$$

pour $A_k \in T_k$, $k = 0, \ldots, n_1$ et $B_2 \in \tau_2$. Puis en reprenant la technique précédente, on montre $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1)p(B_2)$ pour $B_1 \in \tau_1$ et $B_2 \in \tau_2$, ce qui donne bien l'indépendance de τ_1 et τ_2. ■

2.6.3 Probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$

Une probabilité est définie sur un espace probabilisable. Très souvent, on ne connaît du problème aléatoire que l'on cherche à modéliser ni l'ensemble E (“univers des possibles”) ni la tribu T (ensemble des événements) ni la probabilité p. Par contre, on connaît une “image” de la probabilité p par une application (dite mesurable, voir chapitre suivant) X de E dans $\mathbb{R}$. On travaille alors avec l'espace beaucoup plus sympathique (car mieux défini...) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_X)$, ou p_X est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que les probabilistes appellent “loi de probabilité” (elle dépend de p et de l'application X).

Nous donnons maintenant quelques notions propres aux lois de probabilités (ou probabilités définies sur les boréliens de $\mathbb{R}$), ainsi que quelques exemples concrets utilisés dans la représentation de phénomènes aléatoires.

Théorème 2.61 (Fonction de répartition) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de la probabilité p la fonction* F*, définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par :* $F(t) = p(]-\infty, t])$.

La fonction F *est croissante et continue à droite. De plus, on a* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$.

DÉMONSTRATION – La croissance de F est une conséquence de la monotonie de p (proposition 2.27). En effet, soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On a $]-\infty, a] \subset]-\infty, b]$ et donc, par monotonie de p, $F(a) = p(]-\infty, a]) \leq p(]-\infty, b]) = F(b)$, ce qui montre bien la croissance de F.

Pour montrer que F est continue à droite, on utilise la continuité décroissante de p (proposition 2.27). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow a$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$). On remarque que

$$]-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, a_n],\ ]-\infty, a_{n+1}] \subset]-\infty, a_n] \text{ et } p(]-\infty, a_n]) < +\infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La continuité décroissante de p donne alors

$$\mathrm{F}(a_n) = p(]-\infty, a_n]) \to p(]-\infty, a]) = \mathrm{F}(a) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci montre la continuité à droite de F.

Pour montrer que $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{F}(a) = 1$, on utilise la continuité croissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \uparrow +\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \to +\infty$). On pose $\mathrm{A}_n =]-\infty, a_n]$. On a $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = \mathbb{R}$. Par continuité croissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$\mathrm{F}(a_n) = p(\mathrm{A}_n) \to p(\mathbb{R}) = 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to+\infty} \mathrm{F}(a) = 1$.

Pour montrer que $\lim_{a\to-\infty} \mathrm{F}(a) = 0$, on utilise la continuité décroissante de p. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $a_n \downarrow -\infty$ (c'est-à-dire $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$). On pose $\mathrm{B}_n =]-\infty, a_n]$. On a $\mathrm{B}_{n+1} \subset \mathrm{B}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(\mathrm{B}_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \emptyset$. Par continuité décroissante de p (Proposition 2.27), on a donc

$$\mathrm{F}(a_n) = p(\mathrm{B}_n) \to p(\emptyset) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci prouve que $\lim_{a\to-\infty} \mathrm{F}(a) = 0$. ■

Le théorème 2.61 a une réciproque que nous énonçons dans le théorème 2.62.

Théorème 2.62 (Fonction de répartition et probabilité) *Soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante, continue à droite et telle que*

$$\lim_{t\to-\infty}, \mathrm{F}(t) = 0 \textit{ et } \lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = 1.$$

Alors, il existe une unique probabilité p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que F *soit la fonction de répartition de p.*

La démonstration du théorème 2.62 n'est pas faite ici car ce théorème est essentiellement contenu dans le théorème 2.63 que nous donnons maintenant.

Théorème 2.63 (Lebesgue-Stieltjes)

1. *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (on dit "localement finie"). Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction* F *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $\mathrm{F}(t) = m(]a, t])$ *si* $t \geq a$ *et* $\mathrm{F}(t) = -m(]t, a])$ *si* $t \leq a$*. Alors, la fonction* F *est continue à droite et croissante.*
2. *Réciproquement, soit* F *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, croissante et continue à droite. Alors,il existe une unique mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, on ait* $m(]a, b]) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$*. Cette mesure s'appelle la mesure de Lebesgue-Stieltjes associée à* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item est essentiellement la même que celle du théorème 2.61. Elle n'est pas détaillée ici.

Pour démontrer le deuxième item, on introduit l, application définie de l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$) par : $l(]a,b]) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. La démonstration du fait qu'il existe un prolongement unique de cette application en une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est très voisine à celle du théorème de Carathéodory (théorème 2.35). Elle n'est pas détaillée ici. ■

Donnons, pour clore ce chapitre, quelques exemples de lois de probabilités, c'est-à-dire de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$, et leurs fonctions de répartition associées.

Définition 2.64 (Loi de probabilité discrète) *Soit p une loi de probabilité. On dit que p est discrète si elle est purement atomique. L'ensemble de ses atomes $\mathcal{A}$ est nécessairement dénombrable (voir l'exercice 2.23). La probabilité p s'écrit alors*

$$p = \sum_{a\in\mathcal{A}} p(\{a\})\delta_a,$$

où δ_a désigne la mesure de Dirac en a., définie par (2.2) *La fonction de répartition de la probabilité p est définie par :*

$$\mathrm{F}(t) = \sum_{a\in\mathcal{A}, a\le t} p(\{a\}).$$

Exemple 2.65 (Exemples de lois discrètes) *Donnons quelques exemples de probabilités discrètes, p, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}$ l'ensemble (dénombrable) de leurs atomes.*

— *La loi uniforme discrète :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_\mathrm{N}\}$, $p(\{a_i\}) = \dfrac{1}{\mathrm{N}}$

— *La loi binomiale :* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A} = \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{C}_\mathrm{N}^k \mathrm{P}^k (1-\mathrm{P})^{\mathrm{N}-k}$

— *La loi de Pascal :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P} \in]0,1[$, $p(\{k\}) = \mathrm{P}(1-\mathrm{P})^{k-1}$

— *La loi de Poisson à paramètre λ :* $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $p(\{k\}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Définition 2.66 (Loi continue) *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On dit que p est continue si sa fonction de répartition est continue.*

Exemple 2.67 (Exemple de loi continue) La plupart des exemples de probabilités continues provient de ce qu'on appelle les mesures de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, pour lesquelles on a besoin de la notion d'intégrale de Lebesgue qu'on

n'a pas encore introduite. On peut toutefois déjà citer l'exemple de la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$: Soient $-\infty < a < b < +\infty$; pour $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\lambda(\mathrm{A} \cap [a,b])}{b-a}.$$

On vérifie facilement que p est une probabilité appelée probabilité uniforme sur $[a,b]$.

2.7 Exercices

2.7.1 Tribus

Exercice 2.1 (Caractérisation d'une tribu) Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et telle que $\emptyset \in \mathrm{T}$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.

   Corrigé – *On a bien* $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ *car* $\mathrm{E} = \emptyset^c$ *et* T *stable par passage au complémentaire. Il reste à montrer que* T *est stable par intersection dénombrable. Soit* $(\mathrm{A}_n) \subset \mathrm{T}$*, on a* $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n^c \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) et donc* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *(car* T *est stable par passage au complémentaire).*

2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?

   Corrigé – *Si* E *est fini, l'ensemble des parties finies de* E *est une tribu, c'est la tribu* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.
   Si E *est infini, l'ensemble des parties finies de* E *n'est pas une tribu. Il suffit par exemple de remarquer que* E *n'est pas une partie finie (et une tribu sur* E *contient toujours* E *comme élément).*

Exercice 2.2 (Tribu engendrée) Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{T}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de tribus sur* I *(*I *est un ensemble quelconque). On pose* $\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{E}\,;\ \mathrm{A} \in \mathrm{T}_i \text{ pour tout } i \in \mathrm{I}\}$ *(*T *est bien l'intersection des tribus* T_i*,* $i \in \mathrm{I}$*). On montre que* T *est une tribu :*

   (a) On a $\emptyset \in \mathrm{T}$ *car* $\emptyset \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

   (b) On remarque que T *est stable par passage au complémentaire car, si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{T}$*, on a* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$*, et donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *(car* T_i *est stable par passage au complémentaire), donc* $\mathrm{A}^c \in \mathrm{T}$.

   (c) On remarque enfin que T *est stable par union dénombrable car, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$*, on a* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *(car* T_i *est stable par union dénombrable), donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

D'après l'exercice 2.1, on en déduit que T *est une tribu.*

2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On note $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$ (une partie de E appartient donc à $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ si et seulement si elle appartient à toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, on remarquera qu'il y a toujours au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$, c'est la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{E})$). Montrer que $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ est la plus petite des tribus contenant $\mathcal{A}$ (c'est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$).

Corrigé – *D'après la question précédente,* $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ *est bien une tribu. La définition de* $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ *donne que toute tribu contenant* $\mathcal{A}$ *doit contenir* $\mathrm{T}_\mathcal{A}$. $\mathrm{T}_\mathcal{A}$ *est donc la plus petite tribu contenant* $\mathcal{A}$.

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{T}_\mathcal{A}$, $\mathrm{T}_\mathcal{B}$ les tribus engendrées par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathrm{T}_\mathcal{A} \subset \mathrm{T}_\mathcal{B}$.

Corrigé – $\mathrm{T}_\mathcal{B}$ *est une tribu contenant* $\mathcal{B}$, *donc contenant* $\mathcal{A}$. *Donc* $\mathrm{T}_\mathcal{A} \subset \mathrm{T}_\mathcal{B}$.

Exercice 2.3 (Exemples de tribus)

1. Tribu trace

(a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble E et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F} = \{\mathrm{A} \cap \mathrm{F}, \mathrm{A} \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F (tribu trace de $\mathcal{T}$ sur F).

Corrigé –

i. $\emptyset \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$ *car* $\emptyset = \emptyset \cap \mathrm{F}$ *et* $\emptyset \in \mathcal{T}$.

ii. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$. *Il existe* $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cap \mathrm{F}$. *On a donc* $\mathrm{F} \setminus \mathrm{A} = (\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$ *car* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est donc stable par passage au complémentaire.*

iii. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_\mathrm{F}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n \cap \mathrm{F}$. *On a donc*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) \cap \mathrm{F} \in \mathcal{T}_\mathrm{F}$$

car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{T}$. $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est donc stable par union dénombrable.*

Ceci est suffisant pour dire que $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ *est une tribu sur* F.

(b) Si E est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathrm{E})$ ($\mathcal{B}(\mathrm{E})$ est la tribu borélienne de E), montrer que la tribu trace sur F, notée $\mathcal{T}_\mathrm{F}$, est la tribu engendrée par la topologie trace sur F (tribu borélienne de F, notée $\mathcal{B}(\mathrm{F})$). [Montrer que $\mathcal{B}(\mathrm{F}) \subset \mathcal{T}_\mathrm{F}$. Pour montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F} \subset \mathcal{B}(\mathrm{F})$, considérer $\mathcal{C} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}); \mathrm{A} \cap \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathrm{F})\}$ et montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu (sur E) contenant les ouverts de E.] Si F est un borélien de E, montrer que $\mathcal{T}_\mathrm{F}$ est égale à l'ensemble des boréliens de E contenus dans F.

Corrigé – *On note* $\mathcal{O}_F$ *l'ensemble des ouverts de* F*, et* $\mathcal{O}_E$ *l'ensemble des ouverts de* E*. Par définition de la topologie trace,* $\mathcal{O}_F = \{O \cap F,\ O \in \mathcal{O}_E\}$.

Comme $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{B}(E)$*, on a* $\mathcal{O}_F \subset \mathcal{T}_F = \{B \cap F,\ B \in \mathcal{B}(E)\}$ *(Noter que* $\mathcal{T}_F = \mathcal{B}(E)_F$*, avec les notations de la question précédente). On en déduit que* $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{T}_F$ *car* $\mathcal{T}_F$ *est une tribu sur* F *contenant* $\mathcal{O}_F$ *qui engendre* $\mathcal{B}(F)$.

On montre maintenant que $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{B}(F)$*. On pose* $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(E);\ A \cap F \in \mathcal{B}(F)\}$. $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset \cap F = \emptyset \in \mathcal{B}(F)$. $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car, si* $A \in \mathcal{C}$*, on a* $(E \setminus A) \cap F = F \setminus A = F \setminus (A \cap F) \in \mathcal{B}(F)$*, donc* $(E \setminus A) \in \mathcal{C}$*. Enfin, pour montrer que* $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable, soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap F) \in \mathcal{B}(F)$*, ce qui donne* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ *et la stabilité de* $\mathcal{C}$ *par union dénombrable.* $\mathcal{C}$ *est donc une tribu. Il est clair que* $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{C}$ *car si* $O \in \mathcal{O}_E$*, on a* $O \cap F \in \mathcal{O}_F \subset \mathcal{B}(F)$*. La tribu* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{O}_E$*, ce qui prouve que* $\mathcal{C}$ *contient* $\mathcal{B}(E)$ *et donc que* $A \cap F \in \mathcal{B}(F)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(E)$*. Ceci donne exactement* $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{B}(F)$*. On a bien montré finalement que* $\mathcal{T}_F = \mathcal{B}(F)$ *(on rappelle que* $\mathcal{T}_F = \mathcal{B}(E)_F$*, avec les notations de la question précédente).*

On suppose maintenant que F *est un borélien de* E*, c'est-à-dire que* $F \in \mathcal{B}(E)$*. On a alors* $\mathcal{T}_F \subset \mathcal{B}(E)$ *(car* $A \cap F \in \mathcal{B}(E)$ *si* $A \in \mathcal{B}(E)$*). Puis, soit* $A \subset F$ *tel que* $A \in \mathcal{B}(E)$*, on peut écrire* $A = A \cap F$*, donc* $A \in \mathcal{T}_F$*. On a bien montré que* $\mathcal{T}_F = \{A \subset F;\ A \in \mathcal{B}(E)\}$.

2. Soit E un ensemble infini et $S = \{\{x\}, x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (distinguer les cas E dénombrable et non dénombrable).

Corrigé – *On note* T(S) *la tribu engendrée par* S.

On suppose que E *est au plus dénombrable (c'est-à-dire dire fini ou dénombrable). D'après la stabilité de* T(S) *par union dénombrable, la tribu* T(S) *doit contenir toutes les parties au plus dénombrables. Comme toutes les parties de* E *sont au plus dénombrables, on en déduit* $T(S) = \mathcal{P}(E)$.

On suppose maintenant que E *est infini non dénombrable. On note* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des parties de* E *au plus dénombrables et* $\mathcal{B} = \{A^c,\ A \in \mathcal{A}\}$*. D'après la stabilité de* T(S) *par union dénombrable, la tribu* T(S) *doit contenir* $\mathcal{A}$*. Par stabilité de* T(S) *par passage au complémentaire,* T(S) *doit aussi contenir* $\mathcal{B}$.

On va montrer maintenant que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est une tribu (on en déduit que* $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*). On a* $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *et il est clair que* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est stable par passage au complémentaire (car* $A \in \mathcal{A}$ *implique* $A^c \in \mathcal{B}$ *et* $A \in \mathcal{B}$ *implique* $A^c \in \mathcal{A}$*). Enfin, si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, on distingue 2 cas :*

1er cas. Si $A_n \in \mathcal{A}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

2ème cas. Si il existe $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $A_n \in \mathcal{B}$ *on a alors* $A_n^c \in \mathcal{A}$*, donc* A_n^c *est au plus dénombrable et* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p^c \subset A_n^c$ *est aussi au plus dénombrable,ce qui donne* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p)^c \in \mathcal{A}$ *et* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

On a bien montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*, ce qui prouve la stabilité par union dénombrable de* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$*. Finalement,* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *est donc une tribu contenant* S *et contenu dans* T(S)*, ceci donne* $T(S) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Exercice 2.4 (Tribus images) Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$ (resp. $\mathcal{P}(\mathrm{F})$) on note $\mathrm{T}(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.

Soit f une application de E dans F.

On note f^{-1} l'application de $\mathcal{P}(\mathrm{F})$ dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ définie par, pour $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$,

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} \text{ t.q. } f(x) \in \mathrm{B}\}.$$

1. Soit S une tribu sur F. On pose $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} = \{f^{-1}(\mathrm{B});\ \mathrm{B} \in \mathrm{S}\}$. Montrer que $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ est une tribu sur E (c'est la tribu image réciproque de S par f).

   Corrigé – *On démontre que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que*
   $$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$

2. Soit T une tribu sur E. On pose $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{F};\ f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$. Montrer que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ est une tribu sur F (c'est la tribu image directe de T par f).

   Corrigé – *Ici aussi, on montre que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}}$ *est une tribu sur* F *en remarquant que* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathrm{F} \setminus \mathrm{A}) = \mathrm{E} \setminus f^{-1}(\mathrm{A})$ *(pour tout* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$*) et que,*
   $$\forall (\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathrm{F}),\ f^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\mathrm{A}_n).$$
   Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$, *on pose* $\mathrm{B}_f = \{f(x);\ x \in \mathrm{B}\}$. *Noter que, en général,* $\{\mathrm{B}_f,\ \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$ *n'est pas une tribu sur* F *(par exemple, si* f *est non surjective,* $\mathrm{F} \notin \{\mathrm{B}_f,\ \mathrm{B} \in \mathrm{T}\}$*).*

3. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de F. On pose $\mathcal{C}_f = \{f^{-1}(\mathrm{B});\ \mathrm{B} \in \mathcal{C}\}$ et $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Montrer que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ est la tribu image réciproque de S par f, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f) = \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ avec la notation de la première question.
   [On pourra montrer d'abord que $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)) \subset \mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$. Puis, pour montrer que $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$, montrer que la tribu image de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ par f contient $\mathcal{C}$.]

   Corrigé – $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}}$ *est une tribu sur* E *(d'après la première question) contenant* C_f *(car* $\mathrm{S} = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C}$*), elle contient donc* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Ceci donne* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \supset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

   On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$. *Comme dans la deuxième question, on note* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *la tribu image de* $\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *par* f.

   On remarque que $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)} \supset \mathcal{C}$ *(car* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$*). On en déduit que* $\mathrm{S}_{f,\mathrm{T}(\mathrm{C}_f)}$ *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C})$, *c'est-à-dire que* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$ *pour tout* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. *Comme* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathrm{S}$, *ceci signifie exactement que* $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} \subset \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

   Les deux inclusions nous donnent bien $\mathrm{T}_{f,\mathrm{S}} = \mathrm{T}(\mathrm{C}_f)$.

Exercice 2.5 (π-système, λ-système) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F}$ est un π-système (c'est-à-dire stable par intersection finie) et un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \setminus B \in \mathcal{F}$ si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $B \subset A$).

   Corrigé – *Si $\mathcal{F}$ est une tribu, il est immédiat que $\mathcal{F}$ est un π-système et un λ-système. La question consiste à démontrer la réciproque.*

   On suppose donc $\mathcal{F}$ est un π-système et un λ-système. Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu, il suffit de démontrer que $\mathcal{F}$ possède les trois propriétés suivantes :

   (p1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

   (p2) $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire,

   (p3) $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable.

   La propriété (p1) est immédiate car elle est dans la définition de λ-système.

   La propriété (p2) est aussi assez simple. En effet, soit $A \in \mathcal{F}$, Comme $\Omega \in \mathcal{F}$ et $A \subset \Omega$, la troisième propriété des λ-systèmes donne $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$. Ceci prouve bien (p2).

   On prouve maintenant (p3). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on veut montrer que $A \in \mathcal{F}$. On commence par remarquer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, avec

   $$B_n = \bigcup_{p=0}^{n} A_p.$$

   Comme $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, il suffit de montrer que $B_n \in \mathcal{F}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) pour avoir $A \in \mathcal{F}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n^c = (\bigcup_{p=0}^{n} A_p)^c = \bigcap_{p=0}^{n} A_p^c$. Pour tout p, on a $A_p \in \mathcal{F}$, on a donc $A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ vérifie (p2)) et donc $\bigcap_{p=0}^{n} A_p^c \in \mathcal{F}$ (car $\mathcal{F}$ est un π-système). On a ainsi montré que $B_n^c \in \mathcal{F}$. Enfin, comme $\mathcal{F}$ vérifie (p2), on a bien $B_n \in \mathcal{F}$. On en déduit que $A \in \mathcal{F}$ et donc que $\mathcal{F}$ vérifie (p3), ce qui termine cette question.

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est un λ-système. Soit $C \in \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega$ tel que $C \cap B \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un λ-système.

   Corrigé – *On va montrer que $\mathcal{G}$ vérifie les trois propriétés définissant un λ-système.*

   (1) On montre la stabilité de $\mathcal{G}$ par union dénombrable croissante – *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω telle que $A_n \subset A_{n+1}$ et $A_n \in \mathcal{G}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$. Pour cela on remarque que*

   $$C \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cap A_n).$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \in \mathcal{G}$ et donc $C \cap A_n \in \mathcal{F}$. Comme $(C \cap A_n) \subset (C \cap A_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable croissante, on a donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cap A_n) \in \mathcal{F}$, ce qui donne bien que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$.

   (2) On montre que $\Omega \in \mathcal{G}$ – *Cette propriété de $\mathcal{G}$ est due au fait que $C \in \mathcal{F}$ (et donc $C \cap \Omega = C \in \mathcal{F}$).*

(3) On montre que $A \setminus B \in \mathcal{G}$ **si** $A, B \in \mathcal{G}$ **avec** $B \subset A$ – *Soit* $A, B \in \mathcal{G}$ *avec* $B \subset A$. *On remarque que* $C \cap (A \setminus B) = (C \cap A) \setminus (C \cap B)$. *Comme* $B \cap C, A \cap C \in \mathcal{F}$ *et* $(B \cap C) \subset (A \cap C)$, *on a* $(C \cap A) \setminus (C \cap B) \in \mathcal{F}$. *On a donc* $C \cap (A \setminus B) \in \mathcal{F}$, *ce qui donne bien* $(A \setminus B) \in \mathcal{G}$.

On a ainsi montré que $\mathcal{G}$ *est un* λ*-système.*

Exercice 2.6 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$**)** On note T la tribu (sur $\mathbb{R}^2$) engendrée par $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On va montrer ici que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion au plus dénombrable de produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. [S'inspirer d'une démonstration analogue faite pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$.] En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

   Corrigé – *On s'inspire ici de la démonstration du lemme 2.11 (une autre méthode est donnée à l'exercice 2.7).*

   Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Pour tout* $x = (x_1, x_2)^t \in O$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\subset O$. *Comme les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$, *on peut trouver* $y_1 \in \mathbb{Q} \cap]x_1 - r, x_1[$, $z_1 \in \mathbb{Q} \cap]x_1, x_1 + r[$, $y_2 \in \mathbb{Q} \cap]x_2 - r, x_2[$ *et* $z_2 \in \mathbb{Q} \cap]x_2, x_2 + r[$. *On a donc* $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[\subset O$.

   On note alors $I = \{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in \mathbb{Q}^4;\ ]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[) \subset O\}$. *Pour tout* $x \in O$, *il existe donc* $(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I$ *tel que* $x \in]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[$. *On en déduit que*

$$O = \bigcup_{(y_1, z_1, y_2, z_2) \in I}]y_1, z_1[\times]y_2, z_2[.$$

   Comme I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^4$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in T$. *On a ainsi montré que* T *est une tribu contenant tous les ouverts de* $\mathbb{R}^2$, *et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*). Donc,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$.

2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que T_1 est une tribu (sur $\mathbb{R}$) contenant les ouverts (de $\mathbb{R}$). En déduire que $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Corrigé – — $\emptyset \in T_1$ *car* $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

   — *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

     Soit $B \in T_1$, *on a donc* $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. *Or,* $(A \times \mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *(car* A *et* $\mathbb{R}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}$*), on a donc* $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $B \in T_1$*). Donc,* $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *Ce qui prouve que* $B^c \in T_1$ *et donc que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

   — *Enfin,* T_1 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T_1$, *on a* $A \times (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in T_1$.

   On a donc montré que T_1 *est une tribu, il reste à montrer que* T_1 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$.

Soit B *un ouvert de* $\mathbb{R}$*. On a donc* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et, comme* $A \times B$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, on a* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. On a donc* $B \in T_1$.

T_1 *est donc une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, donc contenant* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Donc,* $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

La conséquence de cette question est donc :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \qquad (2.17)$$

3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On commence par remarquer que la question précédente donne que* T_2 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$*. En effet, soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}$*, la propriété (2.17) donne* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*, et donc* $A \in T_2$.

On montre maintenant que T_2 *est une tribu (on en déduira que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

(a) $\emptyset \in T_2$ *car* $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On montre ici que T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $A \in T_2$*, on a* $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A^c \times B = (\mathbb{R} \times B) \setminus (A \times B)$*. La propriété (2.17) donne* $(\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *car* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*. D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A \in T_2$*). Donc,* $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. Ce qui prouve que* $A^c \in T_2$ *et donc que* T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

(c) Enfin, T_2 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$*, on a* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \times B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *(car* $A_n \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T_2$.

T_2 *est donc une tribu (sur* $\mathbb{R}$*) contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, ce qui prouve que* $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc, finalement,* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (et donc que $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

Corrigé – *La question précédente donne :*

$$A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On a donc $\{A \times B;\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. On en déduit* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. Avec la question 1, on a finalement* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2.7 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^N$**)** 1. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$. [On pourra montrer d'abord que tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable de boules ouvertes de $\mathbb{R}^N$.]

Corrigé – *Soit* T *la tribu engendrée par l'ensemble de toutes les boules ouvertes de* $\mathbb{R}^N$*. Comme les boules ouvertes sont des ouverts, on a* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$*. Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*. Pour tout* $x \in O$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $B(x, r) \subset O$ *(où* $B(x, r)$ *désigne la boule ouverte de centre x et rayon r). Comme* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*, on peut donc*

trouver $y \in \mathbb{Q}^N$ *et* $s \in \mathbb{Q}_+^* = \{t \in \mathbb{Q}\,;\ t > 0\}$*, tel que* $x \in B(y,s) \subset O$*. On note alors* $I = \{(y,s) \in \mathbb{Q}^N \times \mathbb{Q}_+^*\,;\ B(y,s) \subset O\}$*. On a alors* $O = \bigcup_{(y,s)\in I} B(y,s)$*. Comme* I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^{N+1}$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in T$ *et donc que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset T$ *(car* T *est une tribu contenant tous les ouverts).*

Le raisonnement précédent montre même que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *est aussi la tribu engendrée par l'ensemble des boules ouvertes dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles.*

2. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$ est égale à celle engendrée par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles.

   Corrigé – *On reprend le même raisonnement que dans la question précédente en remplaçant* $B(x,r)$ *par* $P(x,r) = \prod_{i=1}^{N}]x_i - r, x_i + r[$*, avec* $x = (x_1, \ldots, x_N)^t$*.*

3. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles $]a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

   Corrigé – *Soit* $\mathcal{C} = \{]a,b],\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ *et* $T(\mathcal{C})$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*. Comme* $]a,b] = \bigcap_{n>0}]a, b + \frac{1}{n}[$*, on voit que* $]a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*. Donc, on a* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

   On montre maintenant l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$*. Soit* $I =]a,b[$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$*. On peut écrire* $I = \bigcup_{n \geq n_0}]a, b - \frac{1}{n}]$*, avec* n_0 *tel que* $\frac{1}{n_0} < b - a$*. On en déduit que* $I \in T(\mathcal{C})$*. Puis, comme tout ouvert non vide peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts à extrémités finies (voir le lemme 2.11 page 44), on obtient que tout ouvert appartient à* $T(\mathcal{C})$*. Ceci permet de conclure que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C})$ *et finalement que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T(\mathcal{C})$*.*

4. Soit S un sous ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à S. (Un résultat analogue, non demandé ici, est vrai en remplaçant "boules ouvertes" par "boules fermées".)

   Corrigé – *Si* S *est dénombrable, il suffit de reprendre le même raisonnement que dans la première question en remplaçant* $\mathbb{Q}^N$ *par* S^N *(qui est dense dans* $\mathbb{R}^N$*) et* $\mathbb{Q}_+^*$ *par* $S_+^* = \{s \in S\,;\ s > 0\}$ *(qui est dense dans* $\mathbb{R}_+^*$*). On ne détaille pas cette démonstration.*

   Si S *est non dénombrable, on se ramène au cas* S *dénombrable de la manière suivante. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$*, on choisit* $x_i \in S$ *t.q.* $|x_i - (i/n)| \leq (1/n)$ *(l'existence de* x_i *vient de la densité de* S *dans* $\mathbb{R}$*) et on pose* $S_n = \{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$*. Puis, on pose* $\widehat{S} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$*. L'ensemble* $\widehat{S}$ *est un sous ensemble de* S*, il est dense dans* $\mathbb{R}$ *(car* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*) et il est dénombrable (car c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables). La tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *est donc engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à* $\widehat{S}$*. Elle est donc, a fortiori, engendrée par la classe des boules ouvertes telles que les coordonnées du centre et le rayon appartiennent à* S*.*

Exercice 2.8 (Une tribu infinie est non dénombrable) Montrer que toute tribu infinie T sur un ensemble (infini) E est non dénombrable. [Si T est dénombrable, on pourra introduire, pour tout élément $x \in \mathrm{E}$, l'ensemble $\mathrm{A}(x)$ intersection de tous les éléments de T contenant x. Puis, montrer à l'aide de ces ensembles qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans T.]

Exercice 2.9 (Algèbre) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre (cf. définition 2.5) si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) $\mathrm{E} \in \mathcal{A}$,

(b) $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

Corrigé – *On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre. Il est clair que (a) est vérifiée. Pour montrer (b) il suffit d'utiliser la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire, cela donne bien que* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c \in \mathcal{A}$ *si* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{A}$ vérifie (a) et (b).

On a alors $\emptyset = \mathrm{E} \setminus \mathrm{E} \in \mathcal{A}$, et donc $\emptyset, \mathrm{E} \in \mathcal{A}$.

On remarque ensuite que, grâce à (b), $\mathrm{A}^c = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A} \in \mathrm{E}$ *si* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. *On a donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire.*

Soit maintenant $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}$. *On a* $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_1 \setminus \mathrm{A}_2^c$, *on en déduit que* $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}$ *par (b) et la stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire. Une récurrence sur n donne alors que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.*

Enfin, la stabilité de $\mathcal{A}$ par union finie découle de la stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection finie et par passage au complémentaire car $(\bigcup_{p=0}^{n} \mathrm{A}_p)^c = \bigcap_{p=0}^{n} \mathrm{A}_p^c$.

On a bien montré que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

2. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'algèbres (sur E). Montrer que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E});\ \mathrm{A} \in \mathcal{A}_i \text{ pour tout } i \in \mathrm{I}\}$ est encore une algèbre.

Corrigé – *On peut montrer que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$ est une algèbre en utilisant directement la définition d'une algèbre. On peut aussi le montrer en utilisant la première question, ce que nous faisons ici. On montre donc que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$ vérifie (a) et (b) :*

$\mathrm{E} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$ *car* $\mathrm{E} \in \mathcal{A}_i$ *pour tout* $i \in \mathrm{I}$.

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$. *Pour tout* $i \in \mathrm{I}$, *on a* $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}_i$. *On en déduit* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \mathcal{A}_i$ *(car $\mathcal{A}_i$ est une algèbre) et donc* $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$.

On a bien montré que $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{A}_i$ est une algèbre.

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$, la deuxième question permet donc de définir l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les algèbres sur E contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 2.10 (Suite croissante de tribus) Soit E un ensemble. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus de E. Montrer que $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n$ est une algèbre (cf. définition 2.5), mais n'est pas, en général, une tribu. Donner une suite d'algèbres finies de parties de $[0,1]$ dont la réunion engendre $\mathcal{B}([0,1])$.

Exercice 2.11 (Tribu engendrée par une partition)

Soit E un ensemble et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une partition de E, c'est-à-dire que $\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On suppose aussi que $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in \mathrm{I}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E s'écrivant comme réunion au plus dénombrable d'éléments de cette partition, c'est-à-dire que

$$\mathcal{C} = \{\cup_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{A}_j,\ \text{avec } \mathrm{J} \subset \mathrm{I},\ \mathrm{J} \text{ au plus dénombrable}\}.$$

On note aussi $\mathcal{D} = \{\mathrm{B}^c, \mathrm{B} \in \mathcal{C}\}$ et $\mathrm{T} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$.

1. On suppose, dans cette question, que $\mathrm{I} = \{1, 2, ..., n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. Combien la tribu T a-t-elle d'éléments ?

   Corrigé – *Soit* $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$. *On a* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C}$ *et il existe donc* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ *tel que* $\mathrm{B}^c = \cup_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{A}_i$, *ce qui donne* $\mathrm{B} = \cup_{i\in\mathrm{J}^c}\mathrm{A}_i$. *Comme* J^c *est fini, on a donc* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. *On a ainsi montré que* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$. *Un raisonnement analogue donne* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ *et donc* $\mathcal{C} = \mathcal{D}$. *Finalement, on obtient bien* $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{T}$.

   On note $\bar{\mathrm{T}}$ *la tribu engendrée par* $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$. *Comme* $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$ *et que* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par union finie, on a* $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$. *Pour montrer que* $\bar{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$, *il suffit donc de montrer que* $\mathcal{C}$ *est une tribu (car* $\bar{\mathrm{T}}$ *est la plus petite tribu contenant* $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\}$*).*

   Pour montrer que $\mathcal{C}$ *est une tribu, on remarque que*

   - $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset = \cup_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{A}_j$ *avec* $\mathrm{J} = \emptyset$,
   - $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de* I *est finie,*
   - $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$.

   Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ *est une tribu et donc que* $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$.

   Pour trouver le nombre déléments de $\mathcal{C}$, *on considère l'application* f *de l'ensemble des parties de* $\{1, \ldots, n\}$ *dans* $\mathcal{C}$ *définie par* $f(\mathrm{J}) = \cup_{i\in\mathrm{J}}\mathrm{A}_j$. *La définition de* $\mathcal{C}$ *donne que* f *est surjective et, comme les* A_i *sont tous non vides et que les* A_i *sont disjoints deux à deux, on remarque que* f *est injective. Ceci montre que* f *est bijective et donc que le cardinal de* $\mathcal{C}$ *est le même que le cardinal de l'ensemble des parties de* $\{1, \ldots, n\}$, *c'est-à-dire* 2^n. *La tribu* $\mathcal{C}$ *a donc* 2^n *éléments.*

2. On suppose, dans cette question, que I est dénombrable (on peut donc supposer que $\mathrm{I} = \mathbb{N}$). Montrer que $\mathrm{T} = \mathcal{C} = \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_i, i \in \mathrm{I}\}$.

Corrigé – *On reprend le même raisonnement que pour la question précédente. Soit* $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$*. On a* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C}$ *et il existe donc* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ *tel que* $\mathrm{B}^c = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$*, ce qui donne* $\mathrm{B} = \cup_{i \in \mathrm{J}^c} \mathrm{A}_i$*. Comme* $\mathrm{J}^c \subset \mathrm{I}$*,* J^c *est au plus dénombrable, on a donc* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$*. On a ainsi montré que* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$*. Un raisonnement analogue donne* $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ *et donc* $\mathcal{C} = \mathcal{D}$*. Finalement, on obtient bien* $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathrm{T}$*.*

On note $\bar{\mathrm{T}}$ *la tribu engendrée par* $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$*. Comme* $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ *et que* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a* $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$*. Pour montrer que* $\bar{\mathrm{T}} = \mathcal{C}$*, il suffit donc de montrer que* $\mathcal{C}$ *est une tribu (car* $\bar{\mathrm{T}}$ *est la plus petite tribu contenant* $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$*).*

Pour montrer que $\mathcal{C}$ *est une tribu, on remarque que*

- $\emptyset \in \mathcal{C}$ *car* $\emptyset = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ *avec* $\mathrm{J} = \emptyset$*,*
- $\mathcal{C}$ *est stable par union dénombrable car toute réunion de parties de* I *est au plus dénombrable,*
- $\mathcal{C}$ *est stable par passage au complémentaire car* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} = \mathcal{C}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$*.*

Ceci donne bien que $\mathcal{C}$ *est une tribu et donc que* $\mathcal{C} = \bar{\mathrm{T}}$*.*

3. On suppose maintenant que I est un ensemble infini non dénombrable. Montrer que $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ et que T est la tribu engendrée par la famille $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$.

Corrigé – *Pour montrer que* $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$*, il suffit de remarquer que* $\emptyset \in \mathcal{C}$ *(car* $\emptyset = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j$ *avec* $\mathrm{J} = \emptyset$*) et que* $\emptyset \notin \mathcal{D}$*. En effet,* $\emptyset^c = \mathrm{E} = \cup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ *et donc* $\emptyset^c \neq \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$ *pour tout* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$*,* J *au plus dénombrable (et donc* $\mathrm{J} \neq \mathrm{I}$*) car les* A_i *sont disjoints deux à deux et non vides. Ce qui montre que* $\emptyset^c \notin \mathcal{C}$ *et donc* $\emptyset \notin \mathcal{D}$*.*

En fait, on peut même montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$*.*

On note $\bar{\mathrm{T}}$ *la tribu engendrée par* $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$*. Comme* $\bar{\mathrm{T}} \supset \{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$ *et que* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par union dénombrable (et donc aussi par union finie), on a* $\mathcal{C} \subset \bar{\mathrm{T}}$*. Puis comme* $\bar{\mathrm{T}}$ *est stable par passage au complémentaire, on a aussi* $\mathcal{D} \subset \bar{\mathrm{T}}$*. On a donc* $\mathrm{T} \subset \bar{\mathrm{T}}$*. Pour montrer que* $\bar{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$*, il suffit donc de montrer que* T *est une tribu (car* $\bar{\mathrm{T}}$ *est la plus petite tribu contenant* $\{\mathrm{A}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$*).*

On montre maintenant que T *est une tribu.*

- $\emptyset \in \mathrm{T}$ *car* $\emptyset = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_j \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$*, avec* $\mathrm{J} = \emptyset$*.*
- T *est stable par passage au complémentaire car* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{D} \subset \mathrm{T}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$ *et* $\mathrm{B}^c \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ *si* $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$*.*
- *Il reste à montrer la stabilité de* T *par union dénombrable. Soit* $(\mathrm{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* T*. Pour montrer que* $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$*, on distingue deux cas :*
  Cas 1. $\mathrm{B}_n \in \mathcal{C}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, On a alors* $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{C} \subset \mathrm{T}$*, car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est encore au plus dénombrable.*
  Cas 2. *Il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{B}_m \notin \mathcal{C}$ *(et donc* $\mathrm{B}_m \in \mathcal{D}$*). On a alors* $\mathrm{B}_m^c \in \mathcal{C}$ *et il existe donc* $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$*,* J *au plus dénombrable, tel que* $\mathrm{B}_m^c = \cup_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{A}_i$*. On a alors*
  $$(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c = \cap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n^c \subset \mathrm{B}_m^c,$$
  ce qui prouve qu'il existe $\bar{\mathrm{J}} \subset \mathrm{J}$ *tel que* $(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c = \cup_{i \in \bar{\mathrm{J}}} \mathrm{A}_i$*. Comme* $\bar{\mathrm{J}}$ *est au plus dénombrable, on a donc* $(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n)^c \in \mathcal{C}$ *et donc* $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathcal{D} \subset \mathrm{T}$*. Ceci prouve la stabilité de de* T *par union dénombrable.*

On a ainsi montré que T *est une tribu et donc que* $T = \bar{T}$.

Exercice 2.12 Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On suppose que $\emptyset, E \in \mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{C}$ est une union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$C \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ et } C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \text{ tels que } C^c = \bigcup_{p=1}^{n} C_p \text{ et } C_p \cap C_q = \emptyset \text{ si } p \neq q.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $\mathcal{C}$. Une partie de E est donc un élément de $\mathcal{B}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_p)_{p=1,\ldots,n} \subset \mathcal{C}$ tel que $A_p \cap A_q = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

Corrigé – *On montre tout d'abord la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie. Soit* $A, B \in \mathcal{B}$. *Il existe* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ *et* $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{C}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *et* $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$. *On a alors* $A \cap B = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{m} B_j) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)$. *Comme* $A_i \cap B_j \in \mathcal{C}$ *(car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie) pour tout i, j et que* $(A_i \cap B_j) \cap (A_k \cap B_l) = \emptyset$ *si* $(i, j) \neq (k, l)$, *on en déduit que* $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Une récurrence sur n donne alors la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie.

On montre maintenant la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire. Soit $A \in \mathcal{B}$. *Il existe* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ *tels que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$ *et* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. *On a alors* $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$. *Comme* A_i^c *est une réunion finie disjointe d'éléments de $\mathcal{C}$, on a bien* $A_i^c \in \mathcal{B}$. *La stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie donne alors que* $A^c \in \mathcal{B}$. *On a donc bien montré la stabilité de $\mathcal{B}$ par passage au complémentaire.*

2. Montrer que l'algèbre engendrée (voir remarque 2.6 pour la définition) par $\mathcal{C}$ est égale à $\mathcal{B}$.

Corrigé – *On note $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{A}$ est stable par union finie et contient $\mathcal{C}$, il est clair que $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{C}$, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre (car $\mathcal{A}$ est l'intersection de toutes les algèbres contenant $\mathcal{C}$). On montre donc maintenant que $\mathcal{B}$ est une algèbre.*

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une algèbre, on montre que $\mathcal{B}$ vérifie les quatre propriétés d'une algèbre.

(a) $E, \emptyset \in \mathcal{B}$ *car* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ *et* $E, \emptyset \in \mathcal{C}$.

(b) La question précédente montre que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire.

(c) La stabilité de $\mathcal{B}$ par union finie découle facilement de la stabilité de $\mathcal{B}$ par intersection finie et par passage au complémentaire, car $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c)^c$.

On a bien montré que $\mathcal{B}$ est une algèbre. Comme $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, on a donc $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ et finalement $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 2.13 (Classes monotones) Soit E un ensemble. Pour $\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on dit que Σ est une classe monotone (sur E) si Σ vérifie les deux propriétés suivantes (de stabilité par union croissante dénombrable et par intersection décroissante dénombrable) :

(p1) $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \Sigma$,

(p2) $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, $\mathrm{A}_n \supset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \Sigma$.

1. Soit $\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer que Σ est une tribu si et seulement si Σ est une classe monotone et une algèbre (cf. exercice 2.9).

Corrigé – *Si Σ est une tribu, Σ est stable par union dénombrable et intersection dénombrable. On en déduit immédiatement que Σ est une algèbre et une classe monotone.*

On suppose maintenant que Σ est une algèbre et une classe monotone. Comme Σ est une algèbre, pour montrer que Σ est une tribu, il suffit de montrer que Σ est stable par union dénombrable.

Soit donc $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ et $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. On veut montrer que $\mathrm{A} \in \Sigma$. On remarque que

$$\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \text{ avec } \mathrm{B}_n = \bigcup_{p=0}^{n} \mathrm{A}_n.$$

Comme Σ est une algèbre, on a $\mathrm{B}_n \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, comme Σ est stable par union croissante (noter que $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{B}_{n+1}$) dénombrable, on en déduit que $\mathrm{A} \in \Sigma$. On a bien montré que Σ est stable par union dénombrable et donc que Σ est une tribu.

Noter que l'hypothèse de stabilité de Σ par intersection décroissante dénombrable n'a pas été utilisé. Elle sera utile à la question 4.

2. Donner un exemple, avec $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, de classe monotone qui ne soit pas une tribu.

Corrigé – *Il y a beaucoup d'exemples de classes monotones qui ne sont pas des tribus. En voici un : $\Sigma = \{\mathbb{R}\}$.*

3. Soit $(\Sigma_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de classes monotones (sur E). Montrer que

$$\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}); \mathrm{A} \in \Sigma_i \text{ pour tout } i \in \mathrm{I}\}$$

est encore une classe monotone.

Corrigé – *Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$ telle que $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $i \in \mathrm{I}$, $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ et donc, puisque Σ_i est une classe monotone, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \Sigma_i$. On en déduit que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \subset \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \Sigma_i$.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *telle que* $A_n \supset A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On a donc, pour tout* $i \in I$*,* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_i$ *et donc, puisque* Σ_i *est une classe monotone,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma_i$*. On en déduit que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$*.*

Ceci montre bien que $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *est une classe monotone.*

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, cette question permet donc de définir la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$ comme l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{C}$.

4. (Lemme des classes monotones) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur E. On note Σ la classe monotone engendrée par $\mathcal{A}$ et on note T la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

(a) Montrer que $\Sigma \subset T$.

Corrigé – Σ *est l'intersection de toutes les classes monotones sur* $\mathcal{A}$*. Une tribu étant aussi une classe monotone, la tribu* T *(engendrée par* $\mathcal{A}$*) est donc une classe monotone contenant* $\mathcal{A}$*. On en déduit que* $\Sigma \subset T$*.*

(b) Soit $A \subset E$. On pose $\Sigma_A = \{B \subset E\,;\, A \setminus B \in \Sigma \text{ et } B \setminus A \in \Sigma\}$. Montrer que Σ_A est une classe monotone.

Corrigé – *Soit* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$*,* $B_n \subset B_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

On pose $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*. On va montrer que* $B \in \Sigma_A$*.*

On a $A \setminus B = A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$*. La suite* $(A \setminus B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de* Σ*. Comme* Σ *est une classe monotone, on en déduit* $A \setminus B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n) \in \Sigma$*.*

On montre aussi que $B \setminus A \in \Sigma$*. En effet,* $B \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A) \in \Sigma$ *par la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

On a donc bien montré que $B \in \Sigma_A$*, ce qui donne la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

De manière analogue, on va montrer la stabilité de Σ *par intersection décroissante dénombrable. Soit* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_A$*,* $B_n \supset B_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On pose* $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$*.*

Comme $A \setminus B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \setminus B_n)$*, on obtient* $A \setminus B \in \Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par union croissante dénombrable.*

Comme $B \setminus A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A)$*, on obtient* $B \setminus A \in \Sigma$ *en utilisant la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a donc $B \in \Sigma_A$*, ce qui donne la stabilité de* Σ *par intersection décroissante dénombrable.*

On a bien montré que Σ_A *est une classe monotone.*

(c) (Question plus difficile.) Montrer que Σ est une algèbre. [Utiliser la question (b) et la première question de l'exercice 2.9.] En déduire que $T = \Sigma$.

Corrigé – *Pour montrer que Σ est une algèbre, il suffit de montrer que Σ vérifie les propriétés (a) et (b) de la première question de l'exercice 2.9. Il est immédiat que la propriété (a) est vérifiée car $\mathrm{E} \in \mathcal{A} \in \Sigma$. Pour montrer (b), on utilise la classe monotone Σ_A définie à la question 4 pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$.*

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, on a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma_\mathrm{A}$. La classe monotone Σ_A contient $\mathcal{A}$, elle contient donc Σ qui est l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{A}$. On a donc :

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A},\ \mathrm{B} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{B} \in \Sigma_\mathrm{A}. \tag{2.18}$$

On remarque maintenant que, pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a :

$$\mathrm{A} \in \Sigma_\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} \in \Sigma_\mathrm{A}.$$

On déduit donc de (2.18) :

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A},\ \mathrm{B} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{A} \in \Sigma_\mathrm{B}.$$

Si $\mathrm{B} \in \Sigma$, la classe monotone Σ_B contient donc $\mathcal{A}$. Elle contient alors aussi Σ (qui est l'intersection de toutes les classes monotones sur E contenant $\mathcal{A}$). On a donc montré :

$$\mathrm{B} \in \Sigma,\ \mathrm{A} \in \Sigma \Rightarrow \mathrm{A} \in \Sigma_\mathrm{B}.$$

On en déduit que $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \in \Sigma$ si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \Sigma$.

On a bien montré que Σ vérifie la propriété (b) de la première question de l'exercice 2.9 et donc que Σ est une algèbre.

Pour conclure, on remarque Σ est une classe monotone et une algèbre. C'est donc une tribu (par la question 1) contenant $\mathcal{A}$. Elle contient donc T (qui est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$) et on a bien, finalement, $\Sigma = \mathrm{T}$.

Exercice 2.14 (Caractérisation de la tribu engendrée) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{A}$ est stable par différence si :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A},\ \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c \in \mathcal{A}.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable disjointe si :

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, \mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset \text{ pour } n \neq m \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}.$$

Enfin, on appelle système de Dynkin un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E tel que

- $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$,
- $\mathcal{D}$ stable par différence,
- $\mathcal{D}$ stable par union dénombrable disjointe.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$.

1. Montrer qu'il existe un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$ et contenu dans tous les systèmes de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. c'est-à-dire qu'il existe un système de Dynkin, noté $\mathcal{D}$, tel que $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ et

$$\mathcal{A} \text{ système de Dynkin } \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}.$$

Corrigé – *On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des systèmes de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ car $\mathcal{P}(\mathrm{E}) \in \mathcal{Z}$. Puis, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de* E *appartenant à tous les éléments de $\mathcal{Z}$ (c'est-à-dire que, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on a $\mathrm{A} \in \mathcal{D}$ si, pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{Z}$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$).*

Il est facile de voir que $\mathcal{D}$ contient E*, $\mathcal{D}$ est stable par différence, $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{C}$ (car tous les éléments de $\mathcal{Z}$ vérifient ces quatres propriétés). Enfin, $\mathcal{A} \in \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, ce qui est bien la propriété demandée.*

Le système de Dynkin $\mathcal{D}$ s'appelle le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Dans la suite, on note toujours $\mathcal{D}$ le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$.

On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et on va montrer que $\mathcal{D}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ Ceci démontre le théorème π-λ de Dynkin.

2. Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, on note $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \{\mathrm{D} \in \mathcal{D} \text{ tel que } \mathrm{A} \cap \mathrm{D} \in \mathcal{D}\}$.

(a) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Montrer que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par union dénombrable disjointe et stable par différence.

Corrigé – *Soit $(\mathrm{D}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$ avec $\mathrm{D}_n \cap \mathrm{D}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On va montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$. On remarque tout d'abord que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_n \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Puis, $\mathrm{A}\cap(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A}) \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A} \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{D}_n \cap \mathrm{A}) \cap (\mathrm{D}_m \cap \mathrm{A}) = \emptyset$, si $n \neq m$, et $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. On a donc montré que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{D}_n \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$. Ce qui prouve que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par union dénombrable disjointe.*

Soit maintenant $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$, avec $\mathrm{D}_1 \subset \mathrm{D}_2$. On va montrer que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathrm{D}_\mathcal{A}$. Pour cela, on remarque que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par différence. Puis, $\mathrm{A} \cap (\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2) \setminus (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1) \in \mathcal{D}$ car $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2 \in \mathrm{D}$, $(\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_1) \subset (\mathrm{A} \cap \mathrm{D}_2)$ et $\mathcal{D}$ est stable par différence. On a donc montré que $\mathrm{D}_2 \setminus \mathrm{D}_1 \in \mathrm{D}_\mathcal{A}$, ce qui prouve que $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par différence.

(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$. En déduire que $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$.

Corrigé – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. On a $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$) et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{C}$ (car $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie), donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $\mathrm{B} \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_\mathrm{A}$.*

On remarque aussi que $\mathrm{E} \in \mathcal{D}_\mathrm{A}$ car $\mathrm{A} \cap \mathrm{E} = \mathrm{A} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ est stable par différence et stable par union dénombrable disjointe, D_A est donc un système de Dynkin. Comme $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ contient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_\mathrm{A}$ contient le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{D}$. On a donc $\mathcal{D}_\mathrm{A} \supset \mathcal{D}$ et, finalement, $\mathcal{D}_\mathrm{A} = \mathcal{D}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. En déduire que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

Corrigé – *Soit $B \in \mathcal{C}$. On a $B \in \mathcal{D}$ (car $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$). Comme $B \in \mathcal{C}$, la question précédente donne $\mathcal{D} = \mathcal{D}_B$ et donc $A \in \mathcal{D}_B$. On a donc $A \cap B \in \mathcal{D}$. Ceci montre que $B \in \mathcal{D}_A$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_A$.*

On en déduit, comme à la question précédente, que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$.

On montre maintenant que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie. Soit $B, C \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_C$, on a $B \in \mathcal{D}_C$ et donc $C \cap B \in \mathcal{D}$. L'intersection de deux éléments de $\mathcal{D}$ est donc aussi dans $\mathcal{D}$. Ceci prouve bien la stabilité de $\mathcal{D}$ par intersection finie (une récurrence facile donne que l'intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{D}$ est aussi dans $\mathcal{D}$).

3. Montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. En déduire que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Corrigé – *On remarque que $E \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire car, si $A \in \mathcal{D}$, on a $E \setminus A \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par différence (et $E, A \in \mathcal{D}$ avec $A \subset E$). Pour montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable (non nécessairement disjointe).*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par complémentaire, on aussi $A_n^c \in \mathcal{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$B_n = A_n \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} A_i^c).$$

On a $B_n \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie et $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (en notant que $B_n \subset A_n$ et $B_m \subset A_n^c$ si $m > n$). Comme $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe, on en déduit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{D}$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$ (car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$). Ceci prouve que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable et donc que $\mathcal{D}$ est une tribu.

On a ainsi montré que $\mathcal{D}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et donc contenant la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\tau(\mathcal{C})$. D'autre part, il est facile de voir que toute tribu contenant $\mathcal{C}$ est un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$ et donc que $\tau(\mathcal{C})$ contient $\mathcal{D}$. On a bien montré finalement que $\mathcal{D} = \tau(\mathcal{C})$.

2.7.2 Mesures et probabilités

Exercice 2.15 (Exemple de mesures) Soit E un ensemble infini non dénombrable. Pour toute partie A de E, on pose $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable, et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m est-elle une mesure sur $\mathcal{P}(E)$?

Corrigé – *Oui, l'application m est une mesure sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, on a bien $m(\emptyset) = 0$ et si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$ on a $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = 0$ si A_n est au plus dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car une réunion d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable) et $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) = +\infty$ s'ill existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est infini non dénombrable. On a donc toujours $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n)$ (noter d'ailleurs qu'il est inutile de supposer les A_n disjoints deux à deux).*

Exercice 2.16 (Exemple de probabilité) Soit $E = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un ensemble infini dénombrable et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $p_k \geq 0\, \forall k \in \mathbb{N}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \neq \emptyset$, on peut définir $p(A) = \sum_{k;x_k\in A} p_k$. On pose $p(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que p définie en 1. est une probabilité

Exercice 2.17 (Mesure trace et restriction d'une mesure) Soit (E, T, m) un espace mesuré

1. Soit $F \in T$. Montrer que la tribu trace de T sur F, notée T_F, est incluse dans T (cette tribu est une tribu sur F). Montrer que la restriction de m à T_F est une mesure sur T_F. On l'appellera la *trace* de m sur F. Si $m(F) < +\infty$, cette mesure est finie.

   Corrigé – *Soit* $B \in T_F$*, il existe donc* $A \in T$ *tel que* $B = A \cap F$*. Comme* $F \in T$*, on a donc aussi* $B \in T$.

   On note m_F *la restriction de* m *à* T_F*, on a donc* $m_F(B) = m(B)$ *pour tout* $B \in T_F$*. Il est alors immédiat de voir que* $m_F(\emptyset) = 0$ *et que* m_F *est* σ*-additive sur* T_F*,* m_F *est donc une mesure sur* T_F*. Si* $m(F) < +\infty$*, on a* $m_F(F) = m(F) < +\infty$*, la mesure* m_F *est donc finie (mais la mesure* m *peut ne pas être finie, c'est-à-dire que l'on peut avoir* $m(E) = +\infty$*).*

2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu incluse dans T. La restriction de m à $\mathcal{A}$ est une mesure. Est-elle finie (resp. σ-finie) si m est finie (resp. σ-finie) ?

   Corrigé – *On note* m_a *la restriction de* m *à* $\mathcal{A}$*, on a donc* $m_a(B) = m(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{A}$*. Il est clair que* m_a *est une mesure sur* $\mathcal{A}$.

   Si m *est finie, on a* $m_a(E) = m(E) < +\infty$*,* m_a *est donc aussi une mesure finie.*

   Si m *est* σ*-finie, il existe une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *telle que* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$ *et* $m(A_n) < +\infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Mais, comme les* A_n *ne sont pas nécessairement dans* $\mathcal{A}$*, la mesure* m_a *peut ne pas être* σ*-finie. On peut construire un exemple facilement de la manière suivante :*
   On suppose que m *est* σ*-finie mais n'est pas finie (on peut prendre, par exemple* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*) et on prend* $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$*. La mesure* m_a *n'est pas* σ*-finie...*

Exercice 2.18 (Différence de deux unions) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini ("fini" signifie que $m(E) < +\infty$) et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$.

   Corrigé – *Soit* $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*, on a donc* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et* $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*, c'est-à-dire qu'il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in A_p$ *et que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \notin B_n$*. On a donc* $x \in A_p \setminus B_p$*, ce qui prouve que* $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)$ *et donc que*

   $$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n).$$

2. Montrer que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(m(A_n) - m(B_n))$.

Corrigé – *Puisque* $m(E) < +\infty$, *on a, pour tout* $A, B \in T$ *tels que* $B \subset A$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$. *La monotonie de m, la σ-sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :*

$$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n))$$
$$\le m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(m(A_n) - m(B_n)).$$

Exercice 2.19 (Intersection d'ensembles pleins) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = m(E)$. Montrer que $m(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E)$.

Corrigé – *Comme* $m(E) < +\infty$, *on a* $m(A^c) = m(E) - m(A)$ *pour tout* $A \in T$. *De* $m(A_n) = m(E)$, *on déduit alors* $m(A_n^c) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Par σ-sous additivité de m, on a alors* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c) = 0$. *Comme* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$, *on a donc*

$$m((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) = 0 \text{ et donc } m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = m(E).$$

Exercice 2.20 (Sur la mesure d'une union) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$. On suppose que $m(A_p) < +\infty$ pour tout p. Montrer que

$$m(\bigcup_{p=1}^{n}(B \cap A_p)) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} m(B \cap (\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}))\right). \tag{2.19}$$

Corrigé – *On va montrer que pour toute mesure finie, notée μ, sur* $\mathcal{A}$, *on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et toute famille* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})\right). \tag{2.20}$$

Ceci est suffisant pour montrer (2.19). En effet, on pose $C = B \cup (\bigcup_{i=p}^{n} A_p)$ *et on définit μ en posant, pour* $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = m(A \cap C)$ *(on a bien ainsi une mesure finie sur* $\mathcal{A}$*). L'égalité (2.19) est alors identique à (2.20).*

Pour montrer (2.20), on raisonne par récurrence sur n. L'égalité (2.20) est clairement vraie pour $n = 1$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *On suppose que (2.20) est vraie pour cette valeur de n et pour toute mesure finie sur* $\mathcal{A}$ *et il s'agit donc de montrer (2.20) pour* $n + 1$ *au lieu de n.*

Soit μ *une mesure finie sur* $\mathcal{A}$ *et* $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$*, on a (comme* $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C)$ *pour tout* $B, C \in \mathcal{A}$*)*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n+1} A_p) = \mu((\bigcup_{p=1}^{n} A_p) \cup A_{n+1}) = \mu(A_{n+1}) + \mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) - \mu(A_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} A_p)). \quad (2.21)$$

On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence pour la famille $A_1, \ldots, A_n$ *et la mesure* μ*. On obtient*

$$\mu(\bigcup_{p=1}^{n} A_p) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mu(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) \right). \quad (2.22)$$

Mais, on peut aussi utiilser l'hypothèse de récurrence pour la famille $A_1, \ldots, A_n$ *et la mesure* μ_1 *définie par* $\mu_1(C) = \mu(C \cap A_{n+1})$ *pour* $C \in \mathcal{A}$ *(ce qui revient a écrire (2.19) avec* μ *au lieu de* m *et* A_{n+1} *au lieu de* B*). On obtient*

$$\mu(A_{p+1} \cap (\bigcup_{p=1}^{n} A_p)) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mu(A_{n+1} \cap (\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j})) \right). \quad (2.23)$$

En utilisant (2.22) et (2.23) dans (2.21), on obtient bien (2.20), ce qui termine cette démonstration.

Exercice 2.21 (Contre-exemples) 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. A-t-on nécessairement A fermé ?

Corrigé – *Non,* A *n'est pas nécessairement fermé. On peut prendre, par exemple* $A = \{\frac{1}{n}, n \ge 1\}$*. On a* $\lambda(A) = 0$ *et* A *n'est pas fermé (car* 0 *appartient à l'adhérence de* A *sans être dans* A*).*

2. Soit (E, T) un espace mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ qui engendre T. On considère m_1 et m_2 des mesures sur T. Montrer que $m_1(A) = m_2(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$ n'implique pas que $m_1 = m_2$ sur T. [On pourra trouver un exemple (facile) avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 non finies. Un exemple avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m_1, m_2 finies est aussi possible mais plus difficile à trouver. . .]

Corrigé – *On prend* $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*.*

Exemple facile (avec m_1*,* m_2 *non finies).*

On prend

$$\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}.$$

On a bien $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire que* $\mathcal{C}_1$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(voir la proposition 2.10).*
On prend alors $m_1 = \lambda$ *et* $m_2 = 2\lambda$ *(c'est-à-dire* $m_2(B) = 2\lambda(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*
On a bien $m_1(B) = m_2(B)$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}_1$ *(car on a alors* $m_1(B) = m_2(B) = +\infty$*).*
Mais $m_1 \ne m_2$ *puisque, par exemple,* $m_1(]0, 1[) = 1$ *et* $m_2(]0, 1[) = 2$*.*

Exemple difficile (avec m_1*,* m_2 *finies).*

On prend maintenant $\mathcal{C}_2 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, \{-1, 0, 1\} \cap B = \emptyset\} \cup \{\{-1, 0\}\} \cup \{\{0, 1\}\}$ *(un élément de* $\mathcal{C}_2$ *est donc un borélien ne contenant ni* -1 *ni* 0 *ni* 1*, ou bien la partie*

$\{-1,0\}$, ou bien la partie $\{0,1\}$). On montre d'abord que $T(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il est clair que $T(\mathcal{C}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$, on remarque que $\{0\} = \{-1,0\} \cap \{0,1\} \in T(\mathcal{C}_2)$ et donc que $\{-1\} = \{-1,0\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$, $\{1\} = \{0,1\} \setminus \{0\} \in T(\mathcal{C}_2)$. Finalement on voit alors que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset T(\mathcal{C}_2)$ car tout borélien s'écrit comme un borélien ne contenant ni -1 ni 0 ni 1 (qui appartient donc à $T(\mathcal{C}_2)$), auquel on ajoute éventuellement 1, 2 ou 3 autre(s) élément(s) de $T(\mathcal{C}_2)$ (qui sont les parties $\{0\}$, $\{-1\}$ et $\{1\}$, on conclut alors avec la stabilité par union finie de la tribu $T(\mathcal{C}_2)$).

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ si $a \in B$ et $\delta_a(B) = 0$ si $a \notin B$. On prend alors $m_1 = \delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ et $m_2 = 2\delta_{-1} + 2\delta_1$. On a clairement $m_1 = m_2$ sur $\mathcal{C}_2$ car $m_1(B) = m_2(B) = 0$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est tel que $\{-1,0,1\} \cap B = \emptyset$ et $m_1(\{-1,0\}) = m_2(\{-1,0\}) = m_1(\{0,1\}) = m_2(\{0,1\}) = 2$. Enfin, on a $m_1 \neq m_2$ puisque, par exemple, $m_1(\{0\}) = 1$ et $m_2(\{0\}) = 0$.

Exercice 2.22 (Résultat d'unicité) Soit (E,T) un espace mesurable et m, μ deux mesures sur T. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{C}$ engendre T et que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.

On suppose que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

1. On suppose que $E \in \mathcal{C}$ et que $m(E) < +\infty$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$. [On pourra introduire $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m(A) = \mu(A)\}$ et utiliser l'exercice 2.14.]

   Corrigé – *On pose $\mathcal{D} = \{A \in T,\ m(A) = \mu(A)\}$. La σ−additivité de m et μ montre que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe. Comme $m(E) < +\infty$, on peut aussi montrer que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). En effet, si $A, B \in \mathcal{D}$, avec $B \subset A$, on a (par additivité de m et μ) $m(B) + m(A \setminus B) = m(A)$ et $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$. Comme $m(A) < +\infty$ et $\mu(A) < +\infty$, on a donc $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ et $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, ce qui prouve que $m(A \setminus B) = \mu(A \setminus B)$ et donc que $A \setminus B \in \mathcal{D}$. Enfin, $E \in \mathcal{D}$ car $E \in \mathcal{C}$.*

   On utilise maintenant l'exercice 2.14. L'ensemble $\mathcal{D}$ est un système de Dynkin (voir l'exercice 2.14) contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset T$ et donc finalement $\mathcal{D} = T$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset T$).

   On a donc bien montré que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

2. (Généralisation de la question précédente).
   On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ telle que $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Montrer que $m(A) = \mu(A)$ pour tout $A \in T$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $A \in T$, on pose $m_n(A) = m(A \cap E_n)$ et $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n)$ (noter que $A \cap E_n \in T$, car $A, E_n \in T$). On obtient ainsi deux mesures sur T, m_n*

et μ_n. Ces deux mesures sont égales sur $\mathcal{C}$ (car $A \cap E_n \in \mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie).

On raisonne alors comme à la question précédente. On pose $\mathcal{D} = \{A \in T, m_n(A) = \mu_n(A)\}$ et le raisonnement de la question précédente donne que $E \in \mathcal{D}$ (car $E_n \in \mathcal{C}$), que $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable disjointe et (grâce à $m_n(E) < +\infty$) que $\mathcal{D}$ est stable par différence (au sens de l'exercice 2.14). L'ensemble $\mathcal{D}$ est donc un système de Dynkin contenant $\mathcal{C}$. Il contient donc le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$), Comme $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, l'exercice 2.14 donne que le système de Dynkin engendré par $\mathcal{C}$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ (qui est T). On a donc $\mathcal{D} \supset T$ et donc finalement $\mathcal{D} = T$ (car, par définition, $\mathcal{D} \subset T$).

On a donc, pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$m(A \cap E_n) = m_n(A) = \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n).$$

On en déduit que $m(A) = \mu(A)$, pour tout $A \in T$, car, par σ–additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A \cap E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A \cap E_n) = \mu(A)$.

3. Avec $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple pour lequel $E \in \mathcal{C}$ et $m \neq \mu$.

   Corrigé – *Un exemple simple est obtenu en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, $\mu = 2m$ et m définie sur T par $m(A) = card(A)$ si A a un nombre fini d'éléments et $m(A) = +\infty$ sinon.*

Exercice 2.23 (Existence d'une mesure, de l'algèbre à la σ-algèbre) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}_0$ une algèbre sur Ω et m une mesure sur $\mathcal{F}_0$ (c'est-à-dire que m est une application de $\mathcal{F}_0$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $m(\emptyset) = 0$ et $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}_0$ disjoints deux à deux et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_0$). On note $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Cette exercice montre qu'il est possible de prolonger m en une mesure sur $\mathcal{F}$.

Pour $A \subset \Omega$ on pose

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n), (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}.$$

1. Montrer que m^* vérifie les 3 propriétés suivantes :
   — $m^*(\emptyset) = 0$,
   — (monotonie de m^*) pour tout $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$,
   — (σ-sous-additivité de m^*) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n)$.

   N.B. : On dit que m^* est une mesure extérieure.

   Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

   On dit que A est m^*-mesurable si on a, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.

   On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties de E m^*-mesurables.

2. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que A est m^*-mesurable si et seulement si on a, pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $m^*(E) < +\infty$, $m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$.
3. Montrer que $\mathcal{M}$ est une algèbre. [On montrera que $\Omega \in \mathcal{M}$, puis que $A \cap B^c \in \mathcal{M}$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}$.]
4. Montrer que $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre. [On pourra montrer, par exemple, que $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable.]
5. Montrer que la restriction de m^* à $\mathcal{M}$ est une mesure.
6. Montrer que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ et que $m^* = m$ sur $\mathcal{F}_0$. En déduire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ et que la restriction de m^* à $\mathcal{F}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ prolongeant m.

Exercice 2.24 (Un pas vers l'unicité d'une mesure) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu_1(A) = \mu_2(A) < +\infty$. On pose $\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)\}$. Montrer que $\mathcal{L}$ est un λ-système (c'est-à-dire que $\mathcal{L}$ est stable par union dénombrable croissante, $\Omega \in \mathcal{L}$ et $B \setminus C \in \mathcal{L}$ si $B, C \in \mathcal{L}$ avec $C \subset B$).

Corrigé – *Soit* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{L}$*. On pose* $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$*. On veut montrer que* $B \in \mathcal{L}$*. On remarque d'abord que* $B \in \mathcal{F}$ *(par stabilité de* $\mathcal{F}$ *par union dénombrable). Puis, comme* $A \cap B = \cup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap B_n)$ *et que* $\mu_1(A \cap B_n) = \mu_2(A \cap B_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la continuité croissante de* μ_1 *et* μ_2 *donne que* $\mu_1(A \cap B) = \mu_2(A \cap B)$*. On a donc* $B \in \mathcal{L}$ *et ceci montre la stabilité de* $\mathcal{L}$ *par union dénombrable croissante.*

On a bien $\Omega \in \mathcal{L}$ *car* $\mu_1(A \cap \Omega) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \mu_2(A \cap \Omega)$*.*

On montre maintenant la troisième propriété. Soit $B, C \in \mathcal{L}$ *avec* $C \subset B$*. On veut montrer que* $B \setminus C \in \mathcal{L}$*. On remarque d'abord que* $B \setminus C = B \cap C^c \in \mathcal{F}$ *par stabilité de* $\mathcal{F}$ *par passage au complémentaire et par intersection.*
Puis, on a $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$*. Comme* $\mu_1(A) < +\infty$ *et* $\mu_2(A) < +\infty$ *on a aussi* $\mu_1(A \cap C) < +\infty$ *et* $\mu_2(A \cap C) < +\infty$ *et donc*

$$\mu_1((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_1(A \cap B) - \mu_1(A \cap C),$$
$$\mu_2((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_2(A \cap B) - \mu_2(A \cap C).$$

Comme $B, C \in \mathcal{L}$*, on en déduit que* $\mu_1((A \cap B) \setminus (A \cap C)) = \mu_2((A \cap B) \setminus (A \cap C))$ *et donc*

$$\mu_1(A \cap (B \setminus C)) = \mu_2(A \cap (B \setminus C)).$$

Ceci montre que $B \setminus C \in \mathcal{L}$ *et termine la démonstration du fait que* $\mathcal{L}$ *est un λ-système.*

Exercice 2.25 (Mesure atomique, mesure diffuse) Soit (E, T) un espace mesurable tel que $\{x\} \in T$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est diffuse si $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$. Une mesure m sur T est purement atomique s'il existe $S \in T$ tel que $m(S^c) = 0$ et $m(\{x\}) > 0$ si $x \in S$.

1. Montrer qu'une mesure purement atomique et diffuse est nulle. Donner, pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ un exemple de mesure purement atomique et un exemple de mesure diffuse. [Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est diffuse.]

Corrigé – *Soit m une mesure purement atomique et soit* $S \in T$ *tel que* $m(S^c) = 0$ *et* $m(\{x\}) > 0$ *si* $x \in S$. *Si m est diffuse, on a* $m(\{x\}) = 0$ *pour tout* $x \in E$, *donc* $S = \emptyset$ *et* $m = 0$.

On rappelle que, pour $a \in \mathbb{R}$, *on note* δ_a *la mesure de Dirac sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a donc, pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(B) = 1$ *si* $a \in B$ *et* $\delta_a(B) = 0$ *si* $a \notin B$. *La mesure* δ_a *est (pour tout* $a \in \mathbb{R}$*) purement atomique, il suffit de prendre* $S = \{a\}$, *on a bien* $\delta_a(S^c) = 0$ *et* $\delta_a(\{a\}) = 1 > 0$.

Un exemple de mesure diffuse sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est donné par la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit m une mesure diffuse sur T. Montrer que tous les ensembles dénombrables sont de mesure nulle.

   Corrigé – *Soit* A *une partie dénombrable de* E. *Il existe donc une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *telle que* $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. *On a donc* $A \in T$ *(car* $\{x_n\} \in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que* T *est stable par union dénombrable) et* $m(A) \le \sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = 0$ *car m est diffuse.*

3. Soit m une mesure sur T. On suppose que m est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $m(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que l'ensemble des $x \in E$ tels que $m(\{x\}) > 0$ (de tels x sont appelés “atomes” de m) est au plus dénombrable. [On pourra introduire l'ensemble $A_{n,k} = \{x \in E_n;\ m(x) \ge \frac{1}{k}\}$.]

   Corrigé – *On pose* $A = \{x \in E;\ m(\{x\}) > 0\}$. *Si* $x \in A$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \in E_n$ *et il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m(\{x\}) \ge \frac{1}{k}$. *On a donc* $x \in A_{n,k}$. *Ceci montre que* $A = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} A_{n,k}$. *Pour montrer que* A *est au plus dénombrable, il suffit de montrer que* $A_{n,k}$ *est au plus dénombrable (car une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable). Soit donc* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $x_1, \ldots, x_p$ *p éléments distincts de* $A_{n,k}$. *Par monotonie et additivité de m, on a* $\frac{p}{k} \le \sum_{n=1}^{p} m(\{x_n\}) = m(\{x_1, \ldots, x_p\}) \le m(E_n) < +\infty$. *On en déduit que* $p \le km(E_n) < +\infty$ *et donc que* $A_{n,k}$ *a un nombre fini d'éléments (ce nombre est inférieur ou égal à* $km(E_n)$*). On en déduit donc que* A *est au plus dénombrable.*

   (b) Montrer qu'il existe une mesure diffuse m_d et une mesure purement atomique m_a sur T telles que $m = m_d + m_a$. Montrer que m_d et m_a sont étrangères, c'est-à-dire qu'il existe $A \in T$ tel que $m_d(A) = 0$ et $m_a(A^c) = 0$.

   Corrigé – *On considère toujours* $A = \{x \in E;\ m(\{x\}) > 0\}$. *On remarque tout d'abord que* $A \in T$ *(car* A *est au plus dénombrable, d'après la question précédente, et que les singletons, c'est-à-dire les parties réduites à un seul élément, sont dans* T*). On pose alors, pour tout* $B \in T$ *:*

   $$m_a(B) = m(B \cap A),\ \ m_d(B) = m(B \cap A^c).$$

   Il est facile de voir que m_d *et* m_a *sont des mesures sur* T *et que, par additivité de m, on a bien* $m = m_a + m_d$.

La mesure m_d est diffuse car, si $x \in \mathrm{E}$, on a $m_d(\{x\}) = m(\{x\}) = 0$ si $x \in \mathrm{A}^c$ (car A contient tous les points tels que $m(\{x\}) > 0$) et $m_d(\{x\}) = m(\emptyset) = 0$ si $x \in \mathrm{A}$ (car $\{x\} \cap \mathrm{A}^c = \emptyset$).

La mesure m_a est purement atomique. Il suffit de prendre $\mathrm{S} = \mathrm{A}$, on a bien $m_a(\mathrm{S}^c) = m(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{A}) = 0$ et $m_a(\{x\}) = m(\{x\}) > 0$ si $x \in \mathrm{S} = \mathrm{A}$.

Enfin, m_a et m_d sont étrangères car $m_d(\mathrm{A}) = 0$ et $m_a(\mathrm{A}^c) = 0$.

(c) Montrer que si m est finie il existe un singleton dont la mesure est supérieure ou égale à la mesure de tous les autres singletons. Montrer que ceci peut-être inexact si m n'est que σ-finie.

Corrigé – *On suppose que m est finie. Soit $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\}$. On veut montrer qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\mathrm{M} = m(\{x\})$. On suppose $\mathrm{M} > 0$ (sinon, il suffit de prendre n'importe quel $x \in \mathrm{E}$ pour avoir $m(\{x\}) = \mathrm{M}$). On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que $m(\{x\}) < \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Par définition de M, Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{E}$ tel que $m(\{x_n\}) \to \mathrm{M}$ quand $n \to +\infty$. Comme $m(\{x_n\}) < \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut même supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $m(\{x_n\}) < m(\{x_{n+1}\}) < \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à supprimer les premiers termes de la suite, on peut aussi supposer que $m(\{x_0\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$. Les points x_n sont alors tous distincts, ce qui donne $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = m(\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}) \le m(\mathrm{E})$. Ceci est impossible car $m(\mathrm{E}) < +\infty$ et $m(\{x_n\}) > \frac{\mathrm{M}}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc $\sum_{n=0}^{+\infty} m(\{x_n\}) = +\infty$).*

Exemple de mesure σ-finie pour laquelle M n'est pas atteint.

Sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on définit m par $m(\mathrm{B}) = \sum_{n=2}^{+\infty}(1 - \frac{1}{n})\delta_n(\mathrm{B})$ (où δ_n est la mesure de Dirac au point $n \in \mathbb{N}$, définie en (2.2)).

Pour montrer que m est une mesure, on peut remarquer, en posant $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N};\ n \ge 2\}$, que $m(\mathrm{B}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in\mathrm{B}}(1 - \frac{1}{n})$. Si $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$ avec $\mathrm{B}_p \cap \mathrm{B}_q = \emptyset$ si $p \neq q$, on a

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} m(\mathrm{B}_p) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}_2; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n})$$

(on utilise ici le lemme 2.38 page 58). Comme les B_p sont disjoints deux à deux, n appartient à B_p pour au plus 1 p, et comme $\mathrm{B} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_p$, on obtient

$$\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}_p} (1 - \frac{1}{n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_2\times\mathbb{N}; n\in\mathrm{B}} (1 - \frac{1}{n}) = m(\mathrm{B}).$$

Ceci prouve la σ-additivité de m. Le fait que $m(\emptyset) = 0$ est immédiat. On a donc bien montré que m est une mesure.

La mesure m est bien σ-finie, il suffit de remarquer que $m([-n, n]) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$. enfin, pour cette mesure m, on a $\mathrm{M} = \sup\{m(\{x\}),\ x \in \mathrm{E}\} = 1$ et il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $m(\{x\}) = 1$. En fait, m est purement atomique car $m((\mathbb{N}_2)^c) = 0$ et on a $0 < m(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbb{N}_2$.

4. Pour $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donner un exemple de mesure purement atomique finie dont l'ensemble des atomes est infini.

Corrigé – *Un tel exemple est obtenu en modifiant légèrement la mesure construite à la question précédente. Sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *on définit* m *par* $m(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\delta_n(B)$. *Une démonstration analogue à celle faite à la question précédente montre que* m *est bien une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*,* m *est finie (on a* $m(\mathbb{R}) = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$*), et* m *est atomique car* $m((\mathbb{N}^*)^c) = 0$ *et* $0 < m(\{x\}) < 1$*, pour tout* $x \in \mathbb{N}^*$*. L'ensemble des atomes de* m *est infini, c'est* $\mathbb{N}^*$*.*

Exercice 2.26 (Limites sup et inf d'ensembles) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$*. On rappelle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p \text{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p.$$

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_p) < +\infty$*. Montrer que*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) \leq m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé –

- *La propriété de continuité croissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p).$$

La monotonie de m *donne* $m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq m(A_q)$ *pour tout* $q \geq n$*. On a donc* $m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \inf_{p\geq n} m(A_p)$ *et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} m(\bigcap_{p\geq n} A_p) \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} m(A_p)),$$

soit encore

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} m(A_n).$$

- *De* $\inf_{p\geq n} m(A_p) \leq \sup_{p\geq n} m(A_p)$*, on déduit*

$$\liminf_{n\to+\infty} m(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n).$$

- *Comme il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(\bigcup_{p\geq n_0} A_p) < +\infty$*, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne*

$$m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p).$$

La monotonie de m *donne* $m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq m(A_q)$ *pour tout* $q \geq n$*. On a donc*

$$m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \sup_{p\geq n} m(A_p)$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} m(\bigcup_{p\geq n} A_p) \geq \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} m(A_p))$*, c'est-à-dire*

$$m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to+\infty} m(A_n).$$

2. Donner un exemple (c'est-à-dire choisir (E,T,m) *et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset T$*) pour lequel :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) > m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E,T,m)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ *et* $A_n=[n,n+1[$*, pour tout* $n\in\mathbb{N}$*. On obtient alors :*

$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 1 > 0 = m(\emptyset) = m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

3. Donner un exemple avec m finie (c'est-à-dire $m(E)<+\infty$*) pour lequel*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) < \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) < \limsup_{n\to+\infty} m(A_n) < m(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

Corrigé – *On prend* $(E,T,m)=([0,4],\mathcal{B}([0,4]),\lambda)$ *(plus précisément,* λ *est ici la restriction à* $\mathcal{B}([0,4])$ *de* λ *qui est une mesure sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* $A_{2n}=[0,2]$*,* $A_{2n+1}=[1,4]$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$*. On obtient* $\limsup_{n\to+\infty} A_n=[0,4]$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} A_n=[1,2]$*. On a ainsi :*

$$m(\liminf_{n\to+\infty} A_n) = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty} m(A_n) = 2,$$
$$\limsup_{n\to+\infty} m(A_n) = 3, \qquad m(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 4.$$

4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)<+\infty$*. Montrer que* $m(\limsup_{n\to+\infty} A_n)=0$*.*

Corrigé – *De* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)<+\infty$ *on déduit* $\sum_{p=n}^{+\infty} m(A_p)\to 0$ *quand* $n\to+\infty$ *et donc* $m(\bigcup_{p\ge n} A_p)\to 0$ *quand* $n\to+\infty$ *(car, par* σ*-sous additivité de m, on a* $m(\bigcup_{p\ge n} A_p)\le\sum_{p=n}^{+\infty} m(A_p)$*).*
Par continuité décroissante de m, on en déduit alors $m(\limsup_{n\to+\infty} A_n)=0$*.*

Exercice 2.27 (Petit ouvert dense...) On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Soit $\varepsilon>0$, peut-on construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure inférieure à ε ? [On rappelle qu'une partie A de R est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A}=\mathbb{R}$ ou encore si, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a\in A$ tel que $|x-a|<\varepsilon$.]

Corrigé – *La réponse est oui.... Soit* $\varepsilon>0$*. Comme* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable, il existe* $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$*, bijective. On considère alors* $O=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\varphi(n)-\frac{\varepsilon}{2^{n+2}},\varphi(n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$*.* O *est bien un ouvert (comme réunion d'ouverts), dense dans* $\mathbb{R}$ *(car* $O\supset\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$*) et, par* σ*-sous additivité d'une mesure, on a* $\lambda(O)\le\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\varepsilon$*.*

Exercice 2.28 (Non existence de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$)

On définit la relation d'équivalence sur $[0,1[$: xRy si $x-y\in\mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome du choix, on construit un ensemble $A\subset[0,1[$ tel que A contienne un élément et

un seul de chaque classe d'équivalence. Pour $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$, on définit $\mathrm{A}_q = \{y \in [0,1[; y = x+q$ ou $y = x+q-1, x \in \mathrm{A}\}$, c'est-à-dire $\mathrm{A}_q = \{y \in [0,1[\,;\, y-q \in \mathrm{A}$ ou $y-q+1 \in \mathrm{A}\}$.

1. Montrer que $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q = [0,1[$.

   Corrigé – *Soit $y \in [0,1[$, il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $y\mathrm{R}x$ (car A contient un élément dans chaque classe d'équivalence), c'est-à-dire $y-x \in \mathbb{Q}$. Comme $y-x \in]-1,1[$ (car $x, y \in [0,1[$), on a donc $y-x = q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$ ou $y-x+1 = q \in \mathbb{Q}\cap]0,1[$. Ceci donne $y \in \mathrm{A}_q$. On a donc $[0,1[\subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q$. Comme $\mathrm{A}_q \subset [0,1[$ pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$, on a finalement $[0,1[= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} \mathrm{A}_q$.*

   Il est important aussi de remarquer que les A_q sont disjoints deux à deux. En effet, si $y \in \mathrm{A}_q \cap \mathrm{A}_{q'}$, il existe $x, x' \in \mathrm{A}$ tels que $y-x = q$ ou $(q-1)$ et $y-x' = q'$ ou $(q'-1)$. On en déduit $x-x' \in \mathbb{Q}$ et donc $x = x'$ (car A contient un seul élément de chaque classe d'équivalence). Ceci donne $q = q' = y-x$ (si $y-x \in [0,1[$) ou $q = q' = y-x+1$ (si $y-x \in]-1,0[$).

2. Montrer que si m est une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, invariante par translation et vérifiant $m([0,1[) = 1$, m ne peut pas être σ- additive. En déduire la non-existence d'une mesure m, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En particulier, montrer que l'application λ^*, définie en cours, ne peut pas être une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Corrigé – *On suppose que m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ vérifiant $m([0,1[) = 1$. La σ- additivité de m donne alors, avec la première question,*

$$1 = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q). \tag{2.24}$$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{B}+x = \{y+x,\ y \in \mathrm{B}\}$. On suppose que m est invariante par translation, on a donc $m(\mathrm{B}+x) = m(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

   On remarque maintenant que $\mathrm{A}_q = ((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[) \cup ((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. De plus, si $y \in ((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[)\cap((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[)$, il existe $x, x' \in \mathrm{A}$ tels que $y = x+q = x'+q-1$, donc $x'-x = 1$, ce qui est impossible. Ceci montre que $((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[)\cap((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[) = \emptyset$. On a donc, en utilisant l'additivité de m, l'invariance par translation de m et le fait que $\mathrm{A}+q \subset [0,2[$, $m(\mathrm{A}_q) = m((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[)+m((\mathrm{A}+q-1)\cap[0,1[) = m((\mathrm{A}+q)\cap[0,1[)+m((\mathrm{A}+q)\cap[1,2[) = m(\mathrm{A}+q) = m(\mathrm{A})$, pour tout $q \in \mathbb{Q}\cap[0,1[$. On en déduit $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) = 0$ si $m(\mathrm{A}) = 0$ et $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) = +\infty$ si $m(\mathrm{A}) > 0$, et donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1[} m(\mathrm{A}_q) \neq 1$, en contradiction avec (2.24). Il n'existe donc pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([0,1[) = 1$.

   Si m est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, invariante par translation et telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On montre que $m[0,1[= 1$ en utilisant la continuité croissante de m et le fait que $[0,1[= \bigcup_{n\geq 1}[0,1-\frac{1}{n}]$. Il est donc impossible de trouver une telle mesure.

L'application λ^* définie en cours sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) est invariante par translation et vérifie $\lambda^*([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Elle n'est donc pas σ-additive sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.29 (Non existence d'une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ donnant la longueur) Cet exercice est plus général que le précédent car on veut montrer qu'il n'existe pas de mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m([a,b]) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sans l'hypothèse d'invariance par translation de l'exercice précédent.

Soit E un ensemble infini non dénombrable, sur lequel on suppose qu'il existe un ordre total, noté $\le$, tel que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{y \in E; y \le x\}$ est dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une application f_x injective de cet ensemble dans $\mathbb{N}$. Si $E = \mathbb{R}$ ou $E = [0,1]$, on peut démontrer l'existence d'un tel ordre (ceci est une conséquence de l'axiome du continu). Soit m une mesure sur $\mathcal{P}(E)$; on suppose que m est finie, *i.e.* $m(E) < +\infty$, et diffuse. On se propose de montrer que m est nulle, *i.e.* $m(A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} = \{y \in E; y > x \text{ et } f_y(x) = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in E$, $x \ne y$, et $n \in \mathbb{N}$, $A_{x,n} \cap A_{y,n} = \emptyset$.
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x \in E; m(A_{x,n}) \ne 0\}$ est au plus dénombrable (utiliser le fait que m est finie).

   Corrigé – *Soient $x, y \in E$, $x \ne y$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A_{x,n} \cap A_{y,n} \ne \emptyset$. Soit $z \in A_{x,n} \cap A_{y,n}$. Comme $z \in A_{x,n}$, on a $z > x$ et $f_z(x) = n$. De même, comme $z \in A_{y,n}$, on a $z > y$ et $f_z(y) = n$. On a donc $f_z(x) = f_z(y)$ et, comme f_z est injective, $x = y$, en contradiction avec l'hypothèse.*
   On en déduit bien que $A_{x,n} \cap A_{y,n} = \emptyset$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $\{x \in E; m(A_{x,n}) \ne 0\} = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} C_p$ avec $C_p = \{x \in E; m(A_{x,n}) > 1/p\}$ puis que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, C_p est de cardinal fini. En effet, si $x_1, \ldots, x_q \in C_p$ avec $x_i \ne x_j$ pour $i \ne j$, on a

   $$E \supset \cup_{i=1}^{q} A_{x_i,n},$$

   et donc par monotonie et additivité de m,

   $$m(E) \ge \sum_{i=1}^{q} m(A_{x_i,n}) \ge \frac{q}{p},$$

   ce qui donne $q \le p m(E)$ et donc que C_p a un nombre fini éléments. L'ensemble $\{x \in E; m(A_{x,n}) \ne 0\}$ est donc au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables (et même finis dans le cas présent).

2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(A_{x,n}) = 0$.

   Corrigé – *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{x \in E; m(A_{x,n}) \ne 0\}$. La question précédente montre que B_n est au plus dénombrable. L'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est donc aussi au plus dénombrable. Comme E est infini non dénombrable, il existe donc $x \in E$ tel quex $\notin \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Pour cet élément x de E on a donc $m(A_{x,n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. En déduire que m est nulle (montrer pour cela que $m(\mathrm{E}) = 0$ en utilisant la question précédente et le fait que m est diffuse).

Corrigé – *On choisit $x \in \mathrm{E}$ tel que $m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $\mathrm{E} = \mathrm{B} \cup \mathrm{C}$ avec $\mathrm{B} = \{y \in \mathrm{E};\, y \leq x\}$ et $\mathrm{C} = \{y \in \mathrm{E};\, y > x\}$. L'ensemble B est dénombrable. Comme m est diffuse, on a donc $m(\mathrm{B}) = 0$.*

On montre maintenant que $\mathrm{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_{x,n}$ (et donc, par σ-sous-additivité de m, $m(\mathrm{E}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_{x,n}) = 0$). On a $\mathrm{A}_{x,n} \subset \mathrm{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $y \in \mathrm{C}$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{E}$, $y > x$. Comme f_y est une application de $\{z \in \mathrm{E}; z < y\}$ dans $\mathbb{N}$, on a $f_y(x) \in \mathbb{N}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_y(x) = n$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{A}_{x,n}$. On a donc bien $\mathrm{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_{x,n}$.

On en déduit $m(\mathrm{C}) = 0$ et donc $m(\mathrm{E}) = m(\mathrm{B}) + m(\mathrm{C}) = 0$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Corrigé – *On suppose qu'il existe une mesure m sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $m(]a,b[) = b-a$ pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*

Par continuité croissante de m, on a

$$m([0,1]) = \lim_{n\to+\infty} m(]+1/n, 1-1/n[) = 1.$$

Par continuité décroissante de m, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$m(\{a\}) = \lim_{n\to+\infty} m(]a-1/n, a+1/n[) = 0.$$

On choisit $\mathrm{E} = [0,1]$. La restriction de m à $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est donc une mesure finie et diffuse. La question précédente nous donne donc que m est nulle, en contradiction avec $m(\mathrm{E}) = 1$.

Exercice 2.30 (Une caractérisation de la mesure de Lebesgue) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que pour tout intervalle I et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $m(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I}+x)$ (avec $\mathrm{I}+x = \{a+x,\, a \in \mathrm{I}\}$) et $m([0,1]) = 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = 0$ (*i.e.* m est diffuse). En déduire que m est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. [On pourra découper $[0,1[$ en q intervalles de longueur $1/q$.]

Corrigé – *On pose $m(\{0\}) = \alpha$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $\mathrm{I} = \{0\}$ (I est bien un intervalle) de sorte que $\mathrm{I}+x = \{x\}$. On a alors $\alpha = m(\{0\}) = m(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I}+x) = m(\{x\})$. On a donc montré que $m(\{x\}) = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $\alpha = 0$, il suffit, par exemple, de remarquer que, en utilisant la σ-additivité de m :*

$$1 = m([0,1]) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m(\{\frac{1}{n}\}) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha.$$

On en déduit $\alpha = 0$ (sinon, le membre de droite de la précédente inégalité est égal à $+\infty$ et l'inégalité est alors fausse).

On a donc bien montré que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci donne, en particulier que $1 = m([0,1]) = m([0,1[) + m(\{1\}) = m([0,1[)$.

Soit maintenant $q \in \mathbb{N}^*$. *On a* $m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = m([0, \frac{1}{q}[)$ *pour tout* $i \in \{0, \ldots, q-1\}$, *car* $[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+ \frac{i}{q}$. *On en déduit :*

$$1 = m([0,1[) = \sum_{i=0}^{q-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = qm([0, \frac{1}{q}[),$$

et donc $m([0, \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$. *Ceci donne aussi, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $m([x, x + \frac{1}{q}[) = \frac{1}{q}$, *car* $[x, x + \frac{1}{q}[= [0, \frac{1}{q}[+ x$.

En utilisant l'additivité de m, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$m([0, \frac{p}{q}[) = \sum_{i=0}^{p-1} m([\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}[) = \frac{p}{q}. \tag{2.25}$$

De (2.25), on va déduire $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha < \beta$. *En effet, soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha < \beta$. *Comme* $[\alpha, \beta[= [0, \gamma[+ \alpha$, *avec* $\gamma = \beta - \alpha$, *on a* $m([\alpha, \beta[) = m([0, \gamma[)$. *Il existe alors deux suites* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^*$ *et* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_+^*$ *telles que* $r_n \uparrow \gamma$ *et* $s_n \downarrow \gamma$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $[0, r_n[\subset [0, \gamma[\subset [0, s_n[$, *on a, grâce à (2.25),* $r_n = m([0, r_n[) \le m([0, \gamma[) \le m([0, s_n[) = s_n$. *En faisant* $n \to +\infty$, *on en déduit que* $m([0, \gamma[) = \gamma$ *et donc* $m([\alpha, \beta[) = \beta - \alpha$.

Enfin, comme $m(\{\alpha\}) = 0$, *on a aussi*

$$m(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta.$$

La partie "unicité" du théorème de Carathéodory donne alors $m = \lambda$.

Exercice 2.31 (Support d'une mesure sur les boréliens) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de mesure nulle pour m. L'ensemble fermé complémentaire de cet ouvert s'appelle *le support* de m. [On pourra, par exemple, considérer les pavés à extrémités rationnelles qui sont de mesure nulle pour m.]

Corrigé – *On note* A *l'ensemble des ouverts de* $\mathbb{R}^d$ *de mesure nulle pour m. L'ensemble* A *est non vide (car l'ensemble vide est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *de mesure nulle). On pose :*

$$\mathrm{O} = \bigcup_{\omega \in \mathrm{A}} \omega.$$

L'ensemble O *est donc la réunion de tous les ouverts de* $\mathbb{R}^d$ *de mesure nulle. Il est clair que* O *est ouvert (car c'est une réunion d'ouverts) et qu'il contient tous les ouverts de* $\mathbb{R}^d$ *de mesure nulle. Pour montrer que* O *est le plus grand ouvert de mesure nulle, il suffit donc de montrer que* O *est de mesure nulle. Pour cela, on va montrer que* O *est une réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle.*

Soit $x = (x_1, \ldots, x_d)^t \in \mathrm{O}$. *Il existe* $\omega \in \mathrm{A}$ *tel que* $x \in \omega$. *Comme* ω *est ouvert, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$\prod_{i=1}^{d}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset \omega.$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$ *il existe* $\gamma_{i,x} \in]x_i - \varepsilon, x_i[\cap\mathbb{Q}$ *et* $\delta_{i,x} \in]x_i, x_i + \varepsilon[\cap\mathbb{Q}$*. On a donc :*

$$x \in \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[\subset \omega \subset \mathrm{O}.$$

Par monotonie d'une mesure, on a $m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) \le m(\omega) = 0$*, et donc*

$$m(\prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[) = 0.$$

Comme $\mathrm{O} = \bigcup_{x\in\mathrm{O}}\{x\}$*, on a aussi :*

$$\mathrm{O} = \bigcup_{x\in\mathrm{O}} \prod_{i=1}^{d}]\gamma_{i,x}, \delta_{i,x}[= \bigcup_{x\in\mathrm{O}} \mathrm{P}_{\gamma_x,\delta_x}, \tag{2.26}$$

en posant $\gamma_x = (\gamma_{1,x},\ldots,\gamma_{d,x})^t$*,* $\delta_x = (\delta_{1,x},\ldots,\delta_{d,x})^t$ *et* $\mathrm{P}_{\gamma,\delta} = \prod_{i=1}^{d}]\gamma_i, \delta_i[$ *(si* $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_d)^t$ *et* $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_d)^t$*).*

On remarque maintenant que, pour tout $x \in \mathrm{O}$*,* $\gamma_x, \delta_x \in \mathbb{Q}^d$*. L'égalité (2.26) donne donc :*

$$\mathrm{O} = \bigcup_{(\gamma,\delta)\in\mathrm{B}} \mathrm{P}_{\gamma,\delta},$$

où B *est une partie de* $\mathbb{Q}^{2d}$ *et* $m(\mathrm{P}_{\gamma,\delta}) = 0$ *pour tout* $(\gamma,\delta) \in \mathrm{B}$*. Comme* $\mathbb{Q}^{2d}$ *est dénombrable, la partie* B *est au plus dénombrable et la* σ*−sous additivité d'une mesure donne alors que* $m(\mathrm{O}) = 0$*.*

Exercice 2.32 (Ensemble de Cantor)

On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. On pose $\mathrm{C}_0 = [0,1]$, $a_1^0 = 0$, $b_1^0 = 1$, et $\alpha_0 = 1$. Pour $n \ge 0$, on construit $\mathrm{C}_{n+1} \subset [0,1]$ de la manière suivante : on suppose $\mathrm{C}_n = \bigcup_{p=1}^{2^n} [a_p^n, b_p^n]$ connu, et on définit $\mathrm{C}_{n+1} = \bigcup_{p=1}^{2^{n+1}} [a_p^{n+1}, b_p^{n+1}]$ où, pour $p = 1,\ldots,2^n$, $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$, $b_{2p-1}^{n+1} = a_p^n + \alpha_{n+1}$, $a_{2p}^{n+1} = b_p^n - \alpha_{n+1}$ et $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$, avec $\alpha_{n+1} = \frac{\rho_n\alpha_n}{2}$, et $0 < \rho_n < 1$. On pose $\mathrm{C} = \bigcap_{n\ge0} \mathrm{C}_n$ (C s'appelle ensemble de Cantor", l'exemple le plus classique est obtenu avec $\rho_n = \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que $\mathrm{C}_{n+1} \subset \mathrm{C}_n$.

   Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$*, la longueur de l'intervalle* $[a_p^n, b_p^n]$ *est* α_n*. Comme* $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$ *et que* $a_{2p-1}^{n+1} = a_p^n$ *et* $b_{2p}^{n+1} = b_p^n$*, on a* $[a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}] \subset [a_p^n, b_p^n]$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$*. En prenant l'union sur* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$*, on en déduit* $\mathrm{C}_{n+1} \subset \mathrm{C}_n$*.*

2. Montrer que C est compact et $\overset{\circ}{\mathrm{C}} = \emptyset$.

   Corrigé – *L'ensemble* C *est fermé (dans* $\mathbb{R}$*) car c'est une intersection de fermés (chaque* C_n *est fermé). D'autre part* $\mathrm{C} \subset [0,1]$*,* C *est donc compact (car fermé et borné dans* $\mathbb{R}$*).*

Comme $\alpha_{n+1} < \frac{\alpha_n}{2}$, on a toujours $b_p^n < a_{p+1}^n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$). Les intervalles composant C_n sont donc disjoints deux à deux et de longueur α_n. Ceci montre que $x, y \in [0,1]$, $(y - x) > \alpha_n$ implique $]x, y[\not\subset C_n$. Comme $\alpha_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ (noter que $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$), on en déduit que $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ ne contient aucun intervalle ouvert (non vide) et donc que $\mathring{C} = \emptyset$.

3. Montrer que C est non dénombrable.

Corrigé – *On commence par définir, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, des points x_c pour $c \in \{1,2\}^n$.*

Pour $n = 1$, $x_{(1)} = a_1^0$ et $x_{(2)} = b_1^0$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que x_c est construit pour tout $c \in \{1,2\}^n$ et que pour chaque $c \in \{1,2\}^n$, $x_c \in \{b_p^{n-1}, p = 1, \ldots, 2^{n-1}\} \cup \{a_p^{n-1}, p = 1, \ldots, 2^{n-1}\}$. On construit maintenant x_c pour $c \in \{1,2\}^{n+1}$. Soit donc $c \in \{1,2\}^{n+1}$, on pose $c = \{\overline{c}, b\}$ avec $\overline{c} \in \{1,2\}^n$ et $d \in \{1,2\}$ et on distingue 4 cas :

(a) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p}^n$,

(b) $x_{\overline{c}} = b_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p}^n$,

(c) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 1$. On pose alors $x_c = a_{2p-1}^n$,

(d) $x_{\overline{c}} = a_p^{n-1}$, avec $p \in \{1, \ldots, 2^{n-1}\}$, $d = 2$. On pose alors $x_c = b_{2p-1}^n$.

Il est intéressant de noter, avec ces formules, que $|x_c - x_{\overline{c}}| \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$ et que $x_c \in C$.

On note S l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$, prenant leurs valeurs dans $\{1,2\}$. Si $c \in S$, on note c_n l'élément de $\{1,2\}^n$ formé par les n premiers termes de la suite et on note $x_n = x_{c_n}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy (car $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$) et incluse dans C, elle converge donc vers un point $x_c \in C$. On remarque que si c et c' sont deux suites différentes, alors $x_c \neq x_{c'}$. En effet soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n = c'_n$ et $c_{n+1} \neq c'_{n+1}$, on alors $|x_{c_m} - x_{c'_m}| \geq (1 - \rho_n)\alpha_n$ pour tout $m > n$ et donc, en passant à la limite quand $m \to +\infty$, $|x_c - x_{c'}| \geq (1 - \rho_n)\alpha_n$, ce qui donne $x_c \neq x_{c'}$. L'application $c \mapsto x_c$ est donc une injection de S dans C. Ceci montre que C est infini non dénombrable (car S est infini non dénombrable).

4. Montrer que si ρ_n ne dépend pas de n, alors $\lambda(C) = 0$. En déduire que si $A \in \mathcal{B}([0,1])$, $\lambda(A) = 0$ n'entraîne pas que A est dénombrable.

Corrigé – *La construction des points a_p^n et b_p^n donne*

$$\lambda([a_{2p-1}^{n+1}, b_{2p-1}^{n+1}] \cup [a_{2p}^{n+1}, b_{2p}^{n+1}]) = 2\alpha_{n+1} = \rho_n \alpha_n = \rho_n \lambda([a_p^n, b_p^n]).$$

En prenant l'union sur $p \in \{1, \ldots, 2^n\}$, on en déduit $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n \lambda(C_n)$.

Si ρ_n ne dépend pas de n, c'est-à-dire $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$, on a donc $\lambda(C_{n+1}) = \rho\lambda(C_n)$. Ceci donne, comme $\lambda(C_0) = 1$, $\lambda(C_n) = \rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(C_n) = 0$.

5. Soit $0 < \epsilon < 1$. Montrer qu'il existe une suite $(\rho_n)_{n\geq 0} \subset]0,1[$ telle que $\lambda(C) = \epsilon$.

Corrigé – *Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]\varepsilon,1]$ telle que $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n \to \varepsilon$ quand $n \to +\infty$ (on peut prendre, par exemple, $\varepsilon_n = \varepsilon - \frac{1-\varepsilon}{n+1}$).*

On prend $\rho_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a bien $0 < \rho_n < 1$ et, comme $\lambda(C_{n+1}) = \rho_n\lambda(C_n)$ (ceci a été démontré à la question précédente), on a donc $\lambda(C_n) = \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité décroissante de λ, on en déduit $\lambda(C) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(C_n) = \varepsilon$.

6. Soit f lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(A) = 0$, alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(f(A)) = 0$.

Corrigé – *Comme f est continue, f transforme les compacts en compacts. Donc, $f(A)$ est bien un compact de $\mathbb{R}$ (et donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).*

On montre maintenant que $\lambda(f(A)) = 0$.

Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On commence par montrer un petit résultat préliminaire. Soit $I = [a,b]$ un intervalle fermé de $[0,1]$ (I est donc compact). Comme f est continue sur $[a,b]$, il existe $x, y \in [a,b]$ tels que $f(x) = m = \min\{f(z),\ z \in [a,b]\}$ et $f(y) = M = \max\{f(z),\ z \in [a,b]\}$. On a donc $f(I) \subset [m,M]$ (en fait, $f(I) = [m,M]$), d'où :

$$\lambda(f(I)) \leq M - m = f(y) - f(x) \leq L|y - x| = L\lambda(I). \tag{2.27}$$

Soit $\eta > 0$. Comme $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, d'après la régularité de λ (voir le théorème 2.43), il existe O, ouvert de $\mathbb{R}$, tel que $A \subset O$ et $\lambda(0) \leq \eta$. D'après le lemme 2.44 page 65, O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. En prenant éventuellement la restriction à $[0,1]$ de ces intervalles, on obtient donc une famille dénombrable, notée $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'intervalles inclus dans $[0,1]$, disjoints deux à deux tels que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$. On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) = \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \leq \eta \text{ et } f(A) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(I_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(\bar{I}_n).$$

On a donc $\lambda(f(A)) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(\bar{I}_n))$. En utilisant (2.27), on a donc

$$\lambda(f(A)) \leq L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(\bar{I}_n) = L\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \leq L\eta.$$

Comme η est arbitrairement petit, on a donc $\lambda(f(A)) = 0$.

7. Construire une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que si A est un compact de $[0,1]$ tel que $\lambda(A) = 0$, on n'a pas forcément $\lambda(f(A)) = 0$ (mais $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$). [Utiliser un ensemble de Cantor de mesure nulle (cf question 4) et un ensemble de Cantor de mesure $\epsilon > 0$ (cf question 5).]

Corrigé – *On note C l'ensemble obtenu dans la question 4, c'est-à-dire avec $\rho_n = \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \rho < 1$ (par exemple, $\rho = \frac{2}{3}$). On note a_n^p, b_n^p, C_n les points et*

ensembles utilisés pour construire C *et on note aussi* $D = \{a_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{b_n^p,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{1,\ldots,2^n\}\}$. *(Noter que* $D \subset C$.*)*

Soit $\varepsilon > 0$. *On note* $\tilde{C}$ *l'ensemble* C *obtenu à la question 5. On a donc* $\lambda(C) = \varepsilon$. *On note* $\tilde{a}_n^p$, $\tilde{b}_n^p$, $\tilde{C}_n$ *les points et ensembles utilisés pour construire* $\tilde{C}$ *et on note aussi*

$$\tilde{D} = \{\tilde{a}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\} \cup \{\tilde{b}_n^p, n \in \mathbb{N}, p \in \{1,\ldots,2^n\}\}.$$

(Noter que $\tilde{D} \subset \tilde{C}$.*)*

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \{1,\ldots,2^n\}$. *On construit une fonction* f *sur l'intervalle* $[b_{2p-1}^{n+1}, a_{2p}^{n+1}]$ *en prenant* f *affine et telle que* $f(b_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{b}_{2p-1}^{n+1}$ *et* $f(a_{2p-1}^{n+1}) = \tilde{a}_{2p-1}^{n+1}$. *On remarque que*

$$f : (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D \to (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$$

est strictement croissante. Comme $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c)^c = C$ *et que* C *est d'intérieur vide,* f *est définie sur une partie dense de* $[0,1]$ *et, comme* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c)^c = \tilde{C}$ *et que* $\tilde{C}$ *est d'intérieur vide, l'image de* f *est dense dans* $[0,1]$.

Il est maintenant facile de définir f *par densité sur tout* $[0,1]$. *En effet, soit* $x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *il existe une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *notée* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en croissant vers* x *et une suite de points de* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$, *notée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *convergeant en décroissant vers* x *(en fait, ces points peuvent même être pris dans* D*). Comme* f *et croissante, la suite* $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc en croissant vers un certain* $\gamma \in [0,1]$ *et la suite* $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en décroissant vers un certain* $\delta \in [0,1]$ *(la croissance de* f *donne aussi que ces limites ne dépendent que du choix de* x *et non du choix des suites* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*). Comme* f *est croissante, on a* $\gamma \leq \delta$ *et comme l'image de* f *(définie pour l'instant seulement sur* $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$*) est dense dans* $[0,1]$, *on a nécessairement* $\gamma = \delta$ *(l'intervalle* $[\gamma, \delta]$ *ne rencontre pas l'image de* f*). On peut donc poser* $f(x) = \gamma = \delta$.

La fonction f *est donc maintenant définie sur tout* $[0,1]$ *à valeurs dans* $[0,1]$. *Elle est strictement croissante et son image est dense dans* $[0,1]$, *elle est donc continue (par le même raisonnement que celui fait pour définir* $f(x)$ *en tout point* $x \in [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D$*). Comme une application continue transforme un compact en compact, on a donc* $f([0,1]) = [0,1]$ *et ceci prouve en particulier que*

$$f([0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^c) \cup D) = [0,1] \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{C}_n^c) \cup \tilde{D}$$

Comme $f(D) = \tilde{D}$, *on a aussi* $f(C) = \tilde{C}$. *Pour que* f *soit définie sur* $\mathbb{R}$ *et continue, on ajoute* $f(x) = 0$ *pour* $x < 0$ *et* $f(x) = 1$ *pour* $x > 1$. *On a toujours* $f(C) = \tilde{C}$. *Ceci donne bien le résultat désiré car* $\lambda(C) = 0$ *et* $\lambda(\tilde{C}) = \varepsilon > 0$.

Exercice 2.33 (Mesure complète) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B de E est dite “négligeable” si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle. On note $\mathcal{N}_m$ l'ensemble des parties négligeables. On pose $\overline{T} = \{A \cup N;\ A \in T,\ N \in \mathcal{N}_m\}$.

1. Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Corrigé – *(a) On montre d'abord que* $\overline{\mathrm{T}}$ *est une tribu.*

— $\emptyset \in \overline{\mathrm{T}}$ *car* $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ *et* $\emptyset$ *appartient à* T *et* $\mathcal{N}_m$ *(car il est de mesure nulle).*

— $\overline{\mathrm{T}}$ *est stable par passage au complémentaire :*

Soit $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$. *Il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *et* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$ *tels que* $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{N}$. *Comme* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ *et* $m(\mathrm{B}) = 0$.

On remarque alors que $\mathrm{C}^c = (\mathrm{A} \cup \mathrm{N})^c = \mathrm{A}^c \cap \mathrm{N}^c = (\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c) \cup (\mathrm{A}^c \cap \mathrm{N}^c \cap \mathrm{B})$. *Comme* $\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}^c \in \mathrm{T}$ *(par les propriétés de stabilité de* T*) et* $(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{N}^c \cap \mathrm{B}) \in \mathcal{N}_m$ *(car inclus dans* B*), on en déduit que* $\mathrm{C}^c \in \overline{\mathrm{T}}$. *Donc,* $\overline{\mathrm{T}}$ *est stable par passage au complémentaire.*

— $\overline{\mathrm{T}}$ *est stable par union dénombrable :*

Soit $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathrm{T}}$. *Il existe* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *et* $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ *tels que* $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \cup \mathrm{N}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N}_n \in \mathcal{N}_m$, *il existe* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{N}_n \subset \mathrm{B}_n$ *et* $m(\mathrm{B}_n) = 0$. *On a alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n).$$

On remarque que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n \subset \mathrm{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$$

et $m(\mathrm{B}) = 0$ *par σ-sous additivité de m. Donc,* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n \in \mathcal{N}_m$ *comme* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$, *on a finalement* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n \in \overline{\mathrm{T}}$. *Ce qui prouve bien que* $\overline{\mathrm{T}}$ *est stable par union dénombrable.*

On a bien montré que $\overline{\mathrm{T}}$ *est une tribu sur* E.

(b) On montre maintenant que $\mathrm{T} \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

— *Si* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *on a* $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \emptyset$. *Comme* $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, *on en déduit* $\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{T}}$. *Donc,* $\mathrm{T} \subset \overline{\mathrm{T}}$.

— *Si* $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$, *on a* $\mathrm{N} = \emptyset \cup \mathrm{N}$. *Comme* $\emptyset \in \mathrm{T}$, *on en déduit* $\mathrm{N} \in \overline{\mathrm{T}}$. *Donc,* $\mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

Finalement, on a bien $\mathrm{T} \cup \mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

2. Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \in \mathcal{N}_m$ tels que $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{N}_1 = \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{N}_2$. Montrer que $m(\mathrm{A}_1) = m(\mathrm{A}_2)$.

Corrigé – *Soit* $\mathrm{B}_2 \in \mathrm{T}$ *tel que* $\mathrm{N}_2 \subset \mathrm{B}_2$ *et* $m(\mathrm{B}_2) = 0$. *On a :*

$$\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{N}_1 = \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{N}_2 \subset \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{B}_2.$$

Donc, par monotonie et sous additivité de m, $m(\mathrm{A}_1) \le m(\mathrm{A}_2 \cup \mathrm{B}_2) \le m(\mathrm{A}_2) + m(\mathrm{B}_2) = m(\mathrm{A}_2)$. *En changeant les rôles de* A_1 *et* A_2, *on a aussi* $m(\mathrm{A}_2) \le m(\mathrm{A}_1)$. *On a donc* $m(\mathrm{A}_1) = m(\mathrm{A}_2)$.

Pour $\mathrm{B} \in \overline{\mathrm{T}}$, soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{N}$, on pose $\overline{m}(\mathrm{B}) = m(\mathrm{A})$. (La question précédente montre que cette définition est cohérente.)

3. Montrer que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{\mathrm{T}}$ et $\overline{m}_{|_\mathrm{T}} = m$. Montrer que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{\mathrm{T}}$ égale à m sur T.

Corrigé – *(a) On montre d'abord que $\overline{m}$ est une mesure sur $\overline{\mathrm{T}}$.*

Comme $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ et $\emptyset \in \mathrm{T} \cap \mathcal{N}_m$, on a $\overline{m}(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$.

Soit maintenant $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathrm{T}}$ telle que $\mathrm{C}_n \cap \mathrm{C}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Il existe des suites $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ et $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}_m$ telles que $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \cup \mathrm{N}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{N}_n \in \mathcal{N}_m$, il existe $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{N}_n \subset \mathrm{B}_n$ et $m(\mathrm{B}_n) = 0$.

On a donc

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n).$$

On a déjà vu que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{N}_n \in \mathcal{N}_m$. Par définition de $\overline{m}$, on a donc

$$\overline{m}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n).$$

Comme $\mathrm{C}_n \cap \mathrm{C}_m = \emptyset$ si $n \neq m$, on a aussi $\mathrm{A}_n \cap \mathrm{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$ (car $\mathrm{A}_p \subset \mathrm{C}_p$ pour tout p). La σ-additivité de m (et la définition de $\overline{m}(\mathrm{C}_n)$) donne(nt) alors :

$$\overline{m}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{m}(\mathrm{C}_n).$$

Ce qui prouve la σ-additivité de $\overline{m}$.

(b) On montre maintenant que $\overline{m}_{|_\mathrm{T}} = m$.

Si $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on a $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \emptyset$. Comme $\emptyset \in \mathcal{N}_m$, on a donc ($\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{T}}$, on le savait déjà, et) $\overline{m}(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A})$. Donc, $\overline{m}_{|_\mathrm{T}} = m$.

(c) Enfin, on montre que $\overline{m}$ est la seule mesure sur $\overline{\mathrm{T}}$ égale à m sur T.

Soit $\tilde{m}$ une mesure sur $\overline{\mathrm{T}}$ égale à m sur T.

Soit $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$. Il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$ tel que $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{N}$. Comme $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$, il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. On a alors $\mathrm{A} \subset \mathrm{C} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. La monotonie de $\tilde{m}$, le fait que $\tilde{m} = m$ sur T et la sous additivité de m donnent :

$$m(\mathrm{A}) = \tilde{m}(\mathrm{A}) \leq \tilde{m}(\mathrm{C}) \leq \tilde{m}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = m(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{B}) = m(\mathrm{A}).$$

On a donc $\tilde{m}(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A}) = \overline{m}(\mathrm{C})$. Ce qui prouve que $\tilde{m} = \overline{m}$.

4. Montrer que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.

Corrigé – *On a déjà vu (à la question 1) que $\mathcal{N}_m \subset \overline{\mathrm{T}}$.*

- *Il est facile de voir que $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{\overline{m}}$. En effet, soit $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_m$. Il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. Comme $\mathrm{T} \subset \overline{\mathrm{T}}$ et que $\overline{m} = m$ sur T, on a donc aussi $\mathrm{B} \in \overline{\mathrm{T}}$ et $\overline{m}(\mathrm{B}) = 0$, ce qui prouve que $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$.*
- *Soit maintenant $\mathrm{N} \in \mathcal{N}_{\overline{m}}$. Il existe $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$ tel que $\mathrm{N} \subset \mathrm{C}$ et $\overline{m}(\mathrm{C}) = 0$. Comme $\mathrm{C} \in \overline{\mathrm{T}}$, il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{M} \in \mathcal{N}_m$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{B}) = 0$ et $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{M} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. la définition de $\overline{m}$ donne que $\overline{m}(\mathrm{C}) = m(\mathrm{A})$, on a donc $m(\mathrm{A}) = 0$. On en déduit $m(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{B}) = 0$, et donc, comme $\mathrm{C} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, on a bien $\mathrm{C} \in \mathcal{N}_m$.*

On a bien montré que $\mathcal{N}_{\overline{m}} = \mathcal{N}_m \subset \overline{T}$.

Cet exercice montre la différence dérisoire, du point de vue de l'intégration, entre (E, T, m) et son complété $(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Exercice 2.34 (Série commutativement convergente dans $\mathbb{R}$)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La première question de cet exercice consiste à montrer que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. Puis, dans la deuxième question, il s'agit de montrer que, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente, la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ ne dépend pas de φ, dès que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. [On pourra raisonner par l'absurde.]

Corrigé – *On suppose que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *n'est pas absolument convergente. La suite* $(\sum_{p=0}^{n} |a_p|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge donc en croissant vers* $+\infty$. *Comme* $|a_p| = a_p^+ + a_p^-$ *et que* $a_p^+ = \max\{a_p, 0\} \geq 0$ *et* $a_p^- = \max\{-a_p, 0\} \geq 0$, *les deux suites* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont donc aussi croissantes et l'une des deux, au moins, converge vers* $+\infty$.

On suppose que la suite $(\sum_{p=0}^{n} a_p^+)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$ *(un raisonnement analogue à ce qui suit permettrait de traiter le cas où la suite* $(\sum_{p=0}^{n} a_p^-)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$*). On va construire ci-après une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$. *Ceci prouvera que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ *est non convergente pour au moins une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$.

On note $P = \{n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0\}$ *et* $N = \{n \in \mathbb{N},\ a_n < 0\}$ *(de sorte que* $P \cap N = \emptyset$ *et* $P \cup N = \mathbb{N}$*). Soit* φ_1 *et* φ_2 *les deux applications strictement croissantes de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telles que* $P = \{\varphi_1(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ *et* $N = \{\varphi_2(n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

On commence par montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *telle que* $a_0 = 0$ *et :*

$$a_{\varphi_2(n)} + \sum_{p=a_n}^{a_{n+1}-1} a_{\varphi_1(p)} \geq 1. \tag{2.28}$$

Pour montrer l'existence d'une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *on pose* $a_0 = 0$. *Puis, on raisonne par récurrence sur n. Si* $a_0, \ldots, a_n$ *sont construits, l'existence de* a_{n+1} *découle du fait que*

$$\sum_{p=a_n}^{+\infty} a_{\varphi_1(p)} = \sum_{p=\varphi_1(a_n)}^{+\infty} a_p^+ = +\infty.$$

La construction de la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *se fait alors en prenant* $\varphi_1(a_0), \ldots, \varphi_1(a_1 - 1)$ *puis* $\varphi_2(0)$ *puis* $\varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_1(a_2 - 1)$ *puis* $\varphi_2(1) \ldots$ *puis* $\varphi_1(a_n), \ldots, \varphi_1(a_{n+1} - 1)$ *puis* $\varphi_2(n) \ldots$

Pour décrire précisément cette application φ, *on pose* $b_0 = 0$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = b_n + a_{n+1} - a_n + 1$ *(la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante et tend donc vers* $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$*). On définit alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(q)$ *lorsque* $q \in \{b_n, \ldots b_{n+1} - 1\}$ *par :*

$$\varphi(b_n + p) = \varphi_1(a_n + p) \text{ pour } p \in \{0, \ldots, a_{n+1} - a_n - 1\},$$
$$\varphi(b_{n+1} - 1) = \varphi_2(n).$$

On a bien ainsi défini une application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *car* $b_{n+1} - 1 = b_n + p$, *pour* $p = a_{n+1} - a_n$. *L'application* φ *est surjective car* $\{\varphi(q),\ q \in \mathbb{N}\} = \mathrm{P} \cup \mathrm{N}$. *Elle est injective car chaque valeur de* φ_1 *et* φ_2 *n'est prise qu'une seule fois par* φ. *Enfin, on a bien* $\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} \to +\infty$ *quand* $n \to +\infty$. *En effet, on remarque que, grâce à (2.28) :*

$$\sum_{q=0}^{b_{n+1}-1+p} a_{\varphi(q)} \geq \sum_{q=0}^{b_{n+1}-1} a_{\varphi(q)} \geq n,$$

pour tout $p \geq 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *ce qui donne, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\liminf_{p\to+\infty} \sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \geq n$, *et donc*

$$\sum_{q=0}^{p} a_{\varphi(q)} \to +\infty, \text{ quand } p \to +\infty.$$

2. On suppose maintenant que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente (et donc convergente). On pose $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)}$ est convergente et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\varphi(n)} = a$.

   Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *est absolument convergente, il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{n\geq \mathrm{N}} |a_n| \leq \varepsilon$.
   Pour $i \in \{0, \ldots, \mathrm{N}\}$, *soit* $n_i \in \mathbb{N}$ *tel que* $\varphi(n_i) = i$. *On a alors*

$$n \geq \max\{n_0, \ldots, n_\mathrm{N}\} \Rightarrow \Big|\sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} - \sum_{p=0}^{n} a_p\Big| \leq \sum_{p=\mathrm{N}}^{\infty} |a_p| \leq \varepsilon.$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p = a$, *on en déduit que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{\varphi(p)} = a$.

Exercice 2.35 (Lemme de Borel-Cantelli)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T.

On pose

$$\mathrm{B}_n = \bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k \text{ et } \mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$$

(on rappelle que $\mathrm{A} = \limsup_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(\mathrm{A}_n) < +\infty$ alors $p(\mathrm{A}) = 0$.

   Corrigé – *Cette question a été traitée dans l'exercice 2.26, question 4.*

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements $A_0, \ldots, A_n$ sont indépendants. On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

Corrigé – *Comme cela a été vu à l'exercice 2.26, la propriété de continuité décroissante d'une mesure (voir la proposition 2.27) donne $p(A) = \lim_{n\to+\infty} p(B_n)$. Il suffit donc de montrer que $p(B_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons d'abord qu'iil existe $k \geq n$ tel que $p(A_k) = 1$. On a alors, par monotonie de p, que $p(B_n) \geq p(A_k) = 1$ et donc $p(B_n) = 1$. On suppose maintenant que $p(A_k) < 1$ pour tout $k \geq n$. Comme $B_n^c = \bigcap_{k\geq n} A_k^c$, la continuité décroissante de p et l'indépendance des A_k donne :

$$p(B_n^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} p(A_k^c) = \lim_{m\to+\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - p(A_k)).$$

Comme $\ln(1-x) \leq -x$ pour tout $x < 1$ (ou, de manière équivalente, $\ln(u) \leq u - 1$ pour tout $u > 0$, ceci est une conséquence, par exemple, de la concavité de la fonction $\ln$), on a, pour $m > n$:

$$\ln(\prod_{k=n}^{m}(1 - p(A_k))) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - p(A_k)) \leq -\sum_{k=n}^{m} p(A_k).$$

De l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$, on déduit

$$\lim_{m\to+\infty} \ln(\prod_{k=n}^{m}(1 - p(A_k))) = -\infty,$$

et donc $p(B_n^c) = 0$. Ceci donne bien $p(B_n) = 1$ et termine la démonstration.

Exercice 2.36 (Probabilité sur S^1) On considère $S^1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\}$ (S^1 est donc le cercle unité de $\mathbb{R}^2$). Pour $z = (x,y)^t \in S^1$, il existe un unique $\theta_z \in [0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta_z)$ et $y = \sin(\theta_z)$. Pour $\alpha \in [0, 2\pi[$ et $z \in S^1$ on pose

$$R_\alpha(z) = (\cos(\theta_z + \alpha), \sin(\theta_z + \alpha))^t.$$

Noter que R_α est une bijection de S^1 sur S^1 (c'est la rotation d'angle α).

Définir une tribu T sur S^1, telle que T contienne les parties de la forme $\{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t, \theta \in]\alpha, \beta[\}$ avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, et une mesure μ sur T de sorte que (S^1, T, μ) soit un espace mesuré avec $\mu(S^1) = 1$ et telle que μ soit invariante par rotation, c'est-à-dire que, pour tout $A \in T$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$, on ait $R_\alpha(A) = \{R_\alpha(z), z \in A\} \in T$ et $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$. [On pourra utiliser la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

Corrigé – *On note Θ l'application $z \mapsto \theta_z$ de S^1 dans $\mathbb{R}$ (cette application est bijective de S^1 dans $[0, 2\pi[$). On prend alors $T = \{\Theta^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. C'est bien une tribu sur S^1 (voir l'exercice 2.4).*

Soit $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ *et* $\mathrm{E} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in]\alpha, \beta[\}$. *On a* $\mathrm{E} \subset \mathrm{S}^1$ *et, si* $z \in \mathrm{S}^1$, *on a* $z \in \mathrm{E}$ *si et seulement s'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\theta_z + 2k\pi \in]\alpha, \beta[$. *Ceci prouve que*

$$\mathrm{E} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[),$$

et donc que $\mathrm{E} \in \mathrm{T}$ *car* $\Theta^{-1}(]\alpha - 2k\pi, \beta - 2k\pi[) \in \mathrm{T}$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant μ. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. *On pose* $\Theta_{\mathrm{A}} = \{\theta_z,\ z \in \mathrm{A}\}$. *Comme* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *il existe* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\mathrm{A} = \Theta^{-1}(\mathrm{B})$, *et donc* $\mathrm{A} = \Theta^{-1}(\mathrm{B} \cap [0, 2\pi[)$. *Comme* Θ *est une bijection de* S^1 *dans* $[0, 2\pi[$, *on a alors* $\Theta_{\mathrm{A}} = \mathrm{B} \cap [0, 2\pi[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On pose* $\mu(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\Theta_{\mathrm{A}})$, *où* λ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Montrons que μ *est bien une mesure sur* T. *En effet, on a* $2\pi\mu(\emptyset) = \lambda(\Theta_\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$. *Puis, si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* T, *disjoints deux à deux, la suite* $(\Theta_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *disjoints deux à deux. La* σ*-additivité de* μ *découle alors de celle de* λ.

Il reste à montrer que μ *est invariante par rotation. Soit* $\alpha \in [0, 2\pi[$ *et* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. *Comme on l'a vu précédemment, il existe* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\mathrm{A} = \Theta^{-1}(\mathrm{B} \cap [0, 2\pi[)$. *On a donc*

$$\mathrm{A} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in \mathrm{B} \cap [0, 2\pi[\}.$$

Pour $\beta \in \mathbb{R}$, *on note* $\mathrm{B}_\beta = \{\theta + \beta,\ \theta \in \mathrm{B}\}$. *On a alors :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{A}) &= \{(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))^t,\ \theta \in \mathrm{B} \cap [0, 2\pi[\} \\
&= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in \mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, 2\pi+\alpha[\} \\
&= \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in \mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[\} \cup \{(\cos(\theta), \sin(\theta))^t,\ \theta \in \mathrm{B}_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[\} \\
&= \Theta^{-1}(\mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) \cup \Theta^{-1}(\mathrm{B}_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).
\end{aligned}$$

La propriété d'invariance par translation de λ *permet de dire que* $\mathrm{B}_\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$. *On a donc* $\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{A}) \in \mathrm{T}$ *et, par additivité d'une mesure et définition de* μ,

$$2\pi\mu(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{A})) = \lambda(\mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(\mathrm{B}_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[).$$

L'invariance par translation de λ *donne*

$$\lambda(\mathrm{B}_{\alpha-2\pi} \cap [0, \alpha[) = \lambda(\mathrm{B}_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
2\pi\mu(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{A})) &= \lambda(\mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, 2\pi[) + \lambda(\mathrm{B}_\alpha \cap [2\pi, \alpha + 2\pi[) \\
&= \lambda(\mathrm{B}_\alpha \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[) \\
&= \lambda(\mathrm{B} \cap [0, 2\pi[).
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien $\mu(\mathrm{R}_\alpha(\mathrm{A})) = \mu(\mathrm{A})$.

Exercice 2.37 (Sur la continuité de la fonction de répartition) Soient p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et F la fonction de répartition de p. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$ si p ne charge pas les points.

Chapitre 3

Fonctions mesurables, variables aléatoires

3.1 Introduction, topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$

Nous allons, dans ce chapitre, introduire différents outils nécessaires à la définition de l'intégrale de Lebesgue. De la même manière que les fonctions en escalier ont été introduites lors de la définition de l'intégrale des fonctions réglées, nous introduisons maintenant le concept de fonction étagée sur un espace mesurable (E,T). Nous introduirons ensuite les concepts de fonction mesurable et de variable aléatoire, ainsi que les premières notions de convergence de suite de ces fonctions. La notion de variable aléatoire est fondamentale en calcul des probabilités : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa loi de probabilité) que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé (E, T, p) restant souvent mal connu.

Remarque 3.1

1. L'objectif est d'intégrer des fonctions de E (espace de départ) dans F (espace d'arrivée). Pour construire ainsi une notion d'intégrale, il faut un espace mesuré au départ et un espace topologique à l'arrivée, car nous aurons besoin dans l'espace d'arrivée d'une notion de convergence (pour les procédés de passage à la limite dans la définition de l'intégrale). Les espaces d'arrivée usuels sont (pour la théorie de l'intégration) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$ ou un espace de Banach. Le procédé de construction dû à Lebesgue donne un rôle fondamental aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (et à la notion de convergence croissante) et nous aurons besoin d'utiliser la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir la définition 3.2).
2. On rappelle qu'un espace topologique est la donnée d'un ensemble F muni d'une famille de parties de F, appelées "ouverts de F", contenant $\emptyset$ et F, stable par union

(quelconque) et stable par intersection finie. On rappelle aussi que, dans un espace topologique, $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$, signifie que, pour tout O ouvert contenant x, il existe n_0 tel que $x_n \in$ O pour tout $n \geq n_0$.

3. Soit F un espace topologique et $G \subset F$. On appelle topologie trace sur G la topologie définie par l'ensemble des restrictions à G des ouverts de F. Si $O \subset G$, O est un ouvert de G si et seulement s'il existe U ouvert de F tel que $O = U \cap G$. Noter donc que O peut ne pas être un ouvert de F si G n'est pas un ouvert de F. Par contre, il est important de remarquer que si G est un borélien de F (c'est-à-dire $G \in \mathcal{B}(F)$, $\mathcal{B}(F)$ étant la tribu engendrée par les ouverts de F), l'ensemble des boréliens de G est exactement l'ensemble des boréliens de F inclus dans G, c'est-à-dire $\mathcal{B}(G) = \{B \subset G;\ B \in \mathcal{B}(F)\}$, ceci est démontré dans l'exercice 2.3 page 75.
4. Un exemple fondamental de topologie sur l'ensemble F est celui de la topologie donnée par une distance sur F. Dans le cas de $F = \mathbb{R}$, nous considérerons toujours $\mathbb{R}$ muni de la topologie donnée par la structure métrique de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire par l'application "distance" définie par $d(a,b) = |b-a|$.

Définition 3.2 (Topologie et tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

1. *Soit* $O \subset \overline{\mathbb{R}}_+$. O *est un ouvert si pour tout* $a \in O$ *on a :*
   (a) *Si* $0 < a < +\infty$, *alors il existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset O$,
   (b) *si* $a = 0$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que* $[0,\alpha[\subset O$,
   (c) *si* $a = +\infty$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $]\alpha, +\infty] \subset O$.
2. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *est la tribu (sur* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) engendrée par les ouverts de* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Soit* $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, *on peut montrer (voir la remarque 3.3 ci après) que* $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *si et seulement si* $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(*$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est la tribu de Borel sur* $\mathbb{R}$*).*

Remarque 3.3 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. La topologie sur $\mathbb{R}_+$ est la topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est aussi la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ (la démonstration de ce résultat est un exercice de topologie, exercice 3.4). L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est donc égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et c'est aussi l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ (voir la remarque 3.1). On remarque aussi que $\{+\infty\} \in B(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (car $\{+\infty\}$ est, par exemple, une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+$). On en déduit que, si $B \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $B \cap \mathbb{R} = B \cap \mathbb{R}_+$).
2. Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, A est donc un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$ si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $A = B \cup \{+\infty\}$, avec $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. La définition de la topologie sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ donne bien que, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $x_n \to +\infty$ (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, quand $n \to +\infty$) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, il existe n_0 tel que $x_n \in]\alpha, +\infty]$ pour tout $n \geq n_0$ (ce qui est la définition usuelle de convergence vers $+\infty$).

4. On peut aussi montrer que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}_1 = \{]a, +\infty]; a \in \mathbb{R}_+\}$. C'est aussi la tribu engendrée par $\mathcal{C}_2 = \{]a, +\infty[\cap\mathbb{R}_+; a \in \mathbb{R}\}$. Par contre, ce n'est pas la tribu engendrée (sur $\overline{\mathbb{R}}_+$) par $\mathcal{C}_3 = \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}_+\}$ (on a donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}_3) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ et $\mathrm{T}(\mathcal{C}_3) \neq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$). Voir à ce propos les exercices 3.13 et 3.14.

3.2 Fonctions étagées

Définition 3.4 (Fonction caractéristique d'un ensemble) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. *On appelle fonction caractéristique mesurable de l'ensemble* A, *et on note* 1_A *(ou* χ_A*) la fonction définie par :* $1_\mathrm{A}(x) = 1$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $1_\mathrm{A}(x) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$.

Définition 3.5 (Fonction étagée) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f est étagée (ou T*-étagée) si f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie* $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ *et n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que* $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

2. On dit que f est étagée positive si f est étagée et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives.

La notion de fonction étagée positive va nous permettre de définir l'intégrale à partir de la notion de mesure. On se limite pour l'instant aux fonctions positives afin de donner un sens à l'addition de mesures infinies. Notons que, dans la définition d'une fonction étagée, les ensembles A_i peuvent être d'intersection non vide. On aura besoin, pour introduire facilement la notion d'intégrale d'une fonction étagée positive, de considérer une décomposition de la fonction étagée sur des ensembles d'intersection vide. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.6 (Décomposition canonique d'une fonction étagée positive) *Soit* (E, T) *un espace mesurable, et soit $f \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive, non identiquement nulle. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, \mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ *telle que* $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$, *pour tout i,* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, *si $i \neq j$, et* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

DÉMONSTRATION – Soient $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathrm{T}$, $(b_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathbb{R}$ et $f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{\mathrm{B}_i}$ une fonction étagée positive non nulle. L'ensemble $\mathrm{Im} f$ des valeurs prises par f est donc fini. Comme $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$, on a donc $\mathrm{Im} f \setminus \{0\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $0 < a_1, \ldots < a_n$. En posant $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$, on a donc $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$ avec $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ et $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$. (Noter aussi que $\{x \in \mathrm{E}; f(x) = 0\} = (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i)^c$.) Il reste à montrer que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\mathrm{I}_i = \{\mathrm{K} \subset \{1, \ldots, p\}\ ;\ a_i = \sum_{k \in \mathrm{K}} b_k\}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{A}_i = \bigcup_{\mathrm{K} \in \mathrm{I}_i} \mathrm{C}_\mathrm{K}$, avec $\mathrm{C}_\mathrm{K} = \bigcap_{j=1}^{p} \mathrm{D}_j$, $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j$ si $j \in \mathrm{K}$ et $\mathrm{D}_j = \mathrm{B}_j^c$ si $j \notin \mathrm{K}$. Les propriétés de stabilité d'une tribu nous donnent alors que $\mathrm{A}_i \in \mathrm{T}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc trouvé la décomposition voulue de f. Le fait que cette décomposition est unique est immédiat car on a nécessairement $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathrm{Im} f \setminus \{0\}$ et $\mathrm{A}_i = \{x \in \mathrm{E}; f(x) = a_i\}$. ■

On aurait envie à partir de la notion de fonction étagée positive décomposée sous la forme précédente, de définir l'intégrale de f comme $\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i)$. En fait, on pourra même (cf définition 4.1) définir l'intégrale d'une fonction étagée avec une décomposition plus générale (non unique) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.7 *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{E}_+$ *une fonction étagée positive non nulle, telle que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } f = \sum_{i=1}^{p} b_i 1_{\mathrm{B}_i}$$

où $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$ *sont des réels strictement positifs,* $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ *et* $(\mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p} \subset \mathrm{T}$ *sont des familles de parties disjointes deux à deux, i.e. telles que* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ *et* $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{j=1}^{p} b_j m(\mathrm{B}_j). \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION – On pose, pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p$, $\mathrm{C}_{ij} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$. En remarquant que $\{x; f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{B}_j$, on écrit $\mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^{p} \mathrm{C}_{ij}$ et $\mathrm{B}_j = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{ij}$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_i m(\mathrm{C}_{ij})$$

et

$$\sum_{j=1}^{p} b_j m(\mathrm{B}_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_j m(\mathrm{C}_{ij})$$

On remarque alors que $a_i = b_j$ dès que $\mathrm{C}_{ij} \neq \emptyset$, d'où l'égalité 3.1. ■

Lemme 3.8 (Décomposition d'une fonction étagée avec une partition) *Soit* (E,T) *un espace mesurable, et soit* $f \in \mathcal{E}$ *une fonction étagée. Alors il existe une unique famille finie* $(a_i, A_i)_{i=0,\ldots,n} \subset \mathbb{R}\times T$ *telle que* $a_i \neq a_j$ *si* $i \neq j$, $A_i \neq \emptyset$, *pour tout* i, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$, $E = \bigcup_{i=0}^n A_i$ *et* $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est très voisine de celle donnée pour la décomposition d'une fonction étagée positive (lemme 3.6). L'ensemble $\{a_i,\, i \in \{0,\ldots,n\}\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs prises par f (et pas seulement les valeurs non nulles) et $A_i = \{x \in E\,;\, f(x) = a_i\}$. ■

Enfin, on conclut ce paragraphe en remarquant que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.9 (Structure vectorielle de $\mathcal{E}$) *Soit* (E,T) *un espace mesurable, l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des fonctions étagées est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *De plus, si* $f, g \in \mathcal{E}$, *on a aussi* $fg \in \mathcal{E}$.

DÉMONSTRATION – Soiet $f, g \in \mathcal{E}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On utilise la décomposition de f et g donnée dans le lemme 3.8. Elle donne $f = \sum_{i=0}^n a_i 1_{A_i}$ et $g = \sum_{j=0}^m b_j 1_{B_i}$. Comme les familles $(A_i)_{\{i\in\{0,\ldots,n\}\}}$ et $(B_j)_{\{j\in\{0,\ldots,m\}\}}$ forment des partitions de E, on a

$$f = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i 1_{A_i\cap B_j} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j 1_{A_i\cap B_j},$$

de sorte que $\alpha f + \beta g = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (\alpha a_i + \beta b_i) 1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

D'autre part, on remarque aussi que $fg = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_i 1_{A_i\cap B_j}$, ce qui montre que $fg \in \mathcal{E}$. ■

On montrera aussi les propriétés de linéarité et de monotonie de l'intégrale des fonctions étagées (voir proposition 4.3).

3.3 Fonctions mesurables et variables aléatoires

Afin d'étendre le concept d'intégrale à une classe de fonctions plus générale que celle des fonctions étagées (positives), on introduit les fonctions mesurables (positives). On pourra ensuite utiliser une technique de passage à la limite pour définir l'intégrale de telles fonctions.

On va tout d'abord définir la notion de mesurabilité pour une fonction f de E dans F. L'espace de départ, E, est muni d'une tribu et l'espace d'arrivée, F, est, en général, muni d'une topologie (et donc de sa tribu de Borel, les exemples fondamentaux sont

$F = \mathbb{R}$ ou $F = \overline{\mathbb{R}}_+$). On peut aussi considérer le cas où F est muni d'une tribu (non donnée par une topologie sur F).

Définition 3.10 (Fonction mesurable) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* F *un ensemble muni d'une topologie (par exemple :* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). Une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* T*-mesurable si* $f^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{B}(F)$ *(ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(F)\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F)\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ *contient* $\mathcal{B}(F)$*, voir l'exercice 2.4 sur les tribus image directe et image réciproque.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*T*-mesurable".*

Plus généralement, si F *n'est pas muni d'une topologie (et donc de la tribu* $\mathcal{B}(F)$*) mais est muni directement d'une tribu* $\mathcal{T}$ *(on a alors deux espaces mesurables :* (E, T) *et* $(F, \mathcal{T})$*), une fonction* f*, définie de* E *dans* F*, est une fonction* $(T, \mathcal{T})$*-mesurable si* $f^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{T}$*. (Ce qui est équivalent à dire que la tribu* $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{T}\}$ *est incluse dans* T *ou encore que la tribu* $T_f = \{B \in \mathcal{P}(F)\,;\ f^{-1}(B) \in T\}$ *contient* $\mathcal{T}$*.) En l'absence d'ambiguïté possible on dira "mesurable" au lieu de "*$(T, \mathcal{T})$*-mesurable".*

Enfin, si E *et* F *sont deux espaces munis d'une topologie, on dit que* f *est borélienne si* f *est mesurable pour les tribus boréliennes sur* E *et* F *(c'est-à-dire les tribus engendrées par les ouverts) .*

Remarque 3.11 Une fonction étagée est toujours mesurable. En effet, soit (E, T) un espace mesurable et soit $f \in \mathcal{E}$ (donc f est une application de E dans $\mathbb{R}$). D'après le lemme 3.8, il existe une partition $(A_0, \ldots, A_n)$ de E, et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i}$ et $A_i \in T$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a donc $f^{-1}(B) = \bigcup_{\{i;\, a_i \in B\}} A_i \in T$, ce qui prouve que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Noter que si $f \in \mathcal{E}_+$, on a donc aussi f mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (voir l'exercice 3.5).

La terminologie probabiliste utilise les termes "variable aléatoire" ou "vecteur aléatoire" (selon l'espace d'arrivée) au lieu de "fonction mesurable" (ou "application mesurable").

Définition 3.12 (Variable aléatoire, vecteur aléatoire)

1. *Soit* (E, T) *un espace probabilisable, on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r.) une fonction* X *définie de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* T*-mesurable,i.e. telle que* $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. *Plus généralement, soient* (E, T) *et* $(F, \mathcal{T})$ *deux espaces probabilisables. Une fonction* X*, définie de* E *dans* F*, est une variable aléatoire si c'est une fonction* $(T, \mathcal{T})$*-*

mesurable (c'est-à-dire si $X^{-1}(A) \in T$*, pour tout* $A \in \mathcal{T}$*). Lorsque* F *est un espace vectoriel, on dit que* X *est une variable aléatoire vectorielle ou un "vecteur aléatoire".*

Remarque 3.13 Comme cela a été dit dans la proposition 3.10, on dit, en l'absence d'ambiguïté, "mesurable" au lieu de "T-mesurable". On remarque d'ailleurs que le terme probabiliste "variable aléatoire" ne mentionne pas la dépendance par rapport à la tribu. Dans la définition 3.12, on a noté X la variable aléatoire plutôt que f car c'est l'usage dans la littérature probabiliste.

Définition 3.14 (Tribu engendrée par une fonction mesurable) *Soient* (E,T) *un espace mesurable (resp. probabilisable) et* f *(resp.* X*) une fonction mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(resp. une variable aléatoire) alors l'ensemble* $\{f^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *(resp.* $\{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$*) est une tribu sur* E *qu'on appelle tribu engendrée par la fonction mesurable* f *(resp. la variable aléatoire* X*). Cette tribu est aussi la tribu image réciproque de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par* f *(resp.* X*).*

Définition 3.15 (Espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E,T) *un espace mesurable, on note :*

— $\mathcal{M}(E,T) = \{f : E \to \mathbb{R}$*, mesurable*$\}$,

— $\mathcal{M}_+(E,T) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$*, mesurable*$\}$.

En l'absence d'ambiguïté, on notera $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E,T)$ *et* $\mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(E,T)$.

Proposition 3.16 (Première caractérisation de la mesurabilité)

Soient (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \to F$*, avec* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. Soit* $\mathcal{C}$ *une partie de* $\mathcal{P}(F)$ *engendrant la tribu borélienne de* F*. On a alors :* f *est mesurable si et seulement* $f^{-1}(C) \in T$ *pour tout* $C \in \mathcal{C}$*. En particulier,* f *est mesurable si et seulement si* f *vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

1. $f^{-1}(]\alpha,\beta[) \in T$*, pour tout* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$,
2. $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans cette caractérisation, l'ensemble $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*) désigne, bien sûr, l'ensemble des éléments de* F *appartenant à* $]\alpha,\beta[$ *(ou* $]\alpha,+\infty[$*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 3.1. Le lecteur pourra trouver lui-même d'autres caractérisations de la mesurabilité, en utilisant la proposition ci-dessus. Par exemple, soit f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, la fonction f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in T$ pour tout $\alpha > 0$ (par contre, $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in T$ pour tout $\alpha \geq 0$ n'implique pas que f est mesurable).

La proposition suivante nous permettra de définir l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}_+$ (comme limite d'intégrales de fonctions étagées, voir le chapitre suivant). Par contre, on ne pourra pas donner un sens, dans le cas général, à l'intégrale des fonctions appartenant à $\mathcal{M}$.

Proposition 3.17 (Mesurabilité positive) *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$, *telle que :*

1. pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,

2. $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $x \in E$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

Les deux conditions précédentes seront notées dans la suite sous la forme $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[).$$

Comme f_n est mesurable, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir la remarque 3.11), on a $f_n^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par stabilité de T par union dénombrable, $f^{-1}(]\alpha, +\infty]) \in T$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on en déduit, comme $\{]\alpha, +\infty], \alpha \geq 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

Réciproquement, on suppose que $f \in \mathcal{M}_+$. On va construire une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{2^n} \text{ si } f(x) \in [\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{p+1}{2^n}[, \text{ avec } p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\} \\ n \text{ si } f(x) \geq n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = n 1_{\{x\in E; f(x)\geq n\}} + \sum_{p=0}^{n2^n-1} \frac{p}{2^n} 1_{\{x\in E; f(x)\in[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\}}.$$

Comme $f \in \mathcal{M}_+$, on a $\{x \in E; f(x) \geq n\} \in T$ et $\{x \in E; f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[\} \in T$ pour tout n et tout p, on a donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$.

On montre maintenant que, pour tout $x \in E$, on a $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$. Soit $x \in E$. On distingue deux cas :

Premier cas. On suppose $f(x) < +\infty$. On a alors, pour $n \geq f(x)$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

Deuxième cas. On suppose $f(x) = +\infty$. On a alors $f_n(x) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$.

On montre enfin que, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue trois cas :

Premier cas. On suppose $f(x) \geq n + 1$. On a alors $f_{n+1}(x) = n + 1 > n = f_n(x)$.

Deuxième cas. On suppose $n \leq f(x) < n+1$. Il existe alors $i \in \{n2^{n+1}, \ldots, (n+1)2^{n+1} - 1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}]$. On a alors $f_n(x) = n \leq \frac{i}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$.
Troisième cas. On suppose $f(x) < n$. Il existe alors $p \in \{0, \ldots, n2^n - 1\}$ tel que $f(x) \in [\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}[= [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$. Si $f(x) \in [\frac{2p}{2^{n+1}}, \frac{2p+1}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} = \frac{2p}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. Si $f(x) \in [\frac{2p+1}{2^{n+1}}, \frac{2(p+1)}{2^{n+1}}[$, on a $f_n(x) = \frac{p}{2^n} < \frac{2p+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x)$. On a toujours $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

On a bien ainsi construit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. ■

Proposition 3.18 (Mesurabilité sans signe) *Soient* (E, T) *un espace mesurable, et* $f : E \to \mathbb{R}$. *On suppose que* f *est mesurable. Il existe alors une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que, pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration – On définit la fonction $f^+ : E \to \mathbb{R}_+$ par $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ pour tout $x \in E$. On remarque que $f^+ \in \mathcal{M}_+$ (et $f^+ \in \mathcal{M}$, voir l'exercice 3.5). En effet, f^+ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(f^+)^{-1}(]\alpha, +\infty]) = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in T$ si $\alpha > 0$. On conclut en remarquant que $\{]\alpha, +\infty], \alpha > 0\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. On définit également $f^- = (-f)^+$, de sorte que $f = f^+ - f^-$. On a donc aussi $f^- \in \mathcal{M}_+$. La proposition 3.17 donne l'existence de suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telles que $f_n \uparrow f^+$ et $g_n \uparrow f^-$ quand $n \to +\infty$. On pose $h_n = f_n - g_n$, de sorte que $h_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. D'autre part, comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel (voir la proposition 3.9 page 119), on a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. ■

La proposition précédente nous donnera, avec les propriétés de stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$ (voir la proposition 3.19) une deuxième caractérisation de la mesurabilité, voir la proposition 3.20.

L'ensemble des fonctions mesurables est un ensemble très stable, c'est-à-dire que des opérations usuelles (comme addition, multiplication, limite...) sur des fonctions mesurables donnent encore des fonctions mesurables, ceci est précisé dans la proposition suivante. Dans le cas (fondamental) de $(E, T) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, il est difficile de trouver des fonctions non mesurables (comme il est difficile de trouver des parties non boréliennes, bien que le cardinal de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit égal au cardinal de $\mathbb{R}$ et donc strictement inférieur au cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). En pratique, on peut en gros supposer que les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont *toutes* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables (bien qu'il y ait "beaucoup" de fonctions non mesurables).

Proposition 3.19 (Stabilité de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_+$) *Soit* (E, T) *un espace mesurable.*

1. Soit $I \subset \mathbb{N}$.

Soit $(f_n)_{n\in I} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\sup_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\inf_{n\in I} f_n \in \mathcal{M}_+$.

Soit $(f_n)_{n\in \mathrm{I}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$.
De même, si $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\inf_{n\in\mathrm{I}} f_n \in \mathcal{M}$.

2. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *alors* $\limsup_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ *et* $\liminf_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Si* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

   De même, si $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.

3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n(x) \to f(x)$ *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Alors* $f \in \mathcal{M}$.

4. $\mathcal{M}$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et si* $f, g \in \mathcal{M}$, *alors* $fg \in \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Il est clair que $f = \sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Puis, Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$f^{-1}(]\alpha,+\infty]) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty]) \in \mathrm{T}.$$
   Comme $\{]\alpha,+\infty] \cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   De même la fonction $f = \inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est aussi bien définie et prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (elle prend même ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ceci n'est pas vrai avec la fonction $\sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$). On remarque ensuite que
$$f^{-1}(]-\infty,\alpha[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]-\infty,\alpha[) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Comme $\{]-\infty,\alpha[\cap \overline{\mathbb{R}}_+,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, on en déduit que f est mesurable de E dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}_+$.

   Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. La fonction $f = \sup_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $+\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ et que $\{]\alpha,+\infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. De même, la fonction $f = \inf_{n\in\mathrm{I}} f_n$ est bien définie si on la considère comme étant à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ car elle peut prendre la valeur $-\infty$ en certains points. On la suppose maintenant à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut alors raisonner comme précédemment en remarquant que $f^{-1}(]-\infty,\alpha[) = \bigcup_{n\in\mathrm{I}} f_n^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ et que $\{]-\infty,\alpha[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On pose $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$, la fonction f est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a
$$f(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(\sup_{p\geq n} f_p(x)) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p(x)),$$

c'est-à-dire $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$. En utilisant les résultats précédents (avec sup puis inf), on a donc $f \in \mathcal{M}_+$. Un raisonnement similaire donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}_+$.

Soit maintenant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. On suppose que

$$f = \limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p)$$

(qui est bien définie dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme les f_n prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut alors remarquer que la fonction $\sup_{p\geq n} f_p$ prend aussi ses valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, avec la propriété démontrée en 1, $\sup_{p\geq n} f_p \in \mathcal{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, utilisant encore la propriété démontrée en 1, $f = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$. Un raisonnement analogue donne $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf_{p\geq n} f_p) \in \mathcal{M}$ dès que l'on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Cette question est immédiate grâce à la précédente. Il suffit de remarquer que dès que la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ existe, elle est nécessairement égale à la limite supérieure (ou la limite inférieure) de cette même suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in E$). Ici on remarque donc simplement que $f = \limsup_{n\to+\infty} f_n$ et on applique la propriété 2.

4. Soit $f, g \in \mathcal{M}$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ On pose $h = \alpha f + \beta g$. D'après la proposition 3.18, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telles que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = \alpha f_n + \beta g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.9 donne que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ (voir la remarque 3.11), la propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

   Soit $f, g \in \mathcal{M}$. On pose $h = fg$. On raisonne comme ci-dessus, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ et $g_n(x) \to g(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. On pose $h_n = f_n g_n$, de sorte que $h_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$. La proposition 3.9 donne aussi $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{M}$. La propriété 3 ci-dessus donne alors que $h \in \mathcal{M}$. ■

Proposition 3.20 (Deuxième caractérisation de la mesurabilité) *Soit* (E, T) *un espace mesurable et* $f : E \to \mathbb{R}$. *Alors,* f *est mesurable si et seulement s'il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *telle que pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Cette caractérisation est donnée par la proposition 3.18 pour le sens "seulement si" et par la propriété 3 de la proposition 3.19 pour le sens "si". ■

On rappelle aussi qu'une fonction f de E (muni de la tribu T) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{M}_+$) si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ (voir la proposition 3.17).

Remarque 3.21 Il est intéressant de remarquer que la proposition 3.20 peut être fausse si on prend pour F un espace topologique quelconque (elle reste vraie, par exemple, si F est un espace vectoriel normé de dimension finie) avec une définition immédiate de $\mathcal{E}$ généralisant celle donnée pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Définition 3.22 *Soient* E *un ensemble et* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *on pose :*

— $f^+(x) = \max(f(x), 0)$,
— $f^-(x) = -\min(f(x), 0) = (-f)^+(x)$,
— $|f|(x) = |f(x)|$.

Proposition 3.23 *Soient* (E, T) *un espace mesurable et* $f \in \mathcal{M}$. *On a alors* $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ *et* f^+, f^-, $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{M}$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$ est immédiat. On a déjà vu, dans la démonstration de la proposition 3.18, que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$ et donc que $f^+, f^- \in \mathcal{M}$ (voir l'exercice 3.5). La proposition 3.19 donne que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On a donc $|f| \in \mathcal{M}$ et donc aussi $|f| \in \mathcal{M}_+$ car $|f| \geq 0$. ■

3.4 Mesure image, loi d'une v.a., v.a. indépendantes

Soit (E, T) et $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est $(\mathrm{F}, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) et f une fonction mesurable de E vers F. Si m est une mesure sur T, alors on peut définir, à partir de f et m, une mesure sur $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

Proposition 3.24 (Mesure image) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(\mathrm{F}, \mathcal{T})$ *un espace mesurable et* f *une fonction mesurable de* E *vers* F *(c'est-à-dire* $(\mathrm{T}, \mathcal{T})$*-mesurable). Alors, l'application* m_f *définie de* $\mathcal{T}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *par :* $m_f(\mathrm{A}) = m(f^{-1}(\mathrm{A}))$, *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{T}$, *est une mesure sur* $\mathcal{T}$, *appelée mesure image par* f.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que m_f est bien définie, que $m_f(\emptyset) = 0$ et que m_f est σ–additive, ce qui découle naturellement des propriétés de m. ■

Définition 3.25 (Loi de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.)

Soient (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de* E, *muni de la tribu* T, *dans* $\mathbb{R}$, *muni de la tribu borélienne). On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire* X *la probabilité* p_{X} *image de* p

par X *(cette probabilité est donc définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire* X *la fonction de répartition de la probabilité* p_X.

Un exemple simple de loi de probabilité est la loi uniforme sur $[0,1]$. Elle est définie par $p(A) = \lambda(A \cap [0,1])$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit X une v.a.r. (sur l'espace probabilisé (E, T, p)). On dit que $X \sim \mathcal{U}([0,1))]$ si $p_X = p$.

Si X et Y sont deux v.a.r. (sur des espaces probabilisés éventuellement différents), on dit que $X \sim Y$ si $p_X = p_Y$. Le sigle "$\sim$" signifie donc "a pour loi" ou "a même loi que".

Dans de nombreux cas, les modèles probabilistes seront déterminés par une loi de probabilité d'une variable aléatoire. Une conséquence immédiate du théorème 2.62 est que la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par sa fonction de répartition. Ceci est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 3.26 (Égalité de deux lois) *Soient* (E, T, p) *et* (F, S, q) *des espaces probabilisés,* X *une variable aléatoire réelle sur* E *(c'est-à-dire une fonction mesurable de* E*, muni de* T*, dans* $\mathbb{R}$ *muni de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) et* Y *une variable aléatoire réelle sur* F*. On note* p_X *et* p_Y *les lois de* X *et* Y*. On a alors* $p_X = p_Y$ *si et seulement si* $p(\{X \le t\}) = q(\{Y \le t\})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. On a aussi* $p_X = p_Y$ *si et seulement si* $p(\{s \le X \le t\}) = q(\{s \le Y \le t\})$ *pour tout* $s, t \in \mathbb{R}$*,* $s < t$*. (Les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges.)*

DÉMONSTRATION – Cette proposition est une conséquence des théorèmes 2.62 et 2.63. Il suffit de remarquer que $p(\{X \le t\}) = p_X(]-\infty, t])$ et $p(\{s \le X \le t\}) = p_X([s,t])$ (et que l'on a des égalités analogues avec Y au lieu de X). ■

On rappelle que la notation $p(\{X \le t\})$ (si X est une v. a. réelle sur l'espace probabilisé (E, T, p)) signifie $p(\{\omega \in E\,;\, X(\omega) \le t\})$. Cette notation sera parfois abrégée sous la forme $p(X \le t)$.

Définition 3.27 (Variables aléatoires équidistribuées)

Soient (E, T, p) *et* (E', T', p') *des espaces probabilisés,* X *(resp.* X'*) une variable aléatoire de* (E, T, p) *(resp.* (E', T', p')*) dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, on dit que les variables aléatoires* X *et* X' *sont équidistribuées si elles ont même loi de probabilité.*

Définition 3.28 (Variable aléatoire discrète, entière, continue) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* (E, T, p)*,* p_X *la loi de la variable aléatoire* X *et* F_X *sa fonction de répartition ;*

1. *Si* $X(E)$ *est dénombrable, on dit que la variable aléatoire* X *est discrète.*
2. *Si* $X(E) \subset \mathbb{N}$*, on dit que la variable aléatoire* X *est entière.*
3. *Si la fonction de répartition* F_X *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$ *est continue, on dit que la variable aléatoire est continue.*

Définition 3.29 (Variables aléatoires indépendantes) *Soit* (E,T,p) *un espace probabilisé.*

1. *Soit* $N > 1$ *et* $X_1,\ldots,X_N$ *une famille de variables aléatoires réelles. On dit que* $X_1,\ldots,X_N$ *sont indépendantes (ou que la famille (* $X_1,\ldots,X_N$*) est indépendante) si les tribus engendrées par* $X_1,\ldots,X_N$ *(on notera souvent* $\tau(X)$ *ou* $\sigma(X)$ *la tribu engendrée par la variable aléatoire* X*) sont indépendantes.*
2. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires réelles. On dit cette suite est indépendante (ou que les v.a.* $X_1, \ldots, X_n,\ldots$ *sont indépendantes) si, pour tout* $N > 1$*, les v.a.* $X_1, \ldots, X_N$ *sont indépendantes.*

On appellera “suite de v.a.r.i.i.d. ” une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées (ce dernier point signifiant que toutes les v.a. de la suite ont même loi).

Soit (E,T,p) un espace probabilisé et X_1,X_2,X_3 trois v.a.r. (c'est-à-dire variables aléatoires réelles). Le fait que X_1 soit indépendante de X_2 et X_3 n'implique pas que X_1 soit indépendante de (par exemple) X_2+X_3, même si X_2 et X_3 sont indépendantes. Mais, on a bien X_1 indépendante de X_2+X_3 si la famille (X_1,X_2,X_3) est indépendante. Ceci est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.30 (Indépendance et composition) *Soit* (E,T,p) *un espace probabilisé,* $n \geq 1$*,* $m \geq 1$ *et* $X_1, \ldots, X_n$*,* $Y_1, \ldots, Y_m$ *des v.a.r. indépendantes. Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* ψ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, les v.a.r.* $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ *et* $\psi(Y_1,\ldots,Y_m)$ *sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale de v.a.r. indépendantes en 2 groupes. la proposition peut se généraliser à une décomposition en un nombre quelconque de groupes.*

DÉMONSTRATION – La notation $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est un peu incorrecte (mais est toujours utilisée). Elle désigne (comme on le devine facilement) la composition de φ (qui est une v.a. de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) avec l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ donnée par les X_i, $i = 1,\ldots,n$.

La démonstration de cette proposition (et de sa généralisation à un nombre quelconque de groupes) est une conséquence simple de la proposition 2.60 dès que l'on remarque que la tribu engendrée par $\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée

par $X_1, \ldots, X_n$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les tribus $\tau(X_1), \ldots, \tau(X_n)$ (voir la définition 2.59), ce que nous démontrons maintenant.

On note τ la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$ et X l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\omega \in E$ associe $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))^t$. Il est facile de voir que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\}$ est une tribu (sur $\mathbb{R}^n$). Si $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$X^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i) \in \tau$$

(car $X_i^{-1}(A_i)$ appartient à $\tau(X_i)$ et donc à τ). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par l'ensemble des produits de boréliens de $\mathbb{R}$ (et même par l'ensemble des produits d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, voir l'exercice 2.7), on en déduit que

$$\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{ t.q. } X^{-1}(A) \in \tau\} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

et donc que $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ t.q. $X^{-1}(A) \in \tau\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ [1].

Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a donc $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \tau$ car $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (puisque φ est borélienne), ce qui prouve bien que la tribu engendrée par $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ est incluse dans la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$. ■

Nous verrons au chapitre 7 la conséquence principale de l'indépendance. Cette conséquence est que, si X, Y sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit des lois P_X et P_Y (c'est-à-dire , avec les notations du Chapitre 7, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$). Une propriété analogue est vraie pour une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de v.a.r. indépendantes.

Nous terminons ce paragraphe par un théorème très utile en probabilités sur la représentation d'une v.a. mesurable par rapport à une autre v.a..

Théorème 3.31 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.)

Soient X *et* Y *deux v.a. réelles définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Alors, la v.a.* Y *est mesurable par rapport à la tribu engendrée par* X *(notée* $\tau(X)$*) si et seulement si il existe une fonction borélienne* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $Y = f(X)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat fait l'objet de l'exercice 3.17. Il est intéressant de remarquer que la démonstration de ce théorème effectuée dans l'exercice 3.17 donne les informations complémentaires suivantes :

- Y est $\tau(X)$-mesurable bornée si et seulement s'il existe f borélienne bornée t.q. $Y = f(X)$,
- Y est $\tau(X)$-mesurable positive si et seulement s'il existe f borélienne positive t.q. $Y = f(X)$.

1. En fait, on a même $\tau = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$, voir la Proposition 9.2.

La partie “si” de ces deux résultats est immédiate. Pour la partie “seulement si”, il suffit de remarquer que la démonstration faite dans l’exercice 3.17 donne f t.q.

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(t),\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Im}(Y) \cup \{0\}, \text{ avec } \mathrm{Im}(Y) = \{Y(\omega),\, \omega \in \Omega\}.$$

■

3.5 Convergence p.p., p.s., en mesure, en probabilité

On introduit ici plusieurs notions de convergence de fonctions définies sur un espace mesuré à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$) et on donne des liens entre ces différentes convergences. On introduit les notions équivalentes pour les variables aléatoires en langage probabiliste.

Définition 3.32 (Égalité presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble et* f *et* g *des fonctions définies de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* $f = g$ *m-presque partout (et on note* $f = g$ *m-p.p.) si l’ensemble* $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ *est négligeable, c’est-à-dire qu’il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in A^c$.

On peut remarquer que si f et g sont des fonctions mesurables de E (muni de la tribu T et de la mesure m) dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}_+$), l’ensemble $\{x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)\}$ (noté aussi $\{f \neq g\}$) appartient à T. Le fait que $f = g$ m p.p. revient donc à dire que $m(\{f \neq g\}) = 0$. Dans la cas où f ou g n’est pas mesurable, l’ensemble $\{f \neq g\}$ peut être négligeable sans appartenir à T (il appartient nécessairement à T si la mesure est complète, voir la définition 2.26).

En l’absence de confusion possible, on remplace m-p.p. par p.p.. Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.33 (Égalité presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* X *et* Y *des variables aléatoires réelles. On dit que* $X = Y$ *presque sûrement (et on note* $X = Y$ *p.s.), si l’ensemble* $\{x \in E\,;\, X(x) \neq Y(x)\}$ *est négligeable.*

Définition 3.34 (Convergence presque partout) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* F *un ensemble,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* E *dans* F *et* f *une fonction de* E *dans* F *(*$F = \mathbb{R}$ *ou* $F = \overline{\mathbb{R}}_+$*, par exemple) ; on dit que* f_n *converge presque partout vers* f *(*$f_n \to f$ p.p.*) s’il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$.

Noter que la convergence simple entraîne la convergence presque partout.

La définition 3.34 se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.35 (Convergence presque sûre) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle. On dit que* X_n *converge presque sûrement vers* X *(*$X_n \to X$ *p.s.) s'il existe une partie* A *de* E*, négligeable, t.q., pour tout élément* x *de* A^c*, la suite* $(X_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $X(x)$.

Définition 3.36 (Convergence presque uniforme) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge presque uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *p.unif.) si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c.

La convergence presque uniforme entraîne la convergence presque partout (voir exercice 3.27).

Attention, la convergence presque uniforme ne donne pas la convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle. La convergence uniforme en dehors d'un ensemble de mesure nulle est reliée à la convergence essentiellement uniforme, c'est-à-dire la convergence pour le sup essentiel, défini ci-après, ou pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ que nous verrons dans la section 6.1.2.

Définition 3.37 (Sup essentiel) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f *est essentiellement bornée si il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \leq C$ *p.p.. On appelle alors sup essentiel de* $|f|$*, et on le note* $\|f\|_\infty$*, l'infimum des valeurs* C *telles que* $|f| \leq C$ *p.p.. Si* f *n'est pas essentiellement bornée, on pose* $\|f\|_\infty = \infty$.

Remarquons que dans le cas où $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, le sup essentiel d'une fonction continue est la borne supérieure de sa valeur absolue (ceci fait l'objet de la proposition 6.18).

Définition 3.38 (Convergence essentiellement uniforme) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$*. On dit que* f_n *converge essentiellement uniformément vers* f *(*$f_n \to f$ *ess. unif.) si* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

Il est facile de voir que la convergence essentiellement uniforme entraîne la convergence presque uniforme, mais la réciproque est fausse (voir l'exercice 3.28). Le théorème suivant donne, dans le cas où la mesure est finie, un résultat très important qui fait le lien entre la convergence presque partout et la convergence presque uniforme.

Théorème 3.39 (Egorov) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, tel que* $m(E) < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On suppose que* $f_n \to f$ *p.p.. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) \le \varepsilon$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* A^c. *(Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque uniformément vers* f.*)*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 3.28. Attention, lorsque $m(E) = +\infty$, on peut trouver des suites de fonctions qui convergent presque partout et non presque uniformément.

Définition 3.40 (Convergence en mesure) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ *et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f_n *converge en mesure vers* f *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in E\ ; |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par :

Définition 3.41 (Convergence en probabilité) *Soient* (E, T, p) *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles et* X *une variable aléatoire réelle . On dit que* X_n *converge en probabilité vers* X *si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} p(\{x \in E\ ; |X(x) - X_n(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

On peut montrer (cf exercice 3.26) que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $f = g$ p.p.. On montre aussi que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$, et, si m est une mesure finie, $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.

On montre à l'aide du théorème d'Egorov que si f_n converge vers f presque partout, et si $m(E) < +\infty$, alors f_n converge vers f en mesure. Réciproquement, si f_n converge vers f en mesure, alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque uniformément (et donc presque partout). Ce second résultat est vrai même si $m(E) = +\infty$ (voir exercice 3.29).

On donne maintenant un résumé des différents types de convergence connus jusqu'à présent avec les relations existantes entre eux. Les relations entre convergence presque partout et convergence en mesure (resp. convergence presque sûre et convergence

en probabilité) sont étudiées dans l'exercice 3.29. (On en introduira bientôt encore quelques-unes)

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
convergence simple (cs)	
convergence uniforme (cu)	
convergence presque partout (cpp)	convergence presque sûre (cps)
convergence presque uniforme (cpu)	
convergence en mesure (cm)	convergence en probabilité (cp)

On a les implications suivantes :

Terminologie analyste	**Terminologie probabiliste**
(cu) $\Rightarrow$ (cs) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cu) $\Rightarrow$ (cpu) $\Rightarrow$ (cpp)	
(cpp) $\Rightarrow$ (cpu) si la mesure est finie	
(cm) $\Rightarrow$ (cpu) pour une sous-suite	(cp) $\Rightarrow$ (cps) pour une sous-suite
(cpp) $\Rightarrow$ (cm) si la mesure est finie	(cps) $\Rightarrow$ (cp)
(cpu) $\Rightarrow$ (cm)	

3.6 Exercices

Exercice 3.1 (Caractérisation des fonctions mesurables) Soient (E,T) un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que $\mathrm{T}_f = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}\}$ est une tribu.

   Corrigé – *Cette question est un cas particulier (avec* $\mathrm{F} = \mathbb{R}$*) de la question 2 de l'exercice 2.4.*

2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est mesurable,
   (ii) $f^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathrm{T}$, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$.

   Corrigé – *On remarque que f mesurable signifie simplement que* T_f *(définie à la question précédente) contient* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Le sens (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), on remarque que T_f *est une tribu. Donc, si* T_f *contient* $\mathcal{C}$*, on a aussi* T_f *contient* $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Ceci donne f mesurable. Donc, on a bien (ii) $\Rightarrow$ (i)*

Exercice 3.2 (Mesurabilité pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{F}$ une σ-algèbre sur Ω. Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne.

1. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose $\mathcal{C} = \{]-\infty, x[,\, x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de la proposition 3.16 (voir aussi l'exercice 3.1), il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   Comme les éléments de $\mathcal{C}$ sont des ouverts, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour montrer l'inclusion inverse, on commence par remarquer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a (grâce aux propriétés de stabilité d'une tribu) $[a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$, puis $]a, b[= \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} [a + (1/n), b[\in \mathrm{T}(\mathcal{C})$. Puis, comme tout ouvert est une union au plus dénombrable d'intrevalles ouverts bornés (voir le lemme 2.11), on en déduit que $\mathrm{T}(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts et donc $\mathrm{T}(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Finalement, on a bien $\mathrm{T}(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Montrer que f est mesurable si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega,\, f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

   Corrigé – *On pose ici $\mathcal{D} = \{]-\infty, x],\, x \in \mathbb{R}\}$. Compte tenu de proposition 3.16, il suffit de montrer que $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

   Comme les éléments de $\mathcal{D}$ sont des fermés, on a, bien sûr, $\mathrm{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour montrer l'inclusion inverse, on remarque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $]-\infty, x[= \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}]-\infty, x - (1/n)]$ et donc $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$ (où $\mathcal{C}$ est l'ensemble défini à la question précédente). On a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathrm{T}(\mathcal{C}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$. Finalement, on a donc bien $\mathrm{T}(\mathcal{D}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.3 (Composition de fonctions mesurables) Soit (E, T) et (F, S) deux espaces mesurables. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\varphi : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours, de la tribu borélienne). On suppose que f et φ sont mesurables. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).

Corrigé – *Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on remarque que $(\varphi \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B}))$. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{S}$ car φ est mesurable (de F dans $\mathbb{R}$), on a donc $f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathrm{B})) \in \mathrm{T}$ car f est mesurable (de E dans F). Ceci montre bien que $\varphi \circ f$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).*

Exercice 3.4 (Topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$) On définit la topologie de $\mathbb{R}_+$ comme étant la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\mathbb{R}$. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$, l'ensemble O est donc un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$.

1. Soit $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ si et seulement si il existe U ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $\mathrm{O} = \mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+$. (Ceci montre que la topologie de $\mathbb{R}_+$ est aussi la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$ par la topologie de $\overline{\mathbb{R}}_+$.)
2. Montrer que L'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}_+$ est égal à l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ et est aussi égal à l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que, si $\mathrm{B} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, on a $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ si et seulement si $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (noter que $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} = \mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+$).

Exercice 3.5 ($\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+\ldots$) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne. Montrer que φ est mesurable (on dit aussi borélienne) si et seulement si φ est mesurable quand on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ ($\overline{\mathbb{R}}_+$ étant aussi muni de la tribu borélienne).

> **Corrigé** – *On suppose φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}_+$, on a donc $\mathrm{B} \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (voir la définition 3.2 page 116). Comme φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) = \varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci donne donc que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*
>
> *Réciproquement, on suppose maintenant φ mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (mais φ ne prend jamais la valeur $+\infty$, on peut donc la considérer comme étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a aussi $\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+ \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Comme φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, on en déduit que $\varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme $\varphi \geq 0$, on a $\varphi^{-1}(\mathrm{B} \cap \mathbb{R}_+) = \varphi^{-1}(\mathrm{B})$ et donc $\varphi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci prouve que φ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.6 (Stabilité de $\mathcal{M}$)

1. Soient (E, T), $(\mathrm{E}', \mathrm{T}')$, $(\mathrm{E}'', \mathrm{T}'')$ des espaces mesurables, f (resp. g) une application de E dans E' (resp. de E' dans E''). On suppose que f et g sont mesurables. Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de E dans E''.

   > **Corrigé** – *Cette question est identique à celle de l'exercice 3.3 avec E'' au lieu de $\mathbb{R}$. La démonstration est semblable :*
   >
   > *Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{T}''$, on remarque que $(g \circ f)^{-1}(\mathrm{B}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B}))$. Comme $g^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}'$ car g est mesurable (de E' dans E''), on a donc $f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{B})) \in \mathrm{T}$ car f est mesurable (de E dans E'). Ceci montre bien que $g \circ f$ est mesurable (de E dans E'').*

2. Soit (E, T) un espace mesurable, on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; soient f et g des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
   (a) Pour $x \in \mathrm{E}$ on pose $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ et $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Montrer que f^+ et f^- sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   > **Corrigé** – *Cette question est démontrée dans la proposition 3.23 page 126.*

   (b) Montrer que $f + g$, fg et $|f|$ sont des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

   > **Corrigé** – *Le fait que $f + g$, $fg \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.19 et le fait que $|f| \in \mathcal{M}$ est démontré dans la proposition 3.23 (car $|f|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et $|f| \in \mathcal{M}_+$, on conclut avec l'exercice 3.5.*

3. Soient (E, T) un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $f(x) = lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (pour tout $x \in \mathrm{E}$). Montrer que f est une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *La démonstration de cette question est donnée dans la proposition 3.19 page 123 (propriété 3).*

4. Soit (E, T) un espace mesurable, on suppose qu'il existe $A \in T$ dont les sous-ensembles ne soient pas tous mesurables. Il existe donc $B \subset A$ tel que $B \notin T$. Montrer que $h = 1_B - 1_{A \setminus B}$ n'est pas mesurable (de E dans $\mathbb{R}$), alors que $|h|$ l'est.

   Corrigé – $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *alors que* $h^{-1}(\{1\}) = B \notin T$, *donc h n'est pas mesurable. Par contre* $|h| = 1_A$ *est mesurable car* $A \in T$.

Exercice 3.7 (Mesurabilité des fonctions continues) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ (au départ et à l'arrivée) de la tribu borélienne

1. On suppose f continue. Montrer que f est mesurable (on dit aussi que f est borélienne).

   Corrigé – *Soit* O *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Comme* f *est continue,* $f^{-1}(O)$ *est aussi un ouvert de* $\mathbb{R}$, *donc* $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme l'ensemble des ouverts engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on en déduit que* f *est mesurable (on utilise ici la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 121).*

2. On suppose f continue à droite (resp. gauche). Montrer que f est mesurable.

   Corrigé – *On suppose* f *continue à droite. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* f_n *par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x \le -n, \\ f(\frac{p}{n}) \ \ si\ -n < x \le n \ et\ p \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ \frac{p-1}{n} < x \le \frac{p}{n}, \\ 0 \ \ si\ x > n, \end{cases}$$

de sorte que

$$f_n = \sum_{p=-n^2+1}^{n^2} f(\frac{p}{n}) 1_{]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}]}.$$

On a $f_n \in \mathcal{E}$ *car* $]\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *pour tout* n *et* p. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour* $n > |x|$, *on a* $f_n(x) = f(\frac{p}{n})$ *avec* $\frac{p}{n} - \frac{1}{n} < x \le \frac{p}{n}$ *(p dépend de n, x est fixé). Comme* f *est continue à droite en* x, *on a* $f_n(x) \to f(x)$ *quand* $n \to +\infty$ *(car* $\frac{p}{n} \to x$, *avec* $\frac{p}{n} \ge x$*). La deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.20 page 125) donne alors* $f \in \mathcal{M}$.

3. On suppose f croissante. Montrer que f est mesurable.

   Corrigé – *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On pose* $A = f^{-1}([\alpha, \infty[)$. *On suppose* $A \neq \emptyset$ *(si* $A = \emptyset$, *on a bien* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). Si* $x \in A$, *on a* $f(x) \ge \alpha$ *et, comme* f *est croissante, on a aussi* $f(y) \ge \alpha$ *pour tout* $y \ge x$. *Donc,* $[x, \infty[\subset A$. *En posant* $a = \inf A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *on en déduit que* $]a, \infty[\subset A \subset [a, \infty[$. A *est donc nécessairement un intervalle (dont la borne supérieure est* ∞*), ce qui prouve que* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $\{[\alpha, \infty[,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on en déduit que* f *est mesurable. (On a utilisé ici de nouveau la caractérisation de la mesurabilité donnée à la proposition 3.16 page 121).*

Exercice 3.8 (Mesurabilité de $1_{\mathbb{Q}}$) On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est-elle mesurable ?

> **Corrigé –** *Oui, la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable. En effet, si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (et même si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$), on a $1_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (selon que 1 et 0 appartiennent ou non à A). Comme ces 4 ensembles sont des boréliens, on en déduit que $1_{\mathbb{Q}}$ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quand $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne).*

Exercice 3.9 (Loi de probabilité de la v.a.r. nulle) Soit (E, T, p) un espace probabilisé et X une v.a.r.. On suppose que $X = 0$ p.s.. Donner la loi de probabilité p_X de X.

> **Corrigé –** *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $0 \in A$ on a $p(X^{-1}(A)) = 1$ et si $0 \notin A$ on a $p(X^{-1}(A)) = 0$. Ceci montre que p_X est la mesure de Dirac en 0 (notée δ_0).*

Exercice 3.10 Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble E.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que : $B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A$ implique $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que toute fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$) est constante sur A.

> **Corrigé –** *Soit f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. (L'ensemble E est muni de la tribu $\mathcal{A}$ et, comme d'habitude, $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne.)*
>
> *On peut supposer $A \neq \emptyset$ (et même A non réduit à un seul élément, sinon il n'y a rien à démontrer !).*
>
> *Soit $x \in A$, on pose $\alpha = f(x)$ et $B = A \cap f^{-1}(\{\alpha\})$. Comme f est mesurable et que $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $B \in \mathcal{A}$. Comme $B \subset A$ et que $B \neq \emptyset$ (car $x \in B$) on a nécessairement $B = A$, ce qui prouve que f est constante sur A (et $f(y) = \alpha$ pour tout $y \in A$).*

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition, montrer qu'une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition.

> **Corrigé –** *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E. On a donc $\cup_{i \in I} A_i = E$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On peut aussi supposer aussi que $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.*
>
> *Selon l'exercice 2.11, on a alors*
>
> $$\mathcal{A} = \{\cup_{i \in J} A_i, \text{ avec } J \subset I \text{ et } J \text{ ou } J^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$
>
> *Soit f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.*
>
> *Soit $i \in I$. Comme les A_j sont disjoints deux à deux et non vides et que tout élément de $\mathcal{A}$ est une réunion de A_j, on a*
>
> $$B \in \mathcal{A},\ B \subset A_i \Rightarrow B = \emptyset \text{ ou } B = A_i.$$
>
> *On peut donc appliquer la première question, elle donne que f est constante sur A_i.*

3. Donner un exemple de fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable pour la tribu engendrée par cette partition. [Prendre comme partition de $\mathbb{R}$ tous les singletons]

Corrigé – *Comme cela est suggéré, on prend* $E = \mathbb{R}$ *et comme partition l'ensemble des singletons, c'est-à-dire* $\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}$. *La tribu engendrée par cette partition, notée* $\mathcal{A}$, *est donc l'ensemble des parties de* $\mathbb{R}$ *au plus dénombrable ou dont le complémentaire est au plus dénombrable. La tribu* $\mathcal{A}$ *est incluse dans* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(car les singletons appartiennent à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*) mais est différente de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(par exemple, l'intervalle* $]0,1[$ *appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *mais n'appartient pas à* $\mathcal{A}$*). La fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *n'est donc par mesurable (par exemple,* $f^{-1}(]0,1[) =]0,1[\notin \mathcal{A}$*) mais est bien constante sur chaque élément de la partition.*

Exercice 3.11 (Égalité presque partout) 1. Soient f et g des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue ; montrer que $f = g$ λ p.p. si et seulement si $f = g$.

Corrigé – *Si* $f = g$ *(c'est-à-dire* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*), on a bien* $f = g$ λ *p.p. car* $f = g$ *sur* $\emptyset^c$ *et* $\lambda(\emptyset) = 0$.

Pour la réciproque, on va utiliser le fait qu'un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive. En effet, si O *est un ouvert non vide, il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\alpha < \beta$ *et* $]\alpha,\beta[\subset O$, *on a donc* $0 < \beta - \alpha = \lambda(]\alpha,\beta[) \le \lambda(O)$.

On suppose maintenant que $f = g$ λ *p.p., il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(A) = 0$ *et* $f = g$ *sur* A^c. *On a alors* $\{f(x) \ne g(x)\} \subset A$. *Or,* $\{f(x) \ne g(x)\} = (f-g)^{-1}(\mathbb{R}^*)$ *est un ouvert car* $(f-g)$ *est continue (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) et* $\mathbb{R}^*$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Donc* $\{f(x) \ne g(x)\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et la monotonie de* λ *donne* $\lambda(\{f(x) \ne g(x)\}) \le \lambda(A) = 0$. *On en déduit que* $\{f(x) \ne g(x)\} = \emptyset$ *(car un ouvert non vide est toujours de mesure de Lebesgue strictement positive) et donc* $f = g$.

2. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0 (définie en (2.2)) ; montrer que $f = g$ δ_0 p.p. si et seulement si $f(0) = g(0)$.

Corrigé – *Si* $f(0) = g(0)$, *on prend* $A = \{0\}^c$. *On a bien* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_0(A) = 0$ *et* $f = g$ *sur* A^c *car* $A^c = \{0\}$. *Donc,* $f = g$ δ_0 *p.p..*

Réciproquement, on suppose maintenant que $f = g$ δ_0 *p.p., il existe donc* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $f = g$ *sur* A^c *et* $\delta_0(A) = 0$. *Comme* $\delta_0(A) = 0$, *on a donc* $0 \notin A$, *c'est-à-dire* $0 \in A^c$ *et donc* $f(0) = g(0)$.

Exercice 3.12 (Mesurabilité) Soit $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^p$ de sa tribu borélienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$). on suppose que f est mesurable par rapport à $x \in \mathbb{R}^N$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, et que f est continue a gauche par rapport a $y \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Pour $n > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$, on pose : $a_p^n = \frac{p}{n}$, $p \in \mathbb{Z}$; on définit la fonction f_n, $n > 1$, de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x,y) = f(x, a_p^n), \text{ si } y \in [a_p^n, a_{p+1}^n[.$$

On se limite à N = 1.

1. Montrer que f_n converge simplement vers f lorsque $n \to +\infty$.

   Corrigé – *Soit $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $f_n(x,y) = f(x, \frac{p}{n})$ avec $\frac{p}{n} \le y < \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$. Noter que x et y sont fixés et que p dépend de n. Quand $n \to +\infty$, on a donc $\frac{p}{n} \to y$ avec $\frac{p}{n} \le y$. Comme $f(x,\cdot)$ est continue à gauche en y, on a donc $f(x,\frac{p}{n}) \to f(x,y)$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $f_n(x,y) \to f(x,y)$ quand $n \to +\infty$.*

2. Montrer que f_n est mesurable. [On pourra utiliser, sans le démontrer, le fait que $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 79.]

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $g_p = f(\cdot, \frac{p}{n})$. On a donc, par hypothèse, g_p mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

   Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ tel que $y \in [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[$. On a alors $f_n(x,y) = g_p(x)$ et donc $f_n(x,y) \in \mathrm{C}$ si et seulement $g_p(x) \in \mathrm{C}$. On en déduit que :

$$f_n^{-1}(\mathrm{C}) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (g_p^{-1}(\mathrm{C}) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[).$$

   Comme g_p est mesurable, on a $g_p^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a aussi $[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $g_p^{-1}(\mathrm{C}) \times [\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ceci est démontré dans l'exercice 2.6 page 79). Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est stable par union dénombrable, on en déduit $f_n^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et donc f_n mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est mesurable.

   Corrigé – *Comme f_n mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $f_n(x,y) \to f(x,y)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$, la propriété 3 de la proposition 3.19 donne que f est mesurable (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).*

Exercice 3.13 (Sur la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}_+$)

On note T l'ensemble des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}_+$ contenant les deux points 0 et $+\infty$ ou ne contenant aucun de ces deux points, c'est-à-dire $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ avec

$$\mathrm{T}_1 = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset \mathrm{A}\} \text{ et } \mathrm{T}_2 = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \text{ t.q. } \{0,\infty\} \subset \mathrm{A}^c\}$$

1. Montrer que T est une tribu et que T est strictement incluse dans $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
2. On pose $\mathcal{C} = \{]\alpha,\beta[,\ 0 \le \alpha < \beta \le +\infty[\}$. Déduire de la première question que $\mathcal{C}$ n'engendre pas la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.14 (Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}_+$)

1. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

   Corrigé – *On note $\mathcal{C}_1 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$.*

— *Comme* $[0,\beta[$ *est un ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *et donc* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

— *Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on a* $\{[\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+^*\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

Comme $[0,\infty] = [0,1[\cup[1,\infty] \in \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$, *on a aussi* $\{[\alpha,\infty], \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

Par stabilité d'une tribu par intersection, on a alors $\{[\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

Par stabilité d'une tribu par union dénombrable, on montre alors que $\{]\alpha,\beta[,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+,\ \alpha < \beta\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$ *et* $\{]\beta,\infty], \beta \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

Comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+$ *est une réunion au plus dénombrable d'intervalles du type* $]\alpha,\beta[$ *(avec* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*),* $[0,\beta[$ *(avec* $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*) et* $]\beta,\infty]$ *(avec* $\beta \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$*), on en déduit que tout ouvert de* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *est dans* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$ *et donc* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

On a bien montré que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \mathrm{T}(\mathcal{C}_1)$.

2. Montrer que $\{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$ engendre $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{C}_2 = \{[0,\beta[, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*\}$. *Si* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, *on remarque que* $[0,\beta[= \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*, \alpha<\beta} [0,\alpha[$. *On en déduit que* $[0,\beta[\in \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$. *On a donc* $\mathcal{C}_1 \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$ *et* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) \subset \mathrm{T}(\mathcal{C}_2)$.

Comme $\mathrm{T}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, *on a aussi* $\mathrm{T}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3. Montrer que $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'engendre pas $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Corrigé – *Cette question peut se faire comme dans l'exercice 3.13. On donne ici une autre méthode. On prend un ensemble* E *(ayant au moins 2 éléments) et une tribu* T *sur* E *différente de* $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ *(par exemple,* $\mathrm{T} = \{\emptyset, \mathrm{E}\}$*). Soit alors* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$. *On définit* f *de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *par* $f(x) = \infty$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \notin \mathrm{A}$. *Comme* $\mathrm{A} \notin \mathrm{T}$, *la fonction* f *est non mesurable. On a pourtant* $f^{-1}(]0,\beta[) = \emptyset \in \mathrm{T}$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. *Ceci montre que* $\{]0,\beta[, \beta \in \mathbb{R}_+^*\}$ *n'engendre pas* $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Exercice 3.15 (Graphe d'une fonction borélienne) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On se propose de montrer que le graphe de f est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On admettra le résultat suivant que l'on verra au chapitre 7 :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \tag{3.2}$$

On munit aussi $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(x,y) = f(x)$ et $\mathrm{H}(x,y) = y$.

1. Montrer que F et H sont mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a* $F^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R}$. *Comme* f *est mesurable,* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *(3.2) donne* $f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et donc* $F^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On a donc* F *mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

Le fait que H *est mesurable se démontre de manière semblable en remarquant que* $H^{-1}(A) = \mathbb{R} \times A$ *(ou en utilisant la continuité de* H*).*

2. On pose $G(f) = \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 ; y = f(x)\}$ ($G(f)$ est donc le graphe de f). Montrer que $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *L'ensemble de fonctions mesurables est un espace vectoriel, on a donc* $F - H$ *mesurable. On en déduit que* $G(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *en remarquant que* $G(f) = (F - H)^{-1}(\{0\})$ *et* $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.16 (Mesurabilité au sens de Lusin) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts de $\mathbb{R}^N$. On rappelle (cf. cours) que m est nécessairement régulière (c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé et O ouvert tel que $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) < \varepsilon$).

Soit $f \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que f est mesurable au sens de Lusin si pour tout compact K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K_1 compact, $K_1 \subset K$, tel que $m(K \setminus K_1) \leq \varepsilon$ et $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [Construire K_1 avec K, F et O, où F et O sont donnés par la régularité de m appliquée à l'ensemble A.]

Corrigé – *Soit* K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la régularité de m, il existe* F *fermé et* O *ouvert t.q.* $F \subset A \subset O$ *et* $m(O \setminus F) < \varepsilon$. *On prend* $K_1 = (K \cap F) \cup (K \cap O^c)$.

Les ensembles $K \cap F$ *et* $K \cap O^c$ *sont fermés (car l'intersection d'un compact et d'un fermé est un compact). L'ensemble* K_1 *est donc compact car il est l'union de deux compacts. Comme* $K_1 = K \setminus (O \setminus F)$, *on a bien* $K_1 \subset K$ *et* $(K \setminus K_1) \subset (O \setminus F)$. *On en déduit* $m(K \setminus K_1) \leq m(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

On montre maintenant que $f_{|K_1} \in C(K_1, \mathbb{R})$. *Soit* $x \in K_1$. *On distingue deux cas :*

Premier cas. *Si* $x \in K \cap F$, *on a alors* $x \in O$. *Comme* O *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset O$ *(où* $B(x, \delta)$ *est la boule ouverte de centre x et de rayon* δ*). On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap F \subset A$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 1 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x (car constante dans un voisinage de x).*

Deuxième cas. *Si* $x \in K \cap O^c$, *on raisonne de manière similaire. On a* $x \in F^c$. *Comme* F^c *est ouvert il existe* $\delta > 0$ *tel que* $B(x, \delta) \subset F^c$. *On a donc* $K_1 \cap B(x, \delta) \subset K \cap O^c \subset A^c$, *ce qui prouve que* $f_{|K_1}$ *est constante et égale à* 0 *sur* $K_1 \cap B(x, \delta)$ *et donc* $f_{|K_1}$ *est continue en x.*

2. On suppose, dans cette question, que f est étagée (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Montrer que f est mesurable au sens de Lusin.

   Corrigé –
   Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. *On pose* $f_i = 1_{A_i}$, *de sorte que* $f = \sum_{i=1}^n a_i f_i$.

   Soit K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la question 1, pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *il existe* $K_1^{(i)}$ *compact,* $K_1^{(i)} \subset K$, *tel que* $m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon/n$ *et* $(f_i)_{|_{K_1^{(i)}}} \in C(K_1^{(i)}, \mathbb{R})$. *On prend alors :*

$$K_1 = \bigcap_{i=1}^n K_1^{(i)}.$$

   On a bien K_1 *compact (car intersection de compacts),* $K_1 \subset K$. *On a aussi* $(K \setminus K_1) = \bigcup_{i=1}^n (K \setminus K_1^{(i)})$ *et donc :*

$$m(K \setminus K_1) \leq \sum_{i=1}^n m(K \setminus K_1^{(i)}) \leq \varepsilon.$$

   Enfin, $f_{|_{K_1}}$ *est continue car* $f_{|_{K_1}} = \sum_{i=1}^n a_i (f_i)_{|_{K_1}}$ *et* $(f_i)_{|_{K_1}}$ *est continue (puisque* $(f_i)_{K_1^{(i)}}$ *est continue et* $K_1 \subset K_1^{(i)}$*).*

3. On suppose que f est mesurable (c'est-à-dire $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$). Montrer que f est mesurable au sens de Lusin. [On rappelle qu'une fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées. On pourra utiliser le théorème d'Egorov, Théorème 3.39, et la question précédente.]

   Corrigé – *Comme* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, *il existe* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p..*

   Soit K *compact et* $\varepsilon > 0$. *Par la question 2, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $K_1^{(n)}$ *compact,* $K_1^{(n)} \subset K$, *tel que* $m(K \setminus K_1^{(n)}) \leq \varepsilon 2^{-n}$ *et* $(f_n)_{|_{K_1^{(n)}}} \in C(K_1^{(n)}, \mathbb{R})$. *On prend tout d'abord :*

$$K_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_1^{(n)}.$$

   On a bien K_2 *compact (car intersection de compacts),* $K_2 \subset K$. *On a aussi* $(K \setminus K_2) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (K \setminus K_1^{(n)})$ *et donc* $m(K \setminus K_2) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K \setminus K_1^{(n)}) \leq 2\varepsilon$. *Enfin,* $(f_n)_{|_{K_2}}$ *est continue pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   Pour trouver K_1, *on utilise maintenant le théorème d'Egorov. Comme* $f_n \to f$ *p.p. sur* K_2 *et que* $m(K_2) < \infty$, *il existe* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $A \subset K_2$, $m(K_2 \setminus A) \leq \varepsilon$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A. *En utilisant la régularité de m, on trouve aussi* $F \subset A$, F *fermé et* $m(A \setminus F) \leq \varepsilon$. *On prend alors* $K_1 = F$.

   On a bien K_1 *compact (car* K_1 *est fermé dans le compact* K_2*),* $K_1 \subset K$. *On a* $(K \setminus K_1) = (K \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus A) \cup (A \setminus F)$ *et donc* $m(K \setminus K_1) \leq 4\varepsilon$. *Enfin* $f_{|_{K_1}}$ *est continue car* $f_{|_{K_1}}$ *est limite uniforme de la suite de fonctions continues* $((f_n)_{|_{K_1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.17 (V.a. mesurable par rapport à une autre v.a.) Dans cet exercice, on démontre le théorème 3.31. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On veut veut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\tau(\mathrm{X})$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$ (c'est-à-dire, plus précisément, que $\mathrm{Y} = f \circ \mathrm{X}$).

1. Montrer que si Y est de la forme $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\tau(\mathrm{X})$-mesurable.

   Corrigé – *On rappelle que la tribu engendrée par* X *est* $\tau(\mathrm{X}) = \{\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B}), \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

   Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on a* $\mathrm{Y}^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{X}^{-1}(f^{-1}(\mathrm{B}))$. *Comme f est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne), on a* $f^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $\mathrm{X}^{-1}(f^{-1}(\mathrm{B})) \in \tau(\mathrm{X})$. *Ce qui prouve que* T *est* $\tau(\mathrm{X})$*-mesurable.*

On suppose maintenant que Y est $\tau(\mathrm{X})$-mesurable.

2. On suppose, dans cette question, qu'il existe une suite de réels (a_j) tels que $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$ et une suite d'événements (A_j) disjoints deux à deux tels que

$$\mathrm{Y} = \sum_j a_j 1_{\mathrm{A}_j}.$$

   On suppose aussi que $\bigcup_j \mathrm{A}_j = \Omega$. Montrer que, pour tout j, $\mathrm{A}_j \in \tau(\mathrm{X})$ et qu'il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$.

   Corrigé – *Soit* $j \in \mathbb{N}$. *Comme les* A_i *sont disjoints deux à deux,* $a_i \neq a_k$ *si* $i \neq k$ *et* $\bigcup_i \mathrm{A}_i = \Omega$, *on a* $\mathrm{A}_j = \mathrm{Y}^{-1}(\{a_j\})$. *Comme* $\{a_j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* Y *est* τ*-mesurable, on en déduit que* $\mathrm{A}_j \in \tau(\mathrm{X})$. *(On rappelle aussi que* $\tau(\mathrm{X}) \subset \mathcal{A}$ *car* X *est une v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.*)*

   Pour tout i, il existe $\mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\mathrm{A}_i = \mathrm{X}^{-1}(\mathrm{B}_i)$ *(car* $\mathrm{A}_i \in \tau(\mathrm{X})$*). Comme les* A_i *sont disjoints deux à deux, on a, si* $i \neq j$, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j \cap Im(\mathrm{X}) = \emptyset$ *(avec* $Im(\mathrm{X}) = \{\mathrm{X}(\omega), \omega \in \Omega\}$*). On peut donc supposer les* B_i *disjoints deux à deux en remplaçant chaque* B_i *(*$i > 0$*) par* $\mathrm{B}_i \setminus \bigcup_{j<i} \mathrm{B}_j$.

   On pose $f = \sum_i a_i 1_{\mathrm{B}_i}$. *La fonction f est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si* $\omega \in \Omega$, *il existe i tel que* $\omega \in \mathrm{A}_i$ *(car* $\Omega = \bigcup_i \mathrm{A}_i$*), on a donc* $\mathrm{X}(w) \in \mathrm{B}_i$ *et donc* $f(\mathrm{X}(\omega)) = a_i = \mathrm{Y}(\omega)$, *ce qui donne bien* $f(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$.

3. Soit n un entier. On définit la fonction $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\phi_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. ($[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.)

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_n(x)$ converge vers x, quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $0 \leq nx - [nx] < 1$ *et donc* $0 \leq x - \phi_n(x) < \frac{1}{n}$, *ce qui prouve que* $\phi_n(x) \to x$ *quand* $n \to \infty$.

(b) On pose $Y_n = \phi_n(Y)$. Montrer que Y_n est $\tau(X)$ mesurable.

Corrigé – *On remarque tout d'abord que ϕ_1 est borélienne. En effet, pour $p \in \mathbb{Z}$, on a $\phi_1^{-1}(\{p\}) = [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a*

$$\phi_1^{-1}(B) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z} \cap B} [p, p+1[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $x \mapsto nx$ est continue, c'est une application borélienne. Par composition (et produit par $(1/n)$), on en déduit que la fonction ϕ_n est borélienne. On montre alors que Y_n est $\tau(X)$-mesurable, comme dans la première question car, pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $Y_n^{-1}(B) = Y^{-1}(\phi_n^{-1}(B)) \in \tau(X)$.

4. Terminer la preuve du théorème.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme l'ensemble des valeurs prises par Y_n (définie dans la troisième question) est au plus dénombrable, on peut appliquer la deuxième question. On obtient l'existence de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, borélienne, t.q. $Y_n = f_n(X)$.*

On note A l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. A est donc aussi l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. On en déduit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car A peut s'écrire :

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{p,q \geq N} (f_p - f_q)^{-1}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]).$$

On pose maintenant $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in A^c$. La fonction f est borélienne car f est limite simple des fonction boréliennes $f_n 1_{A^c}$ quand $n \to \infty$.

Enfin, si $\omega \in \Omega$, on a $Y_n(\omega) = f_n(X(\omega))$. La troisième question donne que $Y_n(\omega) = \phi_n(Y(\omega)) \to Y(\omega)$. On a donc $X(\omega) \in A$ et donc $f_n(X(\omega)) \to f(X(\omega))$. Ceci donne $Y(\omega) = f(X(\omega))$. On a bien montré que $Y = f(X)$ avec f borélienne.

Maintenant, on se demande dans quelle mesure la fonction f est unique. On note P_X la loi de X.

5. Soit f et g deux fonctions boréliennes t.q. $Y = f(X) = g(X)$. Montrer que

$$P_X(f = g) = 1.$$

Corrigé – *Soit $B = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)\}$. On a $B = (f-g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Si $\omega \in \Omega$, on a $f(X(\omega)) = g(X(\omega)) = Y(\omega)$ et donc $X(\omega) \in B$. Ceci prouve que $X^{-1}(B) = \Omega$ et donc que $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = 1$, c'est-à-dire $P_X(f = g) = 1$.*

Exercice 3.18 (Composition de v.a.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu des boréliens.) On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega, \; Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Corrigé – *Soit* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose :*

$$A_n = \{N = n\} = \{\omega \in \Omega, N(\omega) = n\} \text{ et } B_n = Y_n^{-1}(B) = \{Y_n \in B\} = \{\omega \in \Omega, Y_n(\omega) \in B\}.$$

(Noter que l'ensemble des A_n*,* $n \in \mathbb{N}^*$*, forme une partition de* Ω*.) On va montrer que* $Z^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$*.*

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$*, on a* $\omega \in A_{N(\omega)}$ *et, si* $\omega \in Z^{-1}(B)$*, on a* $Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega) \in B$*. On a donc* $\omega \in A_{N(\omega)} \cap B_{N(\omega)}$*, ce qui donne bien* $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$*.*

Réciproquement, si $\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$*, il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\omega \in A_n \cap B_n$*. On a donc* $Z(\omega) = Y_n(\omega) \in B$*. On a bien montré que* $Z^{-1}(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(A_n \cap B_n)$*.*

Comme N *et* Y_n *sont des v.a.r., on a* $A_n, B_n \in \mathcal{A}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*. On en déduit que* $Z^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*. Ceci donne bien que* Z *est mesurable.*

N.B. : Une autre démonstration possible est de remarquer que $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{A_n} Y_n$*.*

Exercice 3.19 (Evénements, tribus et v.a. indépendantes) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 événements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\})$ et $\tau(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \tau(\{A_1\})$ et $B_2 \in \tau(\{A_2\})$).

   Corrigé – *On a* $\tau(\{A_1\}) = \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\}$ *et* $\tau(\{A_2\}) = \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}$*.*

   Comme les tribus $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes on a donc :*

   $$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) \text{ pour tout } B_1 \in \{\emptyset, A_1, A_1^c, E\} \text{ et tout } \{\emptyset, A_2, A_2^c, E\}. \quad (3.3)$$

   En prenant, dans (3.3), $B_1 = A_1$ *et* $B_2 = A_2$*, on en déduit que* A_1 *et* A_2 *sont indépendants.*

   Réciproquement, on suppose que A_1 *et* A_2 *sont indépendants. Pour montrer que* $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes, il suffit de montrer (3.3). On remarque tout d'abord que (3.3) est vraie si* $B_1 = \emptyset$ *ou* E *et si* $B_2 = \emptyset$ *ou* E *(l'hypothèse d'indépendance de* A_1 *et* A_2 *est même inutile). Puis, on remarque que l'hypothèse d'indépendance de* A_1 *et* A_2 *donne que (3.3) est vraie si* $B_1 = A_1$ *et* $B_2 = A_2$*. Enfin, on remarque que* C_1 *et* C_2 *indépendants implique que* C_1 *et* C_2^c *sont indépendants. En effet, on a :*

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1 \setminus (C_1 \cap C_2)) = P(C_1) - P(C_1 \cap C_2).$$

   Comme C_1 *et* C_2 *sont indépendants, on en déduit :*

   $$P(C_1 \cap C_2^c) = P(C_1) - P(C_1)P(C_2) = P(C_1)(1 - P(C_2)) = P(C_1)P(C_2^c).$$

   En appliquant cette propriété avec $C_1 = A_1$ *et* $C_2 = A_2$*, on montre donc que* A_1 *et* A_2^c *sont indépendants. En prenant maintenant* $C_1 = A_2^c$ *et* $C_2 = A_1$*, on montre alors que* A_1^c *et* A_2^c *sont indépendants. Enfin, En prenant* $C_1 = A_2$ *et* $C_2 = A_1$*, on montre que* A_1^c *et* A_2 *sont indépendants. On a ainsi montré que (3.3) est vraie, c'est-à-dire que les tribus* $\tau(\{A_1\})$ *et* $\tau(\{A_2\})$ *sont indépendantes.*

2. (Indépendance de n événements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient la propriété

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, n\}$$

si et seulement si les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \tau(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Corrigé – *Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on introduit la propriété $\mathcal{P}_p$ suivante :*

$$P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i) \textit{ si } B_i \in \tau(\{A_i\}) \textit{ pour } i \leq p \textit{ et}$$
$$B_i \in \{\emptyset, A_i, E\} \textit{ pour } i > p.$$

Il est facile de voir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est équivalente à

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i) \textit{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, n\}.$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ signifie que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

Le fait que $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_0$ est immédiat. On suppose maintenant que $\mathcal{P}_0$ est vérifiée et on va montrer que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Pour cela, on raisonne par récurrence sur p. On suppose donc que $\mathcal{P}_{p-1}$ est vérifiée pour un $p \in \{1, \ldots, n\}$ et on doit montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Pour montrer que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée, il suffit de prendre les B_i tels que $B_i \in \tau(\{A_i\})$ pour $i \leq p-1$, $B_p = A_p^c$ et $B_i \in \{\emptyset, A_i, E\}$ pour $i < p$ et de montrer que $P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ (car les autres choix de B_p sont directement donnés par $\mathcal{P}_{p-1}$). Or, on a, pour ce choix des B_i :

$$P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = P(\bigcap_{i=1}^n C_i) - P(\bigcap_{i=1}^n D_i),$$

avec $C_i = D_i = B_i$ si $i \neq p$, $C_p = E$ et $D_p = A_p$. En utilisant $\mathcal{P}_{p-1}$ on a $P(\bigcap_{i=1}^n C_i) = \prod_{i=1}^n P(C_i)$ et $P(\bigcap_{i=1}^n D_i) = \prod_{i=1}^n P(D_i)$ et donc :

$$P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = (\prod_{i \neq p} P(B_i))(P(E) - P(A_p))$$
$$= (\prod_{i \neq p} P(B_i))P(A_p^c) = \prod_{i=1}^n P(B_i).$$

On a ainsi montré que $\mathcal{P}_p$ est vérifiée. Par récurrence (finie) sur p, on montre donc que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, ce qui prouve que les tribus $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_n\})$ sont indépendantes.

3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n événements, notés $A_1, \ldots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les événements $A_1, \ldots, A_n$ soient indépendants.

Corrigé – *On prend, par exemple,* $E = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ *et* P *donnée par* $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, *pour* $i \in \{1,2,3,4\}$. *Puis, on choisit* $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ *et* $A_3 = \{2,3\}$. *Les trois événements* A_1, A_2, A_3 *sont bien indépendants deux à deux (car* $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) = \frac{1}{4}$ *si* $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$*) mais ne sont pas indépendants car* $0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

(a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0,1\}$.

Corrigé – *Comme* $A \in \mathcal{A}_1$, $A \in \mathcal{A}_2$ *et que* $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont deux tribus indépendantes, on doit avoir* $P(A \cap A) = P(A)P(A)$, *c'est-à-dire* $P(A)(1 - P(A)) = 0$ *et donc* $P(A) \in \{0,1\}$.

(b) Montrer que $P(A) \in \{0,1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Corrigé – *Si* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$, A *est indépendant avec lui même. On en déduit, comme à la question précédente que* $P(A) \in \{0,1\}$.

Réciproquement, on suppose maintenant que $P(A) \in \{0,1\}$ *et on distingue deux cas.*

Premier cas. *On suppose que* $P(A) = 0$. *On a alors pour tout* $B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$ *et donc (par monotonie de* P*)* $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$. *On en déduit* $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$, *ce qui prouve que* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$.

Deuxième cas. *On suppose que* $P(A) = 1$. *On a alors* $P(A^c) = 0$ *et, pour tout* $B \in \mathcal{A}$, $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cup B^c)$. *Or (par monotonie et σ–sous additivité de* P*)* $P(B^c) \leq P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c) = P(B^c)$. *Donc,* $P(A^c \cup B^c) = P(B^c)$ *et donc* $P(A \cap B) = 1 - P(B^c) = P(B) = P(A)P(B)$, *ce qui prouve que* A *est indépendant de tous les éléments de* $\mathcal{A}$.

5. Soit $n \geq 1$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants si et seulement si les v.a. $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ sont indépendantes.

Corrigé – *Si* X *est une v.a.r., la tribu engendrée par* X *est* $\tau(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. *Pour* $A \in \mathcal{A}$, *on a donc* $\tau(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$, *c'est-à-dire* $\tau(1_A) = \tau(\{A\})$. *L'indépendance des événements* $A_1, \ldots, A_n$ *correspond (par la définition 2.58) à l'indépendance des tribus* $\tau(\{A_1\}), \ldots, \tau(\{A_1\})$. *L'indépendance des v.a.r.* $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ *correspond (par la définition 3.29)) à l'indépendance des tribus* $\tau(1_{A_1}), \ldots, \tau(1_{A_n})$. *Comme* $\tau(\{A_i\}) = \tau(1_{A_i})$, *pour tout i, on en déduit que les événements* $A_1, \ldots, A_n$ *sont indépendants si et seulement si les v.a.* $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ *sont indépendantes.*

Exercice 3.20 (Indépendance deux par deux et dépendance globale)

Trouver un espace probabilisé et 3 v.a.r. indépendantes deux à deux mais globalement dépendantes.

Corrigé – *Un solution simple consiste à reprendre l'exemple donné à la question* 3 *de l'exercice 3.19. On prend* $E = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ *et* P *donnée par* $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, *pour* $i \in \{1,2,3,4\}$. *Puis on choisit* $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$ *et* $A_3 = \{2,3\}$ *et* $X_i = 1_{A_i}$ *pour* $i = 1,2,3$. *Les trois v.a.r.* X_1, X_2 *et* X_3 *sont bien indépendantes deux à deux (car les événements* A_1, A_2, A_3 *sont indépendants deux à deux) mais ne sont pas indépendantes (car les événements* A_1, A_2, A_3 *ne sont pas indépendants).*

Exercice 3.21 (Indépendance et indépendance 2 à 2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X_1, X_2, X_3 trois v.a.r. indépendantes. On suppose que chaque X_i a pour loi la loi discrète uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. Pour $i \neq j$, on pose $A_{i,j} = \{X_i = X_j\}$.

1. Pour $i \neq j$, calculer $P(A_{i,j})$.

Corrigé – *Soit* $i \neq j$. *On a, en utilisant l'indépendance de* X_i *avec* X_j, *puis le fait que* X_i *et* X_j *ont pour loi la loi discrète uniforme sur* $\{1,2,3,4,5,6\}$,

$$P(A_{i,j}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\} \cap \{X_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\}P(\{X_j = k\} = 6\frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. Montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$ sont indépendants 2 à 2 mais ne sont pas indépendants.

Corrigé – *Pour montrer l'indépendance* 2 *à* 2 *des trois événements* $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$, *on utilise l'indépendance des trois v.a.r.* X_1, X_2, X_3 *(et pour ce calcul l'indépendance* 2 *à* 2 *des trois v.a.r. suffit) :*

$$\begin{aligned}P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) = P(A_{1,2} \cap A_{2,3}) = P(A_{2,3} \cap A_{1,3}) &= P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\} \cap \{X_3 = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\})P(\{X_2 = k\})P(\{X_3 = k\}) = \frac{1}{6^2}.\end{aligned}$$

Avec la première question, on en déduit bien l'indépendance 2 *à* 2 *de* $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$.

(On a, par exemple, $P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) = P(A_{1,2})P(A_{1,3})$.*)*

Enfin, pour montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ *et* $A_{2,3}$ *ne sont pas indépendants, on remarque que*

$$P(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) = P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) = \frac{1}{6^2} \neq P(A_{1,2})P(A_{1,3})P(A_{2,3}) = \frac{1}{6^3}.$$

Exercice 3.22 (De loi uniforme à loi donnée) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Soit F la fonction de répartition de X (*i.e.*

$F(x) = P(X \le x)$ pour $x \in \mathbb{R}$). Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\},\ \text{si } u \in]0,1[,$$
$$G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0,1[.$$

On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in]0,1[$, montrer que $\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \ne \emptyset$, $\inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \in \mathbb{R}$ et

$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\} = [G(u), +\infty[.$$

Corrigé – *Grâce à la propriété de continuité croissante d'une mesure (proposition 2.27) on sait que* $F(x) \to 1$ *quand* $x \to +\infty$. *Il existe donc* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) \ge u$ *pour tout* $x \ge x_1$, *ce qui prouve que* $\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \ne \emptyset$ *(et* $G(u) \le x_1$*).*
Grâce à la propriété de continuité décroissante d'une mesure (proposition 2.27) on sait que $F(x) \to 0$ *quand* $x \to -\infty$. *Il existe donc* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $F(x) \le u$ *pour tout* $x \le x_2$, *ce qui prouve que* $\inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\} \in \mathbb{R}$ *(et* $G(u) \ge x_2$*).*
Comme F *est une fonction croissante, l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\}$ *est donc un intervalle dont les bornes sont* $G(u)$ *et* $+\infty$. *Enfin, la continuité décroissante de* F *donne la continuité à droite de* F *et donc le fait que* $G(u) \in \{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\}$, *ce qui donne bien*

$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\} = [G(u), +\infty[.$$

2. Montrer que Y est une v.a.r..

Corrigé – *La fonction* G *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *croissante sur* $]0,1[$ *et nulle sur le complémentaire de* $]0,1[$. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $G^{-1}([\alpha, +\infty[)$ *est donc un intervalle inclus dans* $]0,1[$ *auquel on ajoute* $]0,1[^c$ *si* $\alpha \le 0$. *On a donc*

$$G^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ceci prouve que G *est une fonction borélienne. Par composition de fonctions mesurable,* $G(U)$ *est donc mesurable de* E *muni de la tribu* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de la tribu borélienne. Ceci montre que* $G(U)$ *est une v.a.r.*

3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \le x) = P(U \le F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $u \in]0,1[$, *la question 1 montre que*

$$F(x) \ge u \iff x \ge G(u).$$

On a donc, pour $\omega \in E$,

$$U(\omega) \in]0,1[\text{ et } F(x) \ge U(\omega) \iff U(\omega) \in]0,1[\text{ et } x \ge G(U(\omega))$$

Comme U *a pour loi* $\mathcal{U}([0,1])$, *on a* $P(\{\omega \in E \text{ t.q. } U(\omega) \notin]0,1[\}) = 0$. *L'égalité précédente donne donc*

$$P(\{\omega \in E \text{ t.q. } F(x) \ge U(\omega)\}) = P(\{\omega \in E \text{ t.q. } x \ge G(U(\omega))\}).$$

c'est-à-dire $P(G(U) \le x) = P(U \le F(x))$. *Enfin, soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ *et* $F(x) \in [0,1]$ *on a* $P(U \le F(x)) = F(x)$. *On a donc* $P(G(U) \le x) = F(x) = P(X \le x)$. *Les v.a.r.* X *et* Y *ont même fonction de répartition et donc même loi.*

Exercice 3.23 (Limite croissante d'une suite de v.a.r.) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, Y une v.a.r., $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une application de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \uparrow X$, quand $n \to +\infty$, et que X_n et Y sont indépendantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une v.a.r. et que X et Y sont indépendantes. (*N.B.* La conclusion est encore vraie sans la croissance de la suite X_n.)

Corrigé – *La fait que* X *soit une v.a.r. découle des propriétés de stabilité des fonctions mesurables (voir la proposition 3.19).*

Rappel *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On rappelle que* $X^{-1}(A) = \{\omega \in E \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$. *Cet ensemble est souvent noté, de manière abrégée,* $\{X \in A\}$. *On rappelle aussi que (par définition) deux v.a.r.,* X *et* Y, *sont indépendantes si* $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$ *sont indépendantes, c'est-à-dire si*

$$P(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) = P(X^{-1}(A))P(Y^{-1}(B)) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La démonstration du fait que X *et* Y *sont indépendantes se fait alors deux étapes. Dans une première étape, on montre que* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si*

$$P(\{X \le a\} \cap \{Y \le b\}) = P(\{X \le a\})P(\{Y \le b\}) \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \tag{3.4}$$

Cette étape (un peu difficile à ce niveau du cours), très intéressante, est une conséquence de la proposition 2.31.

On conclut à l'indépendance de X *et* Y *dans la deuxième étape.*

Étape 1 *Il est clair que si* X *et* Y *sont indépendantes, on a bien (3.4). Ceci est dû au fait que* $]-\infty, c]$ *est un borélien de* $\mathbb{R}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.

On suppose maintenant que X *et* Y *sont deux v.a.r. satisfaisant (3.4) et on va montrer qu'elles sont indépendantes.*

On pose $\mathcal{C} = \{]-\infty, c], c \in \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty, +\infty[\}$. *On sait que* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Il est clair que* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et que* $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$. *La proposition 2.31 nous donne donc que deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *égales sur* $\mathcal{C}$ *sont égales sur tout* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On va utiliser deux fois cette proposition.*

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on pose*

$$m(A) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \le b\}),\ \mu(A) = P(\{X \in A\})P(\{Y \le b\}).$$

Il est facile de voir que m *et* μ *sont deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *égales sur* $\mathcal{C}$. *La proposition 2.31 donne alors* $m = \mu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *on a donc*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \le b\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \le b\})$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(R)$ *et tout* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *On fixe maintenant* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et on pose pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\tilde{m}(B) = P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}),\ \tilde{\mu}(B) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\}).$$

Il est facile aussi de voir que $\tilde{m}$ *et* $\tilde{\mu}$ *sont deux mesures finies sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *égales sur* $\mathcal{C}$. *La proposition 2.31 donne alors* $\tilde{m} = \tilde{\mu}$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *on a donc finalement*

$$P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\}) \text{ pour tout } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ce qui prouve que X *et* Y *sont indépendantes.*

Étape 2 *Soit* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *On veut montrer que* $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\})\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} \le b\})$. *Comme* X_n *et* Y *sont indépendantes, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{X}_n \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X}_n \le a\})\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} \le b\}). \tag{3.5}$$

La suite X_n *étant croissante, on a* $\{\mathrm{X}_{n+1} \le a\} \subset \{\mathrm{X}_n \le a\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme la suite* X_n *converge simplement et en croissant vers* X, *on a* $\{\mathrm{X} \le a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\mathrm{X}_n \le a\}$. *La continuité décroissante de* P *donne alors*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\{\mathrm{X}_n \le a\}).$$

De même, on a $(\{\mathrm{X}_{n+1} \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}) \subset (\{\mathrm{X}_n \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(\{\mathrm{X} \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\{\mathrm{X}_n \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\})$. *La continuité décroissante de* P *donne aussi*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(\{\mathrm{X}_n \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le b\}).$$

En passant à la limite dans (3.5), on obtient donc $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} < a\} \cap \{\mathrm{Y} < b\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X} < a\})\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} < b\})$. *Grâce à l'étape 1, on a donc bien montré l'indépendance de* X *et* Y.

Exercice 3.24 (Construction de v.a.i. de lois uniformes) Soit $(\mathrm{E}, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de v.a.r.i.i.d. avec $\mathrm{P}(\mathrm{U}_n = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_n = 1) = 1/2$. Montrer que V, définie par $\mathrm{V} = \sum_{n\ge1} \mathrm{U}_n 2^{-n}$ est une v.a. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
2. Soit $\mathrm{U}_{n,k}$, $n, k \ge 1$, des v.a.r.i.i.d. avec $\mathrm{P}(\mathrm{U}_{n,k} = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{U}_{n,k} = 1) = 1/2$. Montrer que les v. a. V_n, $n \ge 1$ définies par $\mathrm{V}_n = \sum_{k\ge1} \mathrm{U}_{n,k} 2^{-k}$ sont des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.25 (Loi du produit de la loi exponentielle par ±1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que la fonction de répartition de X est donnée, pour tout $a \in \mathbb{R}$, par $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\}) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ avec f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$. (comme f est continue, il s'agit ici de l'intégrale impropre d'une fonction continue.) Nous verrons au Chapitre 4 que ceci signifie que P_X est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que Y est t. q. $\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = 1\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = -1\}) = 1/2$. Donner la loi de XY.

Corrigé – *Compte tenu de la définition de* P_X *donnée ci dessus, on a* $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\}) = 0$ *pour* $a \le 0$ *et* $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\}) = 1 - e^{-a\lambda}$ *pour* $a > 0$.

On calcule maintenant la fonction de répartition de XY *(ce qui détermine la loi de* XY*). Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Comme* Y *ne prend presque sûrement que les valeurs* 1 *et* -1, *on a*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{XY} \le a\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = 1\} \cap \{\mathrm{X} \le a\}) + \mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = -1\} \cap \{\mathrm{X} \ge -a\}).$$

Comme X *et* Y *sont indépendantes et que* $\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = 1\}) = \mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = -1\}) = 1/2$, *on obtient*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{XY} \le a\}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \le a\}) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\{\mathrm{X} \ge -a\}).$$

On en déduit que pour $a \le 0$ *on a* $\mathrm{P}(\{\mathrm{XY} \le a\}) = \frac{1}{2}e^{a\lambda}$ *et pour* $a > 0$, *on a* $\mathrm{P}(\{\mathrm{XY} \le a\}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-a\lambda}$. *Ceci montre que la fonction de répartition de* XY *est donnée, pour tout* $a \in \mathbb{R}$,

par $P(\{XY \le a\}) = \int_{-\infty}^{a} g(t)dt$ *avec* g *définie par* $g(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$. *(c'est-à-dire que la loi de la v.a.r.* XY *a aussi une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, et cette densité est la fonction* g*.)*

Exercice 3.26 (Convergence en mesure) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que s'il existe f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f et g, alors $f = g$ p.p..

   [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\delta > 0$, $m(\{x \in E\,;\, |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$.]

   Corrigé – *Pour* $h : E \to \mathbb{R}$ *et* $\delta > 0$, *on note toujours* $\{h > \delta\} = \{x \in E;\ h(x) > \delta\}$, $\{h \ge \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \ge \delta\}$, $\{h < \delta\} = \{x \in E;\ h(x) < \delta\}$ *et* $\{h \le \delta\} = \{x \in E;\ h(x) \le \delta\}$.

   Soit $\delta > 0$. *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|$. *On en déduit* $\{|f - f_n| \le \frac{\delta}{2}\} \cap \{|f_n - g| \le \frac{\delta}{2}\} \subset \{|f - g| \le \delta\}$ *et donc, en passant au complémentaire,*

$$\{|f - g| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\}. \tag{3.6}$$

   Par sous additivité de m, on a donc $m(\{|f - g| > \delta\}) \le m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\})$. *En passant à la limite quand* $n \to +\infty$, *on en déduit* $m(\{|f - g| > \delta\}) = 0$.

   On remarque maintenant que $\{x \in E;\ f(x) \ne g(x)\} = \{|f - g| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$ *et donc, par σ-sous additivité de m, on obtient* $m(\{x \in E;\ f(x) \ne g(x)\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(\{|f - g| > \frac{1}{n}\}) = 0$ *et donc* $f = g$ *p.p..*

2. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $g \in \mathcal{M}$, alors $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f + g \in \mathcal{M}$.

   Corrigé – *Soit* $\delta > 0$. *En reprenant la démonstration de (3.6), on montre que*

$$\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\} \subset \{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\}.$$

   Par sous additivité de m, ceci donne $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \le m(\{|f - f_n| > \frac{\delta}{2}\}) + m(\{|g - g_n| > \frac{\delta}{2}\})$ *et donc que* $m(\{|f + g - (f_n + g_n)| > \delta\}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *On a bien montré que* $f_n + g_n \to f + g$ *en mesure quand* $n \to +\infty$.

3. On suppose maintenant que m est une mesure finie. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers g, alors $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f g \in \mathcal{M}$.

[On pourra commencer par montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ converge en mesure vers $f \in \mathcal{M}$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \geq n_0$ et $k \geq k_0$, on a $m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon$.] Donner un contre-exemple au résultat précédent lorsque $m(E) = +\infty$.

Corrigé – *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, la démonstration de (3.6) donne ici $\{|f_n| > k\} \subset \{|f| > \frac{k}{2}\} \cup \{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}$ et donc*

$$m(\{|f_n| > k\}) \leq m(\{|f| > \frac{k}{2}\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{k}{2}\}. \tag{3.7}$$

On pose $A_k = \{|f| > \frac{k}{2}\}$. On a $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$, $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ (car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme E est de mesure finie, on a $m(A_k) < \infty$ (pour tout k) et on peut appliquer la continuité décroissante de m. Elle donne :

$$m(A_k) \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{3.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (3.8), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m(A_{k_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par la convergence en mesure de f_n vers f, il existe alors n_0 tel que $m(\{|f_n - f| > \frac{k_0}{2}\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geq n_0$ et l'inégalité (3.7) donne $m(\{|f_n| > k_0\}) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. On en déduit (comme $\{|f_n| > k\} \subset \{|f_n| > k_0\}$ si $k \geq k_0$) :

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{|f_n| > k\}) \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

On montre maintenant que $f_n g_n \to fg$ en mesure.

Soit $\delta > 0$, on veut montrer que $m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour cela, on remarque que $|f_n g_n - fg| \leq |f_n||g_n - g| + |g||f_n - f|$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\{|f_n| \leq k\} \cap \{|g_n - g| \leq \frac{\delta}{2k}\} \cap \{|g| \leq k\} \cap \{|f_n - f| \leq \frac{\delta}{2k}\} \subset \{|f_n g_n - fg| \leq \delta\}$$

et, en passant au complémentaire,

$$\{|f_n g_n - fg| > \delta\} \subset \{|f_n| > k\} \cup \{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| > k\} \cup \{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq m(\{|f_n| > k\}) + m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \\ + m(\{|g| > k\}) + m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 et n_0 de manière à avoir (3.9). En utilisant (3.8) avec g au lieu de f, il existe aussi k_1 tel que $m(\{|g| > k\}) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_1$. On choisit alors $k = \max\{k_0, k_1\}$. En utilisant la convergence en mesure de f_n vers f et de g_n vers g, il existe n_1 tel que $m(\{|g_n - g| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ et $m(\{|f_n - f| > \frac{\delta}{2k}\}) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_1$. Finalement, avec $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on obtient :

$$n \geq n_2 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| > \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence en mesure de $f_n g_n$ vers fg, quand $n \to +\infty$.

Pour obtenir un contre-exemple à ce résultat si $m(E) = \infty$, *on prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *Pour* $n \geq 1$ *on définit* f_n *par* $f_n(x) = \frac{1}{n}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et on définit* g_n *par* $g_n(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Il est clair que* $f_n \to 0$ *en mesure,* $g_n \to g$ *en mesure, avec* $g(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *et* $f_n g_n \not\to 0$ *en mesure car* $m(\{|f_n g_n| > \delta\}) = \infty$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $\delta > 0$.

Exercice 3.27 (Convergence p.u. et convergence p.p.) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (c'est-à-dire une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{M}$. On suppose que $f_n \to f$ presque uniformément (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c). Montrer que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit* $A_n \in T$ *tel que* $m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A_n^c. *On pose* $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, *de sorte que* $A \in T$ *et* $m(A) = 0$ *car* $m(A) \leq m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in A^c$, *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x \in A_n^c$ *et on a donc* $f_n(x) \to f(x)$ *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $m(A) = 0$, *ceci donne bien* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$.

Exercice 3.28 (Théorème d'Egorov) Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., lorsque $n \to +\infty$.

Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$A_{n,j} = \{x\,;\, |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}\}, \text{ et } B_{n,j} = \bigcup_{p\geq n} A_{p,j}$$

1. Montrer que à j fixé, $\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,j}) = 0$.

Corrigé – *On remarque d'abord que* $A_{n,j} = (|f - f_n|)^{-1}([\frac{1}{j}, \infty[) \in T$ *car* $|f - f_n| \in \mathcal{M}$. *On a donc aussi* $B_{n,j} \in T$.

D'autre part, comme $f_n \to f$ *p.p., lorsque* $n \to +\infty$, *il existe* $C \in T$ *tel que* $m(C) = 0$ *et* $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $x \in C^c$.

On va montrer que $m(B_{n,j}) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *(on rappelle que* $j \in \mathbb{N}^*$ *est fixé), en utilisant la continuité décroissante de m. On remarque en effet que* $m(B_{n,j}) < \infty$ *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) car* $m(E) < \infty$ *(et c'est seulement ici que cette hypothèse est utile), puis que* $B_{n+1,j} \subset B_{n,j}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *La continuité de décroissante de m donne donc*

$$m(B_{n,j}) \to m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}).$$

Or, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,j}$, *on a* $x \in B_{n,j}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $p \geq n$ *tel que* $x \in A_{n,j}$, *c'est-à-dire* $|f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{j}$. *Comme j est fixé, ceci montre*

que $f_n(x) \not\to f(x)$ quand $n \to +\infty$, et donc que $x \in \mathrm{C}$. On en déduit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{n,j} \subset \mathrm{C}$ et donc que $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{n,j}) = 0$ et finalement que $m(\mathrm{B}_{n,j}) \to 0$, quand $n \to +\infty$.

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que $m(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c lorsque $n \to +\infty$. En déduire le théorème d'Egorov (théorème 3.39).
   [On cherchera A sous la forme : $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_{n_j,j}$, avec un choix judicieux de n_j.]

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la question précédente donne qu'il existe $n(j) \in \mathbb{N}$ tel que $m(\mathrm{B}_{n,j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$. On pose $\mathrm{B} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_{n(j),j}$, de sorte que $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et, par σ-sous additivité de m :*

$$m(\mathrm{B}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(\mathrm{B}_{n(j),j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

   On montre maintenant que $f_n \to f$ uniformément sur B^c (ce qui conclut la question en prenant $\mathrm{A} = \mathrm{B}$).

   Comme $\mathrm{B} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}(\bigcup_{p\geq n(j)} \mathrm{A}_{p,j})$, on a, en passant au complémentaire,

$$\mathrm{B}^c = \bigcap_{j\in\mathbb{N}^*}\Big(\bigcap_{p\geq n(j)} \mathrm{A}_{p,j}^c\Big).$$

   Soit $\eta > 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{j} \leq \eta$. Soit $x \in \mathrm{B}^c$, comme $x \in \bigcap_{p\geq n(j)} \mathrm{A}_{p,j}^c$, on a donc $x \in \mathrm{A}_{p,j}^c$ pour tout $p \geq n(j)$, c'est-à-dire :

$$p \geq n(j) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{j} \leq \eta.$$

   Comme $n(j)$ ne dépend que de j (et donc que de η) et pas de $x \in \mathrm{B}^c$, ceci prouve la convergence uniforme de f_n vers f sur B^c.

3. Montrer, par un contre–exemple, qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente.

   Corrigé – *On prend, par exemple, $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$ (plus précisément, λ est ici la restriction à $\mathcal{B}(]0,1[)$ de λ, qui est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$, de sorte que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$ (et même, $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in]0,1[$).

   Soit maintenant $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(]0,1[)$ tel que $\lambda(\mathrm{B}) = 0$. On va montrer que f_n ne peut pas tendre uniformément vers 0 sur B^c (ceci prouve bien qu'on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ dans la question précédente, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ dans le théorème d'Egorov).

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Il est clair que $\mathrm{B}^c \cap]0, \frac{1}{n}[\neq \emptyset$. En effet, sinon on a $]0, \frac{1}{n}[\subset \mathrm{B}$ et donc $\frac{1}{n} = \lambda(]0, \frac{1}{n}[) \leq \lambda(\mathrm{B}) = 0$. Il existe donc $x \in \mathrm{B}^c$ tel que $f_n(x) = 1$. On a donc

$$\sup_{x\in\mathrm{B}^c} |f_n(x)| = 1,$$

   ce qui prouve bien que f_n ne tend pas uniformément vers 0 sur B^c, quand $n \to +\infty$.

4. Montrer, par un contre–exemple, que le résultat du théorème d'Egorov est faux lorsque $m(\mathrm{E}) = +\infty$.

> **Corrigé** – *On prend, par exemple,* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\lambda)$.
>
> *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on prend* $f_n = 1_{]n,n+1[}$, *de sorte que* $f_n \to 0$ *p.p., quand* $n \to +\infty$ *(et même,* $f_n(x) \to 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*).*
>
> *Soit maintenant* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tel que* $\lambda(\mathrm{B}) \leq \varepsilon$. *On va montrer que* f_n *ne peut pas tendre uniformément vers* 0 *sur* B^c *(ceci prouve bien que le théorème d'Egorov peut être mis en défaut si* $m(\mathrm{E}) = \infty$*).*
>
> *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *Il est clair que* $\mathrm{B}^c \cap]n, n+1[\neq \emptyset$ *(car sinon,* $]n, n+1[\subset \mathrm{B}$ *et donc* $1 = \lambda(]n, n+1[) \leq \lambda(\mathrm{B}) \leq \varepsilon$, *en contradiction avec* $\varepsilon < 1$*). Il existe donc* $x \in \mathrm{B}^c$ *tel que* $f_n(x) = 1$. *On a donc*
>
> $$\sup_{x \in \mathrm{B}^c} |f_n(x)| = 1,$$
>
> *ce qui prouve bien que* f_n *ne tend pas uniformément vers* 0 *sur* B^c, *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 3.29 (Convergence en mesure et convergence p.p.) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On rappelle que, par définition, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

1. On suppose dans cette question que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f presque partout, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f en mesure [Utiliser le théorème d'Egorov.]

> **Corrigé** – *Soit* $\varepsilon > 0$, *on veut montrer que* $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = m(\{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire que*
>
> $$\begin{aligned} &\forall \delta > 0, \exists n_0, \text{ t.q.} \\ &n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \delta. \end{aligned} \tag{3.11}$$
>
> *Soit donc* $\delta > 0$. *D'après le théorème d'Egorov (théorème 3.39 page 132), il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{A}) \leq \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c. *La convergence uniforme sur* A^c *nous donne donc l'existence de* n_0 *tel que,* $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$, *si* $n \geq n_0$. *On a donc, pour* $n \geq n_0$, $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subset \mathrm{A}$, *et donc* $m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq m(\mathrm{A}) \leq \delta$. *On a bien montré (3.11) et donc la convergence en mesure de* f_n *vers* f, *quand* $n \to +\infty$.

(b) Montrer par un contre–exemple que la réciproque de la question précédente est fausse.

Corrigé – *L'exemple donné ici sera repris au début de la section 4.7 pour montrer que la convergence dans* L^1 *n'entraîne pas la convergence presque partout.*

On prend $(E,T,m) = ([0,1[,\mathcal{B}([0,1[),\lambda)$ *(on a bien* $m(E) < \infty$*) et on construit ainsi la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

Soit $n \in \mathbb{N}$*. Il existe un unique* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\frac{(p-1)p}{2} \le n < \frac{p(p+1)}{2}$*. On pose alors* $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$ *et on prend* $f_n = 1_{[\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}[}$*. Il faut noter ici que* $k+1 \le \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p-1)p}{2} = p$ *et donc* $\frac{k+1}{p} \le 1$.

Lorsque $n \to +\infty$*, on a* $p \to \infty$ *et donc* $m(\{|f_n| > 0\}) = \frac{1}{p} \to 0$*, ce qui prouve, en particulier, que* $f_n \to 0$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$.

Enfin, on remarque que, pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$*. En effet, soit* $x \in [0,1[$*. Soit* $p \in \mathbb{N}^*$*. Il existe alors (un unique)* $k \in \{0,\ldots,p-1\}$ *tel que* $x \in [\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}[$*, de sorte que* $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ *en choisissant* $\varphi(p) = \frac{(p-1)p}{2} + k$*. On a ainsi construit* $(f_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}^*}$*, sous-suite de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(car* φ *est strictement croissante de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{N}$*), t.q.* $f_{\varphi(p)}(x) \not\to 0$ *quand* $p \to +\infty$ *(puisque* $f_{\varphi(p)}(x) = 1$ *pour tout* p*). Ceci montre bien que* $f_n(x) \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

On ne suppose plus que $m(E) < +\infty$ mais on suppose maintenant (pour la suite de l'exercice) que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbb{N}; p,q \ge n \Rightarrow m(\{x \in E; |f_p(x) - f_q(x)| > \varepsilon\}) \le \delta.$$

Corrigé –
Notation : Pour g *fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$*, on note toujours* $\{g > a\}$ *l'ensemble* $\{x \in E;\ g(x) > a\}$.

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $\delta > 0$*. Soit* $p,q \in \mathbb{N}$*. On commence par remarquer que* $|f_p(x) - f_q(x)| \le |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)|$*. On en déduit que*

$$\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\} \subset \{|f_p - f| > \varepsilon\} \cup \{|f_q - f| > \varepsilon\}.$$

On a donc

$$m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \le m(\{|f_p - f| > \varepsilon\}) + m(\{|f_q - f| > \varepsilon\}).$$

Comme $f_n \to f$ *en mesure, il existe* n_0 *tel que*

$$n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \delta.$$

On a donc

$$p,q \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2\varepsilon\}) \le 2\delta.$$

Ceci montre bien que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy en mesure.*

3. Montrer qu'il existe une fonction mesurable g et une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in T$ tel que $m(A) \leq \varepsilon$ et tel que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur A^c.

[On pourra construire φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de T t.q. $m(A_n) \leq 2^{-n}$ avec $A_n = \{x \in E; |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| > 2^{-n}\}$ pour tout n. Puis, chercher A sous la forme $\bigcup_{k\geq p} A_k$, où p est convenablement choisi.]

Corrigé – *D'après la question précédente, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en mesure. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc (en prenant $\varepsilon = \delta = 2^{-n}$ dans la définition donnée à la question précédente) $\psi(n) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$p, q \geq \psi(n) \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| > 2^{-n}\}) \leq 2^{-n}.$$

Pour obtenir, à partir de ψ, une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ on choisit alors $\varphi(0) = \psi(0)$ et $\varphi(n) = \max\{\psi(n), \varphi(n-1)+1\}$ pour $n \geq 1$. On obtient bien une fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et, comme $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq \psi(n)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(A_n) \leq 2^{-n} \text{ avec } A_n = \{|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| > 2^{-n}\}.$$

Pour construire la fonction g, on pose maintenant $B_p = \cup_{k\geq p} A_k$ et $B = \cap_{p\in\mathbb{N}} B_p$. On va montrer que pour tout $x \in B^c$ la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ (et $g(x)$ sera alors défini comme étant la limite de cette suite).

Soit $x \in B^c$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_p^c$. Ceci donne $x \in A_k^c$ pour tout $k \geq p$, c'est-à-dire

$$k \geq p \Rightarrow |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq 2^{-k}. \tag{3.12}$$

On en déduit que la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge dans $\mathbb{R}$ et donc que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, pour passer de la série à la suite, il suffit de remarquer que

$$f_{\varphi(n)}(x) = f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)). \tag{3.13}$$

On a donc montré que pour tout $x \in B^c$ la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et on pose alors

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x) \text{ si } x \in B^c.$$

La fonction g est ainsi définie sur B^c. Pour qu'elle soit définie partout, on pose $g(x) = 0$ sur B. La fonction g est bien mesurable car est la limite simple des fonctions $f_{\varphi(n)} 1_{B^c}$ qui sont toutes mesurables (noter, en particulier, que $B \in T$ car les A_n sont tous dans T).

Soit $p \in \mathbb{N}$. On remarque maintenant que sur B_p^c la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)$ converge uniformément (grâce à (3.12)). La suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc aussi uniformément sur B_p^c (grâce à (3.13)). Or, par σ-sous additivité de m, on a

$$m(B_p) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=p}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-p+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *En prenant* $A = B_p$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $2^{-p+1} \leq \varepsilon$ *on a donc* $m(A) \leq \varepsilon$ *et* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément (vers g) sur* A^c.

Enfin, on peut aussi remarquer que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge p.p. vers g car* $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $g(x)$ *pour tout* $x \in B^c$ *et la continuité décroissante de m donne* $m(B) = \lim_{p\to+\infty} m(B_p) = 0$.

4. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque partout. [On pourra commencer par montrer que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente converge presque partout et en mesure.]

Corrigé – *On reprend les notations et résultats du corrigé de la question précédente. On sait déjà que la suite* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge p.p. vers g. On montre maintenant qu'elle converge en mesure vers g.*

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $\delta > 0$. *Il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $m(B_p) \leq \delta$. *Comme* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* B_p^c *vers g, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|f_{\varphi(n)}(x) - g(x)| < \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$ *et tout* $x \in B_p^c$. *On a donc*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \subset B_p \Rightarrow m(\{|f_{\varphi(n)} - g| \geq \varepsilon\} \leq m(B_p) \leq \delta.$$

Ceci montre bien que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers g.*

Comme on a déjà, par hypothèse, que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure vers* f, *on a donc* $f = g$ *p.p. (voir la première question de l'exercice 3.26). Finalement, on obtient donc la convergence p.p. de la suite* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* f.

Exercice 3.30 (Convergence en mesure et produit)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lorsque $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu borélienne) et u une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $u_n \to u$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que u_n^2 (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et u^2 sont des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *On peut, par exemple, remarquer que les fonctions* u_n^2 *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) et* u^2 *sont des produits de fonctions boréliennes. Elles sont donc boréliennes (voir la proposition 3.19).*

2. On suppose, dans cette question, que u est bornée. Il existe donc $C > 0$ telle que $|u(x)| \leq C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\{|u_n - u] < \delta\} \subset \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2C + \delta)$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ (ne dépendant que de C et ε) tel que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \geq \delta\}$.

Corrigé – *Soit* $\delta > 0$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|u_n(x) - u(x)| < \delta$, *on a alors* $|u_n(x)| \leq |u_n(x) - u(x)| + |u(x)| \leq C + \delta$ *et donc*

$$|u_n^2(x) - u^2(x)| = |u_n(x) - u(x)||u_n(x) + u(x)| \leq |u_n(x) - u(x)||u_n(x)| + |u(x)|$$
$$\leq |u_n(x) - u(x)|(2C + \delta) < \delta(2C + \delta).$$

Ce qui donne bien $\{|u_n - u| < \delta\} \subset \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2C + \delta)$.
En choisissant $\delta > 0$ *tel que* $\delta(2C + \delta) \leq \varepsilon$ *(ce qui est possible car* $\lim_{\delta \to 0} \delta(2C + \delta) = 0$*), on en déduit*

$$\{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\} \subset \{|u_n^2 - u^2| \geq \delta(2C + \delta)\} \subset \{|u_n - u| \geq \delta\}.$$

(b) Montrer que $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *On choisit* $\delta > 0$ *tel que* $\{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \geq \delta\}$ *(pour tout* n*). On a donc* $\lambda(\{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\}) \leq \lambda(\{|u_n - u| \geq \delta\})$. *Comme* $u_n \to u$ *en mesure, on a* $\lim_{n \to +\infty} \lambda(\{|u_n - u| \geq \delta\}) = 0$ *et donc* $\lim_{n \to +\infty} \lambda(\{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\}) = 0$. *Ce qui prouve que* $u_n^2 \to u^2$ *en mesure.*

3. Dans cette question, on ne suppose plus que u est bornée mais on suppose qu'il existe une partie compacte, notée K, de $\mathbb{R}$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in K^c$ (une telle fonction est dite “à support compact”).

(a) Donner un exemple d'une fonction u non bornée et à support compact.
[On pourra, par exemple, prendre $K = [0, 1]$.]

Corrigé – *On peut, par exemple, choisir* u *définie par* $u(x) = 1/x$ *si* $x \in]0, 1[$ *et* $u(x) = 0$ *si* $x \notin]0, 1[$. *La fonction* u *est non bornée et nulle hors de* $[0, 1]$ *(qui est bien une partie compacte de* $\mathbb{R}$*).*

(b) Montrer que $\lambda(K) < +\infty$.

Corrigé – *La partie* K *est compacte, elle est donc bornée. On choisit alors* $a > 0$ *tel que* $K \subset [-a, a]$. *On en déduit* $\lambda(K) \leq 2a < +\infty$.

(c) Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \lambda(\{|u| > p\}) = 0$.

Corrigé – *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on pose* $C_p = \{|u| > p\}$. *On a, pour tout* p, $C_{p+1} \subset C_p$ *et* $\lambda(C_p) \leq \lambda(K) < +\infty$ *(car* $C_p \subset K$*) et* $\cap_{p \in \mathbb{N}} C_p = \emptyset$. *La continuité croissante de* λ *donne alors que*

$$\lim_{p \to +\infty} \lambda(C_p) = \lambda(\cap_{p \in \mathbb{N}} C_p) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

(d) Montrer que $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$.
[On pourra commencer par remarquer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, il existe δ, ne dépendant que p et ε, tel que (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\{|u| \leq p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \geq \varepsilon\} \subset \{|u_n - u| \geq \delta\}$.]

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Le raisonnement fait à la question 2(a) montre que pour tout* $\delta > 0$ *on a*

$$(\{u \le p\} \cap \{|u_n - u| < \delta\}) \subset (\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| < \delta(2p+\delta)\}),$$

et donc qu'il existe $\delta > 0$ *(ne dépendant que de* p *et* ε*) tel que (pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*

$$(\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset (\{u \le p\} \cap \{|u_n - u| \ge \delta\}).$$

On en déduit en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\{|u| \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset \{|u_n - u| \ge \delta\}. \tag{3.14}$$

On va maintenant montrer que $\lim_{n\to+\infty}\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} = 0$.
Soit $\eta > 0$. *On choisit d'abord* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\lambda(\{|u| > p\}) \le \eta$ *et on choisit* $\delta > 0$ *(ne dépendant que de* p *et* ε *et donc que* η *et* ε*) tel que* (3.14) *soit vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\} \subset \{|u| > p\} \cup (\{u \le p\} \cap \{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \subset \{|u| > p\} \cup \{|u_n - u| \ge \delta\}$$

et donc

$$\lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \le \lambda(\{|u| > p\}) + \lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}) \le \eta + \lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}).$$

Comme $u_n \to u$ *en mesure, il existe* n_0 *tel que* $\lambda(\{|u_n - u| \ge \delta\}) \le \eta$ *pour* $n \ge n_0$ *et donc*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \lambda(\{|u_n^2 - u^2| \ge \varepsilon\}) \le 2\eta.$$

Ce qui prouve que $u^2 \to u^2$ *en mesure.*

(e) On remplace maintenant l'hypothèse $u(x) = 0$ pour tout $x \in K^c$ par "Il existe $M > 0$ telle que $|u(x)| \le M$ pour tout $x \in K^c$". A t-on toujours $u_n^2 \to u^2$ en mesure quand $n \to +\infty$?

Corrigé – *Oui, on a toujours* $u_n^2 \to u^2$ *en mesure quand* $n \to +\infty$. *Le raisonnement des questions 3(c) et 3(d) est toujours juste en remarquant, pour la question 3(c), que* $\lambda(C_p) < +\infty$ *si* $p > M$.

4. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement u_n et u), qu'on peut avoir $u_n^2 \not\to u^2$ en mesure.
[On pourra, par exemple, choisir pour u la fonction $u(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Corrigé – *On prend* $u(x) = x$ *et* $u_n(x) = x + 1/n$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a bien* $u_n \to u$ *en mesure. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $u_n^2(x) - u^2(x) = 2x/n + 1/n^2$. *On en déduit que*

$$\lambda(\{u_n^2(x)) - u^2(x)) \ge \varepsilon\}) = +\infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui montre que $u_n^2 \not\to u^2$ *en mesure.*

Exercice 3.31 (Convergence en mesure et fonctions continues) Cet exercice généralise l'exercice 3.30. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X_n \to X$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Comme φ est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que*
   $$|x-y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$
   On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \eta\}$ et
   $$m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq m(\{|X_n - X| > \eta\}).$$
   Comme $X_n \to X$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \eta\}) = 0$, on a donc aussi
   $$\lim_{n\to+\infty} m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) = 0.$$
   Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

2. On suppose, dans cette question, que m est finie (par exemple, la mesure m peut être une probabilité, on a alors $m(\Omega) = 1$, les fonctions mesurables sont des v.a.r. et la convergence en mesure est la convergence en probabilité). Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$.]

   Corrigé – *Le fait que $\lim_{a\to+\infty} m(\{|X| \geq a\}) = 0$ est une conséquence de la continuité décroissante d'une mesure (on utilise ici que m est finie).*

   Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$. Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $m(\{|X| \geq a\}) \leq \delta$. Comme φ est uniformément continue sur $[-a-1, a+1]$, il existe $\eta > 0$ tel que
   $$x, y \in [-a-1, a+1], |x-y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$
   En posant $\bar{\eta} = \min\{\eta, 1\} > 0$, on a aussi
   $$x \in [-a, a], |x-y| \leq \bar{\eta} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$
   On a donc $\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \bar{\eta}\} \cup \{|X| \geq a\}$ et
   $$\begin{aligned} m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) &\leq m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) + m(\{|X| \geq a\}) \\ &\leq m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) + \delta. \end{aligned}$$
   Comme $X_n \to X$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) = 0$, il existe donc n_0 tel que
   $$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|X_n - X| > \bar{\eta}\}) \leq \delta.$$
   on a donc
   $$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|\varphi(X_n) - \varphi(X)| > \varepsilon\}) \leq 2\delta.$$
   Ce qui prouve que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

3. On prend ici $(\Omega, \mathcal{A}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement X_n et X), qu'on peut avoir $X_n \to X$ en mesure (quand $n \to +\infty$) et $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ en mesure pour certaines fonctions φ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *On prend* $X(x) = x$ *et* $X_n(x) = x + 1/n$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a bien* $X_n \to X$ *en mesure. On choisit* φ *définie par* $\varphi(x) = x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a donc, pour* $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) = 2x/n + 1/n^2$. *On en déduit que*

$$\lambda(\{\varphi(X_n(x)) - \varphi(X(x)) \geq \varepsilon\}) = +\infty \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ce qui montre que $\varphi(X_n) \not\to \varphi(X)$ *en mesure.*

Exercice 3.32 (Suite bornée et convergence en mesure) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

On suppose aussi qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq M$ p.p.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\{|f| \geq M + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > M\}$. En déduire que $|f| < M + \varepsilon$ p.p..

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $x \in E$, *on a* $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$. *On a donc*

$$\{|f_n - f| < \varepsilon\} \cap \{|f_n| \leq M\} \subset \{|f| < M + \varepsilon\}.$$

En passant au complémentaire, on en déduit

$$\{|f| \geq M + \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{|f_n| > M\}.$$

Par monotonie de m, on en déduit

$$m(\{|f| \geq M + \varepsilon\} \leq m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) + m(\{|f_n| > M\}). \tag{3.15}$$

Comme $|f_n| \leq M$ *p.p., on a* $m(\{|f_n| > M\}) = 0$. *En faisant maintenant* $n \to +\infty$ *dans* (3.15), *la convergence en mesure de* f_n *vers* f *nous donne que* $m(\{|f| \geq M + \varepsilon\} = 0$, *et donc* $|f| < M + \varepsilon$ *p.p..*

2. Montrer que $|f| \leq M$ p.p..

Corrigé – *Il suffit de remarquer que*

$$\{|f| > M\} = \cup_{p\in\mathbb{N}^*}\{|f| \geq M + \frac{1}{p}\}.$$

La σ*-sous-additivité de m donne alors* $m(\{|f| > M\}) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}^*} m(\{|f| \geq M + 1/p\})$. *La question précédente donne* $m(\{|f| \geq M + 1/p\}) = 0$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$. *On en déduit que* $m(\{|f| > M\}) = 0$, *ce qui donne bien* $|f| \leq M$ *p.p..*

Exercice 3.33 (Mesurabilité d'une limite p.p.) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(E, T)$ et $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ p.p..

1. Montrer que $f \in \mathcal{M}(E, \overline{T})$, où $(E, \overline{T}, \overline{m})$ est le complété de (E, T, m) (voir le théorème 2.28).
2. En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f \notin \mathcal{M}(E, T)$.

Exercice 3.34 (Convergence essentiellement uniforme et presque uniforme) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $f \in \mathcal{M}$, on pose $A_f = \{C \in \mathbb{R}, |f| \le C \text{ p.p.}\}$. Si $A_f \neq \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \inf A_f$. Si $A_f = \emptyset$, on pose $\|f\|_\infty = \infty$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}$ t.q. $A_f \neq \emptyset$. Montrer que $\|f\|_\infty \in A_f$.

Corrigé – *Comme* $A_f \neq \emptyset$ *et* $\|f\|_\infty = \inf A_f$, *il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_f$ *t.q.* $a_n \downarrow \|f\|_\infty$ *quand* $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *de* $a_n \in A_f$ *on déduit qu'il existe* $B_n \in T$ *tel que* $m(B_n) = 0$ *et* $|f(x)| \le a_n$ *pour tout* $x \in B_n^c$.

On pose $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. *On a donc* $B \in T$ *et, par σ-additivité de m,* $m(B) = 0$ *(car* $m(B) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n)$*). Enfin, pour tout* $x \in B^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^c$, *on a* $|f(x)| \le a_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En faisant* $n \to +\infty$, *on en déduit que* $|f(x)| \le \|f\|_\infty$. *On a donc* $|f| \le \|f\|_\infty$ *p.p., c'est-à-dire* $\|f\|_\infty \in A_f$.

2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{M}$.

(a) On suppose, dans cette question, que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on dit que $f_n \to f$ essentiellement uniformément). Montrer que $f_n \to f$ presque uniformément.

Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $A_n \in T$ *tel que* $m(A_n) = 0$ *et* $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ *pour tout* $x \in A_n^c$. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *On a donc* $A \in T$, $m(A) = 0$, $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ *pour tout* $x \in A^c$. *Comme* $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *on en déduit que* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c. *Enfin, comme* $m(A) \le \varepsilon$ *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a bien montré la convergence presque uniforme de* f_n *vers* f.

(b) En donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement (E, T, m), $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f), montrer qu'on peut avoir $f_n \to f$ presque uniformément, quand $n \to +\infty$, et $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

Corrigé – *On prend, par exemple,* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $f = 0$ *et* $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon > 0$. *On choisit* $A = [0, \varepsilon]$, *de sorte que* $m(A) = \varepsilon$. *On a bien* $f_n \to 0$ *uniformément sur* A^c, *quand* $n \to +\infty$, *car* $f_n = 0$ *sur* A^c *pour tout n tel que* $\frac{1}{n} < \varepsilon$. *Donc,* $f_n \to f$ *presque uniformément quand* $n \to +\infty$.

Mais f_n *ne tend pas vers* 0 *essentiellement uniformément, quand* $n \to +\infty$, *car* $\|f_n\|_\infty = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *(en effet,* $f_n \le 1$ *sur tout* $\mathbb{R}$, $f_n = 1$ *sur* $[0, \frac{1}{n}]$*) et* $\lambda([0, \frac{1}{n}]) > 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*).*

Exercice 3.35 (Mesurabilité des troncatures) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est muni, comme toujours quand on ne le précise pas, de la tribu borélienne). Pour $a > 0$, on définit la fonction tronquée suivante :

$$f_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } f(x) > a \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \le a \\ -a & \text{si } f(x) < -a \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Corrigé – *Soit $a > 0$. On définit T_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\mathrm{T}_a(s) = \begin{cases} a & \text{si} \quad s > a \\ s & \text{si} \quad |s| \le a \\ -a & \text{si} \quad s < -a \end{cases}$$

La fonction T_a peut aussi s'écrire $\mathrm{T}_a(s) = \max\{-a, \min\{a, s\}\}$ pour $s \in \mathbb{R}$. On remarque que la fonction T_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne).

Comme $f_a = \mathrm{T}_a \circ f$, on en déduit que f_a est mesurable car c'est la composée d'applications mesurables.

Exercice 3.36 (Mesurabilité de l'ensemble des points de convergence) Soit (E, T) un espace mesurable. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (on munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme toujours). On note A l'ensemble des points $x \in \mathrm{E}$ tels que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas de Cauchy. Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathrm{E}$. On a $x \in \mathrm{A}$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe i, j avec $j > i \ge n$ tels que $|f_j(x) - f_i(x)| > (1/p)$. Ceci montre que*

$$\mathrm{A} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^\star} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=n}^{+\infty} \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} |f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[).$$

Comme $|f_j - f_i|^{-1}(]\frac{1}{p}, +\infty[) \in \mathrm{T}$ (car les f_k sont mesurables), les propriétés de stabilité de T par union et intersection dénombrable donnent que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

Exercice 3.37 (Tribu et partition) Soit Ω un ensemble. On appelle partition de Ω une famille finie ou dénombrable de parties non vides de Ω et disjointes deux à deux et dont l'union est égale à Ω. Les éléments d'une partition sont appelés atomes.

1. Soit $a = \{\mathrm{A}_i \,;\, i \in \mathrm{I}\}$ une partition de Ω et soit $\mathcal{T}(a)$ la tribu engendrée par a. Montrer que
$$\mathcal{T}(a) = \{\bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j \text{ } où \text{ } \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\}.$$

   En déduire qu'une v.a. réelle est $\mathcal{T}(a)$-mesurable si et seulement si elle est constante sur tous les atomes de a.

   Une partition a est dite plus fine qu'une partition b si tous les atomes de b s'écrivent comme union d'atomes de a.

2. Montrer que si a est plus fine que b et si b est plus fine que a alors a et b sont égales.
3. Montrer que si a et b sont deux partitions telles que $\mathcal{T}(a) = \mathcal{T}(b)$ alors a et b sont égales.

Exercice 3.38 (Exemple de tribu engendrée) Dans cet exercice, on s'intéresse à la tribu $\tau(X)$ engendrée par la variable aléatoire X définie sur Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne.

1. (Cas d'un lancer de dé) Dans cette question, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et X est la variable aléatoire définie par $X(\omega) = 1$ lorsque ω est pair, $X(\omega) = 0$ sinon. Montrer que $\tau(X)$ est formé de 4 éléments.

   Corrigé – *Par la définition de la tribu engendrée (Définition 3.14) on a* $\tau(X) = \{X^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega$ *t.q.* $X(\omega) \in A\}$, $X^{-1}(A)$ *ne peut prendre que 4 valeurs, selon que* 0 *et* 1 *appartiennent ou non à A. Plus précisément, on distingue* 4 *cas possibles :*

   Cas 1 : $1, 0 \in A$ *(c'est le cas, par exemple, si* $A = \{0, 1\}$*). On a alors* $X^{-1}(A) = \Omega$.
   Cas 2 : $1 \in A$ *et* $0 \notin A$ *(c'est le cas, par exemple, si* $A = \{1\}$*). On a alors* $X^{-1}(A) = \{2, 4, 6\}$.
   Cas 3 : $0 \in A$ *et* $1 \notin A$ *(c'est le cas, par exemple, si* $A = \{0\}$*). On a alors* $X^{-1}(A) = \{1, 3, 5\}$.
   Cas 4 : $1 \notin A$ *et* $0 \notin A$ *(c'est le cas, par exemple, si* $A = \emptyset$*). On a alors* $X^{-1}(A) = \emptyset$.

   On a ainsi montré que $\tau(X) = \{\Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \emptyset\}$.

2. (Cas de n tirages à pile ou face) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La variable aléatoire X représente le k–ième tirage, X est donc l'application $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \mapsto \omega_k$. Montrer que $\tau(X)$ est ici aussi formé de 4 éléments.

   Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme à la question précédente* $X^{-1}(A)$ *dépend du fait que* 0 *et* 1 *appartiennent ou non à* A. *On pose* $B = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \Omega$ *tel que* $\omega_k = 1\}$. *On a ainsi :*

$$X^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega \textit{ si } 0, 1 \in A \textit{ (c'est le cas, par exemple, si } A = \{0, 1\}), \\ B \textit{ si } 1 \in A \textit{ et } 0 \notin A \textit{ (c'est le cas, par exemple, si } A = \{1\}), \\ B^c \textit{ si } 0 \in A \textit{ et } 1 \notin A \textit{ (c'est le cas, par exemple, si } A = \{0\}), \\ \emptyset \textit{ si } 1 \notin A \textit{ et } 0 \notin A \textit{ (c'est le cas, par exemple, si } A = \{2\}). \end{cases}$$

   On a donc ici $\tau(X) = \{\Omega, B, B^c, \emptyset\}$.

3. Dans cette question, on prend $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \omega - [\omega]$, où $[\omega]$ désigne la partie entière de ω (c'est-à-dire $[\omega] = \max\{n \in \mathbb{Z}$, t.q. $n \le \omega\}$. Si C est un borélien inclus dans $[0, 1[$ (ce qui est équivalent à dire $C \in \mathcal{B}([0, 1[)$), on pose $\varphi(C) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} C_k$, avec $C_k = \{x + k,\ x \in C\}$. Montrer que $\tau(X) = \{\varphi(C),\ C \in \mathcal{B}([0, 1[)\}$.

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *La v.a.* X *prend ses valeurs dans* $[0,1[$. *On a donc* $X^{-1}(A) = X^{-1}(C)$ *avec* $C = A \cap [0,1[$. *Comme* $B([0,1[) = \{A \cap [0,1[, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ *(ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 2.3) on a donc :*

$$\tau(X) = \{X^{-1}(C), C \in \mathcal{B}([0,1[)\}.$$

Pour terminer la démonstration, Il suffit donc de démontrer que $X^{-1}(C) = \varphi(C)$ *si* $C \in \mathcal{B}([0,1[)$.

Soit $C \in \mathcal{B}([0,1[)$. *Pour* $\omega \in \Omega$ *on a* $X(\omega) \in C$ *si et seulement* $\omega - [\omega] \in C$, *c'est-à-dire si et seulement si* $\omega = n + z$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $z \in C$ *(on utilise ici le fait que* $C \subset [0,1[$*). Ceci montre bien que* $X(\omega) \in C$ *si et seulement* $\omega \in \varphi(C)$. *On a donc* $X^{-1}(C) = \varphi(C)$, *ce qui termine la démonstration.*

Exercice 3.39 (Fonctions constantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire (réelle). Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(a) = P(X^{-1}(]-\infty, a]))$ (on note souvent $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{X \leq a\}$). La fonction φ est donc la fonction de répartition de la probabilité P_X.

1. Montrer que φ est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$, $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$.

Corrigé – *Ces propriétés ont été vues au paragraphe 2.6.3, théorème 2.61, en utilisant les propriétés de monotonie et de continuité croissante et décroissante d'une mesure (proposition 2.27).*

On suppose maintenant que, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $P(X^{-1}(B)) = 0$ ou 1.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha$ p.s..

Corrigé – *On pose* $A = \{a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\varphi(a) \leq \frac{1}{2}\}$. *L'ensemble* A *est non vide, car* $\lim_{a\to-\infty} \varphi(a) = 0$. *Il est majoré car* $\lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 1$. *L'ensemble* A *admet donc une borne supérieure que nous notons* α. *Comme* φ *est croissante, on a*

$$\varphi(a) \leq \frac{1}{2} \text{ si } a < \alpha \text{ et } \varphi(a) > \frac{1}{2} \text{ si } a > \alpha.$$

On utilise maintenant le fait que $P(X^{-1}(B)) = 0$ *ou* 1 *pour tout* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on en déduit que* $\varphi(a) = 0$ *ou* 1 *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et donc que* $\varphi(a) = 0$ *si* $a < \alpha$ *et* $\varphi(a) = 1$ *si* $a > \alpha$. *Par continuité décroissante de* P, *on montre alors que* $\varphi(\alpha) = P(\{X \leq \alpha\}) = 1$ *(car* $\{X \leq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\{X \leq \alpha + 1/n\}$*) et, par continuité croissante de* P, *on montre que* $P(\{X < \alpha\}) = 0$ *(car* $\{X < \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{X \leq \alpha - 1/n\}$*). On a donc*

$$P(\{X = \alpha\}) = P(\{X \leq \alpha\}) - P(\{X < \alpha\}) = 1,$$

c'est-à-dire $X = \alpha$ *p.s..*

Exercice 3.40 (Condition suffisante pour la convergence p.s. ou p.p.)

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que pour tout $\eta > 0$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|X_n - X| \geq \eta\})$ est convergente. Montrer que $X_n \to X$ p.s..

Corrigé – *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On pose $A_p = \cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k=n}^{+\infty} \{|X_k - X| \geq 1/p\}$. Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{|X_n - X| \geq 1/p\})$ est convergente, le lemme de Borel-Cantelli (exercice 2.35 question 1) nous montre que $P(A_p) = 0$.*

On rappelle que la question 1 de l'exercice 2.35 consiste simplement à utiliser la monotonie et la σ-sous-additivité de P pour avoir $P(A_p) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(\{|X_k - X| \geq 1/p\}) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On pose maintenant $A = \{\omega \in \Omega, X_n(\omega)$ ne converge pas vers $X(\omega)\}$. Si $\omega \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\omega \in A_p$. On a donc $A \subset \cup_{p\in\mathbb{N}^\star} A_p$ et, comme $P(\cup_{p\in\mathbb{N}^\star} A_p) \leq \sum_{p\in\mathbb{N}^\star} P(A_p) = 0$, ceci montre que $X_n \to X$ p.s..

2. On suppose maintenant que (X, T, m) est un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de X dans $\mathbb{R}$ et f application mesurable de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\eta > 0$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} m(\{|f_n - f| \geq \eta\})$ est convergente. A-t-on $f_n \to f$ p.p. ?

   Corrigé – *La réponse est "oui". La démonstration est identique à celle de la question précédente car, comme cela est dit dans le corrigé de la question précédente, la question 1 de l'exercice 2.35 consiste simplement à utiliser la monotonie et la σ-sous-additivité de la mesure (et non le fait que c'est une probabilité).*

Chapitre 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), on voudrait généraliser la notion d'intégrale grâce à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que :

— Si $f = 1_A$, $A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,

— L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$,

$$\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm, \ \forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".

La construction de cette nouvelle intégrale se déroule, comme pour l'intégrale des fonctions continues décrite au chapitre 1 en 3 étapes, que nous pouvons dans le cas (non limitatif) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, décrire ainsi :

1. Mesurer presque toutes les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un passage à la limite, définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1 ci-dessus, on cherche une application

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lambda(]\alpha,\beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{4.1}$$

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n), \ \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \tag{4.2}$$

(Dans toute la suite de ce cours, la notation $\sum_{n\in\mathrm{N}}$ est identique à $\sum_{n=0}^{+\infty}$.)

Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas (voir l'exercice 2.29), mais on sait qu'elle existe si on se limite à une partie convenable de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par exemple, la tribu de Borel définie précédemment.

Pour l'étape 2, on intégrera les fonctions prenant un nombre fini de valeurs et pour lesquelles chaque étage est dans la tribu de Borel et est de mesure finie. De telles fonctions seront dites étagées et intégrables.

Enfin, à l'étape 3, l'idée principale est de définir l'intégrale des fonctions positives qui sont limites croissantes d'une suite de fonctions étagées (on remplace donc la convergence uniforme utilisée pour la définition de l'intégrale des fonctions réglées par une convergence simple en croissant).

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit (E, T, m) un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, f non nulle, le lemme 3.6 nous donne, en particulier, l'existence d'une famille $(a_i, A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times T$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. D'autre part, le lemme 3.7 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints et les a_i sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et soit* f *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{E}_+$*). Soient* $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ *une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$*) et* n *réels* $a_1, \ldots, a_n$ *strictement positifs tels que* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$. *On définit l'intégrale de* f*, qu'on note* $\int f dm$*, par :* $\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$ *(on a donc* $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$*). D'autre part, si* $f = 0$*, on pose* $\int f dm = 0$.

Remarque 4.2 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(A_i)_{i=1,\ldots,n} \subset T$ est t.q. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i).$$

Proposition 4.3 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, et $\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*
- *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

DÉMONSTRATION – Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc $f, g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme 3.6 sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j},$$

avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $A_i \neq \emptyset$ pour tout i, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $B_j \neq \emptyset$ pour tout j, $B_j \cap B_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $A_0 = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$ et $B_0 = (\bigcup_{j=1}^{n} B_j)^c$, on a aussi

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{B_j}$$

et on peut écrire

$$f + g = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j} = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) 1_{A_i \cap B_j},$$

avec $K = \{(i,j) \in \{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, m\} \setminus (0,0)\}$.

On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g) dm = \sum_{(i,j) \in K} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int (f+g) dm &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i m(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_j m(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j)\end{aligned}$$

(car $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

Il reste à montrer la monotonie. Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.9) ; et comme $\int (f-g)dm \geq 0$, la linéarité positive nous donne que

$$\int f dm = \int (f-g)dm + \int g dm \geq \int g dm.$$

. ■

Remarque 4.4

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, ..., a_n \geq 0$ et $(A_i)_{i=1,...,n} \subset T$ (on ne suppose plus $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :
$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i),$$
en posant $a_i m(A_i) = 0$ si $a_i = 0$.
2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :
$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.5 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$*, et* $g \in \mathcal{E}_+$*, tels que :*

- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et tout* $x \in E$*,*
- $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x)$*, pour tout* $x \in E$*,*

alors
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \geq \int g dm. \tag{4.3}$$

Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante de* $\overline{\mathbb{R}}_+$*, donc sa limite existe dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*.*

DÉMONSTRATION – Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donnent $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \alpha g(x) \leq f_n(x)\}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,+\infty[) \in \mathrm{T}, \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$$

(car $f_n \leq f_{n+1}$) et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. En effet, si $x \in \mathrm{E}$, on distingue deux cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors

$$\alpha g(x) < g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Il existe donc n_x (dépendant de x) tel que $x \in \mathrm{A}_n$ pour $n \geq n_x$. Donc, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

On a donc bien montré que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

(Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction αg.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de A_n, on a $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \leq f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm \leq \int f_n dm. \tag{4.4}$$

En utilisant la décomposition canonique de g (lemme 3.6), il existe une famille $(b_i, \mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p}$ telle que $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $\mathrm{B}_i \neq \emptyset$ pour tout i, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $g = \sum_{i=1}^p b_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc

$$\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} = \sum_{i=1}^p \alpha b_i 1_{\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n}$$

et donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n).$$

Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap \mathrm{E} = \mathrm{B}_i$, la continuité croissante de m donne $m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) \to m(\mathrm{B}_i)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans (4.4) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre α vers 1. ■

Remarque 4.6 Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \leq f_n(x)$ pour $n \geq n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de x. Un tel n_x pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.5.

Lemme 4.7 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Soient deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+$ *convergeant simplement et en croissant vers* f. *On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION –
On applique le lemme 4.5 avec $g = g_p$, p fixé. On obtient $\int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm$. Puis, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} \int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

On obtient enfin (4.5) en changeant les rôles de f_n et g_p. ■

Le lemme 4.7 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.8 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, et* $f \in \mathcal{M}_+$. *D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire :*

- *Pour tout* $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,
- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $x \in E$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

On définit l'intégrale de f *en posant :*

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \ \ (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives :

Lemme 4.9 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors*

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\}$ (voir la remarque 4.4). Comme $f_n \leq f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\} \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

La définition de $\int f dm$ donne alors :

$$\int f dm \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme 4.5 donne

$$\int g dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm.$$

On a donc

$$\sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\} \leq \int f dm.$$

■

Proposition 4.10 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

— *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, et $\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*

— *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

DÉMONSTRATION – La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.3). et de la définition 4.8.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.9. ■

Remarque 4.11 (A propos de $(+\infty) \times 0 \ldots$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. On note I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $(+\infty)1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.12 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$. On note $f1_A \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A f dm$ par $\int f1_A dm$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors, $\int_A f dm = 0$.*

2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f dm = \int g dm$.

3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = 0$.

DÉMONSTRATION – 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.11). On a évidemment $f 1_A \le I_A$ et donc, par monotonie, $\int f 1_A dm = 0$.

2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f 1_{A^c} = g 1_{A^c}$. On a donc $f 1_{A^c}, g 1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f 1_{A^c} dm = \int g 1_{A^c} dm$. D'autre part, comme $\int f 1_A dm = \int g 1_A dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive

$$\int f dm = \int f 1_{A^c} dm + \int f 1_A dm = \int f 1_{A^c} dm$$

(et de même pour g). Donc,

$$\int f dm = \int g dm.$$

3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. ■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.13 (Intégrabilité sans mesurabilité) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et f définie sur A^c, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$), avec $A \in T$, $m(A) = 0$ (on dit que f est définie p.p., car f n'est pas définie sur A).*

1. f est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) s'il existe $g \in \mathcal{M}$ (resp. $g \in \mathcal{M}_+$) t.q. $f = g$ p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe $B \in T$ tel que $m(B) = 0$, $B \supset A$ et $f = g$ sur B^c).

2. Soit f m-mesurable positive. On pose $\int f dm = \int g dm$, avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de g, grâce au lemme 4.12).

Remarque 4.14 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\text{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{card}(\text{Im} f) < +\infty$.
2. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.18).
3. Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev (voir la section 4.9) en découlent facilement.

Lemme 4.15 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $t \in \mathbb{R}_+^*$ *; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f\,dm. \tag{4.6}$$

DÉMONSTRATION – On définit $\mathrm{A}_t = \{f \geq t\} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) \geq t\}$. On a $\mathrm{A}_t \in \mathrm{T}$ et $f \geq t 1_{\mathrm{A}_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.6. ■

4.3 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 4.16 (Convergence monotone (1)) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathrm{E}$*. On pose, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*,* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f_n dm \to \int f\,dm$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

DÉMONSTRATION –

Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f\,dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, la proposition 3.19 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \leq \int f\,dm.$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \geq \int f\,dm. \tag{4.7}$$

Pour montrer (4.7), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p}$$

On note que :

1. $g_p \in \mathcal{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathcal{E}_+$).

2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a
$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$
On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).
3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to +\infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.
4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci-dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$.

Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit
$$\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm.$$
Finalement, on obtient bien $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$. ■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone, où l'on suppose seulement une convergence en croissant presque partout de la suite de fonctions :

Théorème 4.17 (Convergence Monotone (2)) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $f_n \uparrow f$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *tel que* $m(A) = 0$ *et* $f_n(x) \uparrow f(x)$ *pour tout* $x \in A^c$*). La fonction* f *(définie p.p.) est alors* $m-$*mesurable positive (c'est-à-dire que il existe* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$. *On rappelle que, par définition (voir la définition 4.13),* $\int f dm = \int g dm$ *avec* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n \uparrow f$ sur A^c, quand $n \to +\infty$. On pose $g_n = f_n 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in A^c$ et $g_n(x) = 0$ si $x \in A$). On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g = f 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ si $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in A$). Comme $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p., on a donc f $m-$mesurable positive. Puis, le théorème 4.16 donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm = \int f_n dm$ (car $f_n = g_n$ p.p.) et $\int g dm = \int f dm$ (par définition de $\int f dm$), donc
$$\int f_n dm \to \int f dm.$$
■

Corollaire 4.18 (Séries à termes positifs ou nuls) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *; on pose, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm.$

DÉMONSTRATION – On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

Lemme 4.19 (Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$.

On pose, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors $f \in \mathcal{M}_+$ *et*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm).$$

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.19) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$.

Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant n) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.20 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$*, pour presque tout* $x \in E$*, lorsque* $n \to +\infty$*. On suppose qu'il existe* $C \geq 0$ *tel que* $\int f_n\, dm \leq C$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Alors,* f *est* m*–mesurable positive et* $\int f\, dm \leq C$*.*

DÉMONSTRATION – Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien f m-mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in E$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f dm = \int g dm$ par définition de l'intégrale des fonctions m-mesurables (définition 4.13).

Le lemme de Fatou donne $\int f dm = \int g dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm$ et donc $\int f dm \leq C$ car $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

4.4 Mesures et probabilités de densité

4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.21 (Mesure de densité) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$*. Pour* $A \in T$*, on rappelle que* $f 1_A$ *est la fonction (de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) définie par* $f 1_A(x) = f(x)$ *si* $x \in A$ *et* $f 1_A(x) = 0$ *si* $x \in A^c$ *(cette fonction appartient à* $\mathcal{M}_+$*) et on définit* $\int_A f\, dm$ *par* $\int f 1_A dm$*.*

On définit alors $\mu : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par :*

$$\mu(A) = \int f 1_A dm = \int_A f\, dm, \quad \forall A \in T.$$

L'application μ *ainsi définie est une mesure sur* T *(ceci est démontré dans l'exercice 4.26), appelée mesure de densité* f *par rapport à* m*, et notée* $\mu = f m$*.*

Proposition 4.22 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* μ *la mesure de densité* f *par rapport à* m*. Alors, la mesure* μ *est absolument continue par rapport à la mesure* m*, c'est-à-dire que si* $A \in T$ *est tel que* $m(A) = 0$*, alors* $\mu(A) = 0$*.*

DÉMONSTRATION – Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. On a alors $f1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f1_A dm = 0$ d'après le lemme 4.12. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac en 0, définie en (2.2), n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.29 et proposition 2.30).

Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.74.

4.4.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.23 (Probabilité de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\int f d\lambda = 1$ et $p(A) = \int f1_A d\lambda = \int_A f d\lambda$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités. (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Définition 4.24 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) *On donne ici trois exemples de lois de densité.*

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a,b)$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}$: $p(A) = \frac{1}{b-a}\int 1_{[a,b]}1_A d\lambda$, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$
3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$; la loi de Gauss de paramètre (μ, σ) est définie par la densité f définie par :*
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, la proposition 3.23 donne que $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne

$$\int f^+ dm \leq \int |f| dm \text{ et } \int f^- dm \leq \int |f| dm.$$

Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.8 page 174).

Définition 4.25 (Espace $\mathcal{L}^1$ et intégrale de Lebesgue) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}$. *On dit que* f *est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si* $\int |f| dm < +\infty$. *Dans ce cas, on a aussi*

$$\int f^+ dm < +\infty \text{ et } \int f^- dm < +\infty.$$

On pose alors :

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \ (\in \mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(ou plus simplement* $\mathcal{L}^1$*) l'ensemble des fonctions intégrables.*

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

Proposition 4.26 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)
Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. On a alors :*

1. $\mathcal{L}^1$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
2. *L'application* $f \mapsto \int f dm$ *est une application linéaire de* $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}$.
3. *Monotonie : soient* f *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *telles que* $f \leq g$ *; alors* $\int f dm \leq \int g dm$.
4. *Pour tout* $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \leq \int |f| dm$.

DÉMONSTRATION –

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.19). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f + g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha f dm = \alpha \int f dm. \tag{4.8}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.8) est bien vraie.

Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \alpha(\int f^+ dm - \int f^- dm) = \alpha \int f dm$.

Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = (-\alpha)(\int f^- dm - \int f^+ dm) = \alpha \int f dm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On utilise les deux décompositions de $f+g$: $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f+g)^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int (f+g)^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \le g$. On remarque que $f^+ - f^- \le g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \le g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit que

$$\int f^+ dm + \int g^- dm \le \int g^+ dm + \int f^- dm$$

et donc que

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \le \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \le \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi–norme de la manière suivante :

Définition 4.27 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^1$. *On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f \mapsto \|f\|_1$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.26, c'est-à-dire du fait que

$$\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm \text{ et } \int |f+g| dm \le \int |f| dm + \int |g| dm,, \ \forall f, g \in \mathcal{M}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition suivante.

Proposition 4.28 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors* $\int f dm = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*
2. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1$. *Alors* $\|f\|_1 = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*
3. *Soit* $f, g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Alors* $\int f dm = \int g dm$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.
   (a) On suppose que $f = 0$ p.p.. On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.12.)
   (b) On suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.15 page 177 donne $\int f dm \ge \frac{1}{n} m(\{f \ge \frac{1}{n}\})$. On a donc
   $$m(\{f \ge \frac{1}{n}\}) = 0 \text{ et } m(\{f > 0\}) \le \sum_{n \in \mathbb{N}^*} m(\{f \ge \frac{1}{n}\}) = 0$$
   (on a utilisé ici la σ-sous additivité de m). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci-dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a
   $$|\int f dm - \int g dm| = |\int (f - g) dm| \le \int |f - g| dm = 0$$
   (on a utilisé le quatrième point de la proposition 4.26 et $|f - g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé L^1.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 4.29 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ *p.p.. On a alors* $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$, Il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \leq g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ tel que $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \leq g$ sur B_n^c. On pose $C = A \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de m, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g 1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions h_n, h et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \leq G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \leq G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \leq 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to+\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \quad (4.9)$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\geq n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.9 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm \leq 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.26). ■

4.6 L'espace L^1

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré (E, T, m).

On définit maintenant une relation d'équivalence, l'égalité presque partout, notée $(= p.p.)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ (= p.p.)\ g \text{ si } f = g \ \ p.p..$$

Définition 4.30 (L'espace L^1) *L'ensemble $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $(= p.p.)$ définie sur $\mathcal{L}^1$, i.e. $L^1 = \mathcal{L}^1/(= p.p.)$.*

Dans la suite, L^1 désigne $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Remarque 4.31

1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1 \,;\, g = f \text{ p.p.}\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 4.32 (Structure vectorielle sur L^1) *On munit L^1 d'une structure vectorielle (faisant de L^1 un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$)*

1. *Soient $F \in L^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et on pose $\alpha F = \{g \in \mathcal{L}^1 \,;\, g = \alpha f \ p.p.\}$.*
2. *Soient $F, G \in L^1$. On choisit $f \in F$, $g \in G$ et on pose $F + G = \{h \in \mathcal{L}^1 \,;\, h = f + g \ p.p.\}$.*

La définition précédente est bien cohérente. En effet αF (qui est la classe de αf) ne dépend pas du choix de f dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $F + G$ (qui est la classe de $f + g$) ne dépend pas du choix de f dans F et du choix de g dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f + g = f_1 + g_1$ p.p..

Définition 4.33 (Intégrale sur L^1) *Soit $F \in L^1$ et $f \in F$ (on dit que f est un représentant de la classe F, noter que $f \in \mathcal{L}^1$). On pose :*

$$\int F dm = \int f dm.$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int F dm$ ne dépend pas du choix de f dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.28. Le troisième point de la proposition 4.28 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur L^1 :

Définition 4.34 (Norme sur L^1) *Soit* $F \in L^1$. *On choisit* $f \in F$ *et on pose* $\|F\|_1 = \|f\|_1$.

Proposition 4.35 *L'application* $F \mapsto \|F\|_1$ *est une norme sur* L^1. *L'espace* L^1 *muni de la norme* $\|\cdot\|_1$ *est donc un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION – Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de L^1, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1 ;\ h = 0$ p.p.$\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.28. ■

Notation : Soit $F \in L^1$ et $A \in T$, on notera $F1_A$ la classe de $f1_A$ si $f \in F$ et on a donc $F1_A \in L^1$. Cette définition est cohérente car la classe de $f1_A$ ne dépend pas du choix de f dans F. On notera alors, comme cela a été fait dans $\mathcal{M}_+$ (voir le lemme 4.12),

$$\int_A F dm = \int F1_A dm.$$

On montrera plus loin que L^1 est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.48 page 193.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

Définition 4.36 (Convergence p.p., en mesure et dans L^1) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
2. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *en mesure quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
3. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$ *si* $\|F_n - F\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *(Ici aussi, noter que* $\|F_n - F\|_1 = \|f_n - f\|_1$ *si* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.*)*
4. *Soient* $F, G \in L^1$. *On dit que* $F \geq G$ *p.p. si* $f \geq g$ *p.p. avec* $f \in F$ *et* $g \in G$.

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.49 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.37 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $F, G \in L^1$. $F = G$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in F$ et $g \in G$. En général, on écrira plutôt $F = G$ p.p. au lieu de $F = G$ (voir la remarque 4.40).

Remarque 4.38 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légèrement incorrecte), "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" en choisissant $f_n \in F_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" ne dépend pas du choix de f_n dans F_n (voir aussi la remarque 4.40).

En fait, on écrira même souvent "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" (pour une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour f. A vrai dire, en choisissant $f_n \in F_n$, f est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de f_n dans F_n ne change f que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, f sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.39 (Propriétés de l'intégrale sur L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. On a alors :*

1. *Soit $F \in L^1$. Alors $|\int F dm| \leq \|F\|_1$.*
2. *<u>Linéarité</u> : $F \mapsto \int F dm$ est une application linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$.*
3. *<u>Monotonie</u> : Soient $F, G \in L^1$ t.q. $F \geq G$ p.p., alors $\int F dm \geq \int G dm$.*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $F \in L^1$ et $f \in F$, on a $|\int F dm| = |\int f dm| \leq \|f\|_1 = \|F\|_1$.

2. La linéarité de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26). La continuité est donné par le premier point ci-dessus.
3. La monotonie de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26).

■

Remarque 4.40 soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. On confondra dans la suite un élément F de L^1 avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in F$.
2. De manière plus générale, soit $A \subset E$ tel que A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$) et soit $f : A \to \mathbb{R}$ (la fonction f est donc définie

p.p.). On dira que f est un élément de L^1 s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi f et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que f est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 176).

3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si f et g sont des éléments de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Remarque 4.41 Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.26 et exercice 2.26). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est "identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.11).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (c'est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.19) :

Lemme 4.42 (Utilisation de Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*

1. $f_n \ge 0$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$,

2. $\exists C$, $\int f_n dm \le C$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

3. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to \infty$,

alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\int |f| dm \le C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.43 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire ici la convergence pour la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n 1_{]0,\frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0$ pp, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence

presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante", voir figure 4.7) définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement

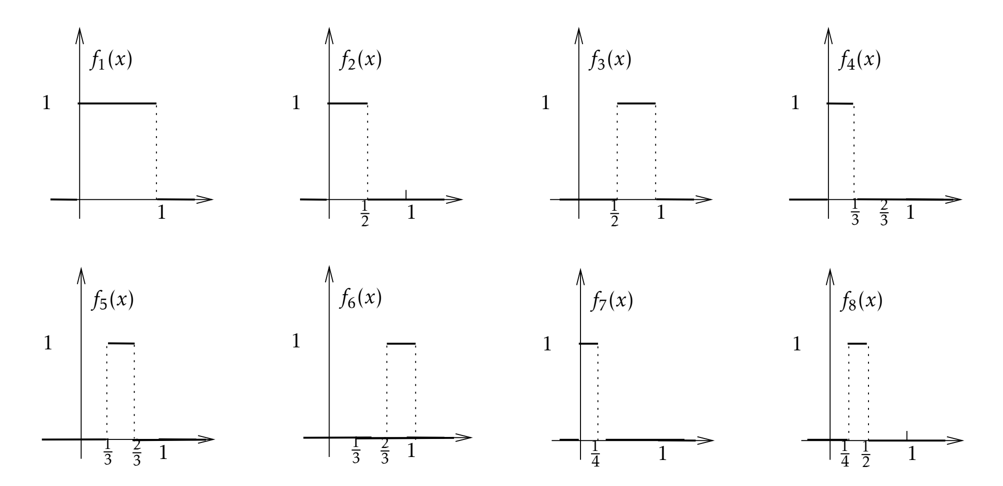


FIGURE 4.1 – La bosse glissante

que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0$ pp (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

On rappelle (voir la remarque 4.38) que l'hypothèse "$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $F_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in F_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des f_n dans F_n. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^c$.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

Théorème 4.43 (Beppo–Lévi) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*

1. $f_{n+1} \geq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *[ou* $f_{n+1} \leq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$*],*

2. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$.

On a alors :

1. $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, alors* $f_n \to f$ *dans* L^1.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.32.

Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.44 (Convergence dominée) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.*

2. $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \mathrm{F}$ *p.p..*

Alors $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$*, lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.29. La différence avec la proposition 4.29 tient dans le fait que f_n et F sont dans L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que f n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences mineures comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.38). Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{A}^c$. On remplace alors f_n par $f_n 1_{\mathrm{A}^c}$, encore noté f_n (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(\mathrm{A}) = 0$). On définit aussi g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,

2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, quand $n \to +\infty$,
3. $F \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.19, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ et pas seulement pour presque tout x). On peut donc appliquer la proposition 4.29 page 185. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to +\infty$.

Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in L^1$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p.). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to +\infty$. ∎

Dans le théorème 4.44, l'hypothèse de convergence p.p. de f_n vers f peut être remplacée par une hypothèse de convergence en mesure (plus précisément, avec l'hypothèse de domination donnée dans le théorème 4.44, on a même équivalence entre la convergence en mesure et la convergence dans L^1). On obtient ainsi le théorème suivant (ou seule la partie utile de cette équivalence est donnée).

Théorème 4.45 (Convergence en mesure dominée) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *en mesure.*
2. $\exists F \in L^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le F$ *p.p..*

Alors $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\displaystyle\int f_n dm \to \int f dm$*, lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – En choisissant des représentants de f_n et f, la démonstration de ce théorème se ramène à celle de l'exercice 4.36. ∎

4.7.2 Série absolument convergente

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (*i.e.* t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important (le

théorème 4.49) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.11) suivant :

Lemme 4.46 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $\int \mathrm{F} dm < +\infty$. *Alors* $\mathrm{F} < +\infty$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{A}) = 0$ *et* $\mathrm{F}(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$*).*

Théorème 4.47 (Séries absolument convergentes dans L^1) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *t.q.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$ *; alors :*

1. $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *;* $|\sum_{p=0}^n f_p| \le \mathrm{F}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. La série de terme général $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in \mathrm{E}$*, convergente (dans* $\mathbb{R}$*). On définit* f *par* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *(de sorte que* f *est définie p.p.).*

3. $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\sum_{p=0}^n f_p \to f$ *dans* L^1 *et p.p., quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La preuve s'effectue en trois étapes :

1. On choisit un représentant de f_n, encore noté f_n, et on pose $\mathrm{F}(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.18 du théorème de convergence monotone donne
$$\int \mathrm{F} dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty.$$
Le lemme 4.46 donne alors $\mathrm{F} < +\infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$ et $\mathrm{F}(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$. En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ au sens de la remarque 4.40).
La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^n f_p| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $x \in \mathrm{A}^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(\mathrm{A}) = 0$, f est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in \mathrm{A}^c$ par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^n f_p(x)$.
3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^n f_p$. le premier point donne $|s_n| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44). Il donne $f \in \mathrm{L}^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers f) dans L^1. La convergence p.p. (vers f) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point. ■

Théorème 4.48 (Riesz–Fisher) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^1 est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.47 est que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach. ■

Dans la suite L^1 sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 4.49 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée)

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $f \in L^1$ *telles que* $f_n \to f$ *dans* L^1*, alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*, et* $F \in L^1$ *telles que :*

1. $f_{n_k} \to f$ *p.p.,*

2. $|f_{n_k}| \le F$ *p.p., pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p, q \ge n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \le \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.47 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1 pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.33 et 4.34.

Proposition 4.50 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*; alors :*

1. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ *t.q.* $\forall A \in T, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon$.

2. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.

Théorème 4.51 (Vitali) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. On note* L^1 *l'espace* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* L^1 *t.q.* $f_n \to f$ *p.p.,* f *prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(voir remarque 4.38). Alors,* $f \in L^1$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^1 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. (Équi-intégrabilité) Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$A \in T, n \in \mathbb{N}, m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon,$$

2. (Tension) pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.34 ; la démonstration du fait que les hypothèses 1 et 2 impliquent la convergence dans L^1 ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.39 et exercice 3.28). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.34). ■

Dans le théorème 4.51, si $m(E) < +\infty$, l'hypothèse 2 est, bien sûr, toujours vérifiée (il suffit de prendre $C = E$).

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration

Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(., t) : E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x, t)$. On suppose que l'application $f(., t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(., t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(., t) dm = \int f(x, t) dm(x).$$

Théorème 4.52 (Continuité sous $\int$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse (4.10) et* $t_0 \in \mathbb{R}$ *; on suppose de plus que :*

1. l'application $f(x, .)$*, définie pour presque tout* $x \in E$ *par :* $t \mapsto f(x, t)$*, est continue en* t_0*, pour presque tout* $x \in E$*;*

2. $\exists \ \varepsilon > 0$ *et* $\exists \ G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *tels que* $|f(., t)| \leq G$ *p.p., pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

Alors F*, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \int f(., t) dm = \int f(x, t) dm(x)$*, est continue en* t_0.

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$. Comme $f_n \to f(\cdot, t_0)$ p.p. et $|f_n| \leq G$ p.p.. On peut

appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to +\infty$. ■

Théorème 4.53 (Dérivabilité sous $\int$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* f *une fonction de* $E \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'hypothèse (4.10) et* $t_0 \in \mathbb{R}$*. On suppose de plus qu'il existe* $\varepsilon > 0$, $A \in T$ *et* $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et :*

1. *L'application* $t \mapsto f(x,t)$ *est dérivable pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$ *;*
2. $|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq G(x)$ *pour tout* $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ *et pour tout* $x \in A^c$.

Alors F*, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $F(t) = \displaystyle\int f(.,t)dm = \int f(x,t)dm(x)$*, est dérivable en* t_0 *et :*

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dm(x).$$

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ p.p., quand $n \to +\infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n}t_0 + (1-\theta_{x,n})t_n)$ (grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.44 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dm(x).$$

. ■

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.54 (Espérance, moment, variance) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle.*

.

1. *Si* $X \geq 0$ *(c'est-à-dire* $X(\omega) \geq 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$*), on définit l'espérance* $E(X)$ *de la variable aléatoire* X *par* $E(X) = \int X(\omega) dp(\omega)$.
2. *Si* $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *(c'est-à-dire* $E(|X|) < +\infty$*), on définit l'espérance* $E(X)$ *de la variable aléatoire* X *par :*

$$E(X) = \int X(\omega) dp(\omega).$$

   On définit la variance de X *par Var*$(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ *(avec* $\sigma(X) \geq 0$*).*
3. *Pour* $r \in [1, +\infty[$*, le moment d'ordre* r *de la variable aléatoire* X *est l'espérance de la variable aléatoire* $|X|^r$.

Définition 4.55 (Covariance) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v.a.r. t.q.* $E(X^2) < +\infty$ *et* $E(Y^2) < +\infty$*. On définit la covariance de* X *et* Y *par : cov*$(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$*. (Remarquer que* $(X - E(X)(Y - E(Y))$ *est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par* $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ *qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.58 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.

Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.15 :

Lemme 4.56 (Inégalité de Markov) *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle positive sur* Ω *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. On suppose que* $0 < E(X) < +\infty$*. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION – Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.15 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

Lemme 4.57 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω*, intégrable et t.q. sa variance vérifie* $0 <$

$\sigma^2(X) < +\infty$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

$$P(\{|X - E(X)| \geq \lambda\sigma(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION – Appliquer le lemme 4.15 avec $f = |X - E(X)|^2$ et $t = \lambda\sigma(X)$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. La loi de X, notée P_X est définie par $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est équivalent à dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_A$:

$$\int_\Omega \varphi \circ X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dP_X(x). \tag{4.11}$$

On rappelle que $\varphi \circ X$ est souvent improprement noté $\varphi(X)$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ X(\omega) = \varphi(X(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.58 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

Théorème 4.58 (Loi image) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω *et* P_X *la loi de la variable aléatoire* X. *On a alors :*

1. *L'égalité (4.11) est vraie pour toute fonction* φ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et toute fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* $\varphi \circ X$ *appartient à* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *si et seulement si* $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$. *De plus, si* $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$, *L'égalité (4.11) est vraie.*

DÉMONSTRATION – On remarque que (4.11) est vraie pour tout $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de p_X). Par linéarité positive, (4.11) est encore vraie pour tout φ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.11) est alors vraie pour tout φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que φ est intégrable pour la probabilité p_X si φ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et l'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.59 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *des v.a.r. indépendantes.*

1. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. On a alors :*

$$\mathrm{E}(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\mathrm{X}_i)) = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{E}(\varphi_i(\mathrm{X}_i)). \tag{4.12}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable pour tout* $i = 1, \ldots, d$*. La v.a.r.* $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable et l'égalité (4.12) est vraie.*

3. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. L'égalité (4.12) est vraie.*

N.B. Si $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *sont des v.a.r., le fait que (4.12) soit vraie pour toute famille* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *de fonctions boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *soient indépendantes.*

DÉMONSTRATION – Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.12) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des X_i (Si $\varphi_i = 1_{\mathrm{A}_i}$ avec $\mathrm{A}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{E}(\varphi_i(\mathrm{X}_i)) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X}_i \in \mathrm{A}_i\}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_i^{-1}(\mathrm{A}_i))$). Par linéarité positive, on en déduit que (4.12) est vraie si les fonctions φ_i sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.12) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction φ_i (pour tout i). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(\mathrm{X}_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.12) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et φ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(\mathrm{X})$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.59 est que XY est intégrable et $\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$ si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.12) lorsque les fonctions φ_i sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.61 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.60) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur K^c) .

Proposition 4.60 *Soit m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Alors, $m = \mu$.

DÉMONSTRATION – Puisque m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ et $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a,b[,\ a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire φ_n, pour $n \geq 2/(b-a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a,\\
&\varphi_n(x) = n(x-a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n},\\
&\varphi_n(x) = -n(x-b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b\\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a,b[) = \mu(]a,b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.31. ■

Proposition 4.61 *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1,\ldots,X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$,*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.13}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION – Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.59 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée.

On montre maintenant que la condition est suffisante. On suppose donc que (4.13) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1,\ldots,X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.14}$$

On rappelle en effet que

$$E(1_{A_i}(X_i)) = P(X_i^{-1}(A_i)) \text{ et } E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)).$$

Pour montrer (4.14), on introduit, pour tout $1 \leq n \leq d+1$, la propriété suivante :
P_n : (4.13) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i \geq n$, $\varphi_i \geq 0$.

L'hypothèse de la proposition donne que P_1 est vraie. On suppose maintenant que P_n est vraie pour un $n \in \{1, \ldots, d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$:

$$m(A_n) = E(\prod_{i=1}^d \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \prod_{i=1}^d E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété P_n montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La proposition 4.60 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété P_{n+1}. Par récurrence sur n, on montre ainsi que P_{d+1} est vraie, ce qui donne (4.14) et l'indépendance de $X_1, \ldots, X_d$. ■

4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$

Définition 4.62 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $N > 1$ *(*$N \in \mathbb{N}$*).*

1. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}^N$. *Pour* $x \in E$, *on pose* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. *La fonction* f *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ *si* $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *pour tout* $n \in \{1, \ldots, N\}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$, *on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm, \ldots, \int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

Proposition 4.63 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $N > 1$ *et* $f : E \to \mathbb{R}^N$.

On note $f_1, \ldots, f_N$ *les composantes de* f.

1. f_n *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) pour tout* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}^N$, *c'est-à-dire si et seulement si* $f^{-1}(A) \in E$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}^N$*). On munit* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme, notée* $\|\cdot\|$. *Alors,* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ *si et seulement si* $\int \|f\| dm < +\infty$ *(noter que* $\|f\| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $N = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{A \times B,\ A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(A \times B) \in T$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Soit donc $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B) \in T$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Donc $f^{-1}(A \times B) \in T$. On a bien montré que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

Réciproquement, on suppose maintenant que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R})$. Or $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(A) = f^{-1}(A \times \mathbb{R}) \in T$, ce qui prouve que f_1 est mesurable. On prouve de manière semblable que f_2 est mesurable.

2. Soit f mesurable de E dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

   Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < +\infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < +\infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < +\infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$. On a donc :

$$\int \|f\| dm < +\infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m).$$

■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $N = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. s'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f = g$ sur A^c.

Définition 4.64 (Espace L^1) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $F \in L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$. On pose $\|F\|_1 = \int \|f\| dm$, où $f \in F$ (cette définition est correcte car indépendante du choix de f dans F).*

Proposition 4.65 (L^1 est un espace de Banach) *Soient (E, T, m) un espace mesuré et $N > 1$. L'espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.64).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $N = 1$. ■

Définition 4.66 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré.*

1. *Soit* $f : E \to \mathbb{C}$. *On note* $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *les parties réelle et imaginaire de* f. *On a donc, pour* $x \in E$, $f(x) = \mathfrak{Re}(f)(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)(x)$, *avec* $\mathfrak{Re}(f)(x), \mathfrak{Im}(f)(x) \in \mathbb{R}$. *La fonction* f *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ *si* $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, *on note*

$$\int f dm = \int \mathfrak{Re}(f) dm + i \int \mathfrak{Im}(f) dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

Proposition 4.67 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré et* f *une application de* $E \to \mathbb{C}$.

1. $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *sont mesurables (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{C}$, *c'est-à-dire si et seulement* $f^{-1}(A) \in E$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{C}$*),* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ *si et seulement si* $\int |f| dm < +\infty$ *(noter que* $|f| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.63) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x,y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue. ■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

Définition 4.68 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré.*

1. *L'espace* $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ *est l'espace* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ *quotienté par la relation "*$f = g$ *p.p.".*
2. *Soit* $F \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. *On pose* $\|F\|_1 = \int |f| dm$, *où* $f \in F$ *(cette définition est correcte car indépendante du choix de* f *dans* F*).*

Proposition 4.69 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré. L'espace* $L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ *est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur* $\mathbb{C}$*) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.68).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un espace de Banach (réel). ∎

4.11 Exercices

4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Sup de mesures) Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \text{ (dans } \overline{\mathbb{R}}_+\text{) quand } n \to +\infty.$$

. [On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.]$$

Corrigé – *On remarque tout d'abord que la suite* $(\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, elle admet donc une limite dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Pour* $N \in \mathbb{N}$, *on passe à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans les inégalités*

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{N} a_p \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On passe maintenant à la limite quand $N \to \infty$ *pour obtenir*

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p.$$

2. Montrer que m est une mesure.

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $m(\emptyset) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\emptyset) = 0$.
Puis, soit $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ *t.q.* $\mathrm{A}_p \cap \mathrm{A}_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$. *On pose* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. *On a*

$$m(\mathrm{A}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{\infty} m_n(\mathrm{A}_p).$$

En utilisant la question précédente avec $a_{n,p} = m_n(\mathrm{A}_p)$, *on en déduit* $m(\mathrm{A}) = \sum_{p=0}^{\infty} m(\mathrm{A}_p)$.

3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.

Corrigé – *Soit* $\{a_1,\ldots,a_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$ *et* $\{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_p\} \subset \mathrm{T}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^{p} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.
On a $\int f dm_n = \sum_{i=1}^{p} a_i m_n(\mathrm{A}_i)$, *la suite* $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante. Puis, en passant à la limite sur n, on obtient :*

$$\lim_{n\to+\infty}(\sum_{i=1}^{p} a_i m_n(\mathrm{A}_i)) = \sum_{i=1}^{p} a_i \lim_{n\to+\infty}(m_n(\mathrm{A}_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i m(\mathrm{A}_i) = \int f dm,$$

et donc

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty}(\int f dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n).$$

4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)

(a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.

Corrigé – *Soit* $f \in \mathcal{M}_+$. *Soit* $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $f_p \uparrow f$ *quand* $p \to \infty$. *D'après la question précédente, on a (pour tout n et tout p)*

$$\int f_p dm_n \leq \int f_p dm_{n+1} \leq \int f_p dm.$$

En passant à la limite sur p (avec n fixé) on en déduit que $\int f dm_n \leq \int f dm_{n+1} \leq \int f dm$. *La suite* $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc croissante et majorée par* $\int f dm$.

(b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ lorqsue $n \to +\infty$.

Corrigé – *On pose* $\mathrm{A}_f = \{g \in \mathcal{E}_+,\ g \leq f\}$. *On sait que*

$$\int f dm = \sup_{g\in\mathrm{A}_f} \int g dm \text{ et que } \int f dm_n = \sup_{g\in\mathrm{A}_f} \int g dm_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La question 2 donne que $[\int g dm = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n$ *pour tout* $g \in \mathcal{E}_+$.. *On en déduit*

$$\int f dm = \sup_{g\in\mathrm{A}_f}(\sup_{n\in\mathbb{N}} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sup_{g\in\mathrm{A}_f} \int g dm_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f dm_n,$$

ce qui, avec la question précédente, donne bien $\int f dm_n \to \int f dm$ *quand* $n \to +\infty$.

5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\ \mathrm{T},\ m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f\,dm_n \to \int f\,dm$ quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *On a $|f| \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\ \mathrm{T},\ m)$. la question 4 donne $\int |f|dm_n \le \int |f|dm$, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La question 4 donne aussi que*
   $$\int f^+ dm_n \to \int f^+ dm \text{ et } \int f^- dm_n \to \int f^- dm.$$
   Les deux convergences ayant lieu dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\int f\,dm_n \to \int f\,dm$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.2 (Somme de mesures) Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.

   Corrigé – *(a) $m(\emptyset) = m_1(\emptyset) + m_2(\emptyset) = 0$,*

   (b) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a :
   $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = m_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) + m_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n).$$
   Comme $m_i(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m_i(\mathrm{A}_p)$ pour $i = 1, 2$, on en déduit
   $$m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} (m_1(\mathrm{A}_p) + m_2(\mathrm{A}_p)) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} m(\mathrm{A}_p),$$
   ce qui prouve bien la σ-additivité de m.

   Ceci montre bien que m est une mesure.

2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f\,dm = \int f\,dm_1 + \int f\,dm_2$.

   Corrigé – *Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose $\varphi = 1_{\mathrm{A}}$. La définition de m donne immédiatement*
   $$\int \varphi dm = \int \varphi dm_1 + \int \varphi dm_2. \tag{4.15}$$
   Par linéarité de l'intégrale, l'égalité (4.15) est aussi vraie pour $\varphi \in \mathcal{E}_+$.

   Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $\varphi_n \uparrow \varphi$ quand $n \to +\infty$. On écrit (4.15) avec φ_n au lieu de φ et on fait tendre n vers l'infini. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors (4.15).

   On a donc montré que (4.15) est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_+$.

   Soit $f \in \mathcal{M}$, en écrivant (4.15) avec $\varphi = |f|$ on obtient bien que $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m_1) \cap \mathcal{L}^1(\mathrm{E},\mathrm{T},m_2)$.

   Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\ \mathrm{T},\ m)$, on écrit (4.15) avec $\varphi = f^+$ et $\varphi = f^-$, la différence donne bien $\int f\,dm = \int f\,dm_1 + \int f\,dm_2$.

3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $A \in T$, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A)$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f\,dm_n$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{m}_n$ par $\tilde{m}_n(A) = \alpha_n m_n(A)$ pour tout $A \in T$. Il est facile de voir que $\tilde{m}_n$ est une mesure sur T, que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n)$ et que $\int f\,d\tilde{m}_n = \alpha_n \int f\,dm_n$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m_n)$.*

   On pose maintenant, par récurrence sur n, $\mu_0 = \tilde{m}_0$ et $\mu_n = \mu_{n-1} + \tilde{m}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La question précédente montre, par récurrence sur n, que μ_n est une mesure sur T et donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu_n)$ si et seulement si $f \in \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\tilde{m}_n) = \bigcap_{p\le n} \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m_n)$. Enfin, la question précédente donne aussi, toujours par récurrence sur n,

$$\int f\,d\mu_n = \sum_{p=0}^{n} \int f\,d\tilde{m}_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha_n \int f\,dm_n.$$

   Pour tout $A \in T$, on a $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$. On peut donc utiliser les résultats de l'exercice précédent. On obtient que m est une mesure sur T et que $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m)$ implique $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,\mu_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int f\,d\mu_n$. Si $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m)$ on a donc $f \in \mathcal{L}^1_{R}(E,T,m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\int f\,dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \int f\,dm_p$, c'est-à-dire

$$\int f\,dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f\,dm_n.$$

Exercice 4.3 (Intégrale pour la mesure de Dirac) Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.20.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f\,d\delta_0$.

Corrigé – *On définit g de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par*

$$g(x) = 0 \text{ si } x \neq 0,$$
$$g(0) = f(0).$$

On a $g \in \mathcal{M}_+$ et, comme $\delta_0(\{0\}^c) = 0$, on a $f = g$ p.p., on en déduit

$$\int f\,d\delta_0 = \int g\,d\delta_0 = f(0)\delta_0(\{0\}) = f(0).$$

Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue) Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(A)$ [resp. $\mathcal{B}(B)$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B,\mathcal{B}(B),\lambda_B)$. Montrer que $f_{|A} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A,\mathcal{B}(A),\lambda_A)$ et que $\int f_{|A}\,d\lambda_A = \int f 1_A\,d\lambda_B$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Corrigé – *On rappelle que $\mathcal{B}(A) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset A\}$ et $\mathcal{B}(B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,;\, C \subset B\}$ (voir l'exercice 2.3).*

1. *Soit* $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *Il existe donc* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+$ *et* $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p \in \mathcal{B}(\mathrm{B}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

   La fonction $f 1_\mathrm{A}$ *appartient donc aussi à* $\mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *(car* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{B})$*) et elle s'écrit*
$$f = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i} 1_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}},$$
   de sorte que
$$\int f 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   La fonction $f_{|\mathrm{A}}$ *(c'est-à-dire la restriction de* f *à* A*) est définie sur* A*, elle s'écrit* $f_{|\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}}$. *Cette fonction appartient à* $\mathcal{E}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$ *car* $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$ *pour tout* i *et on a*
$$\int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \sum_{i=1}^p a_i \lambda(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}).$$
   On a bien montré que
$$\int f 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A}, \tag{4.16}$$
   pour tout $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$.

2. *Soit* $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *il existe* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *t.q.* $f_n \uparrow f$*, quand* $n \to +\infty$. *On a donc aussi* $(f_n 1_\mathrm{A})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f 1_\mathrm{A}$ *et* $(f_{n|\mathrm{A}})_{n\in\mathbb{N}} \uparrow f_{|\mathrm{A}}$*, quand* $n \to +\infty$. *Comme* $f_{n|\mathrm{A}} \in \mathcal{E}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$*, la caractérisation de la mesurabilité positive (proposition 3.17) donne* $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$. *On a aussi* $f 1_\mathrm{A} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$. *Puis, en écrivant (4.16) avec* f_n *au lieu de* f *et en passant à la limite quand* $n \to +\infty$*, la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$ *et sur* $\mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$ *donne (4.16).*

   On a donc montré (4.16) pour tout $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$.

3. *Soit* $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}), \lambda_\mathrm{B})$. *On remarque d'abord que* $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{M}(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A}))$. *En effet, si* $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $(f_{|\mathrm{A}})^{-1}(\mathrm{C}) = f^{-1}(\mathrm{C}) \cap \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{A})$. *Puis, on applique (4.16) à* $|f|$*, qui appartient à* $\mathcal{M}_+(\mathrm{B}, \mathcal{B}(\mathrm{B}))$*, pour obtenir*
$$\int |f_{|\mathrm{A}}| d\lambda_\mathrm{A} = \int |f|_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int |f| 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} < \int |f| d\lambda_\mathrm{B} < \infty,$$
   ce qui montre que $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{A}, \mathcal{B}(\mathrm{A})), \lambda_\mathrm{A})$.

   Enfin, en appliquant (4.16) avec f^+ *et* f^- *au lieu de* f*, on obtient*
$$\int f^+ 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^+{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^+ d\lambda_\mathrm{A} < \infty$$
   et
$$\int f^- 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B} = \int f^-{}_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int (f_{|\mathrm{A}})^- d\lambda_\mathrm{A} < \infty,$$
   ce qui donne, en faisant la différence,

$$\int f 1_A d\lambda_B = \int f_{|A} d\lambda_A.$$

Exercice 4.5 (Intégrale des fonctions continues) Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et que

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$$

(cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

N.B. : Bien sûr, un résultat analogue est vrai en remplaçant $[0,1]$ par $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Corrigé – *Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$, une famille $(\alpha_i)_{i\in\{0,\ldots,p\}}$, avec : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,p-1\}$, $\alpha_p = 1$, et une famille $(a_i)_{i\in\{0,\ldots,p-1\}} \subset \mathbb{R}$ tels que :*

$$g(x) = a_i,\ \ \forall x \in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\ \ \forall i \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

On sait que

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

D'autre part, cette fonction g est mesurable (c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$ car, pour tout $C \subset \mathbb{R}$, $g^{-1}(C)$ est une réunion (finie) d'intervalles du type $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ à laquelle on ajoute éventuellement certains des points α_i. On a donc $g^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0,1])$. On a bien montré que $g \in \mathcal{M}([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. Enfin, comme les singletons sont de mesure nulle, on a $|g| = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., et donc

$$\int |g| d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} |a_i|(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \infty.$$

Donc, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$. Finalement, puisque $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 1_{]\alpha_i,\alpha_{i+1}[}$ p.p., on a aussi

$$\int g d\lambda = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i).$$

On a donc montré que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \int_0^1 g(x)dx. \tag{4.17}$$

Soit maintenant $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. *On remarque tout d'abord que* f *est mesurable (parce que, par exemple, les ouverts de* $\mathbb{R}$ *engendrent* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et l'image réciproque, par* f, *d'un ouvert de* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $[0,1]$, *donc un élément de* $\mathcal{B}([0,1])$*). Puis, on remarque que* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1],\lambda)$ *car* $\int |f|d\lambda \le \max_{x\in[0,1]}|f(x)| < +\infty$.

On compare maintenant $\int f d\lambda$ *et* $\int_0^1 f(x)dx$.

Il existe une suite de fonctions en escalier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *t.q.* $f_n \to f$ *uniformément sur* $[0,1]$, *c'est-à-dire* $\|f_n - f\|_u \to 0$, *quand* $n \to +\infty$.

La définition de l'intégrale des fonctions continues donne $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ *quand* $n \to +\infty$.

D'autre part, on a aussi $\int f_n d\lambda \to \int f d\lambda$, *quand* $n \to +\infty$, *car* $|\int f_n d\lambda - \int f d\lambda| \le \int |f_n - f| d\lambda \le \|f_n - f\|_u \to 0$, *quand* $n \to +\infty$. *En passant à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans (4.17) avec* f_n *au lieu de* g, *on obtient bien*

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx.$$

Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables) Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $C([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Corrigé – *Soit* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. *On montre tout d'abord que* f *est mesurable.*

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Comme* f *est continue, l'ensemble* $f^{-1}(O) = \{x \in [0,1],\ f(x) \in O\}$ *est une ouvert de* $[0,1]$ *et donc* $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}([0,1])$. *Les ouverts de* $\mathbb{R}$ *engendrant la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$, *on en déduit que* f *est mesurable de* $[0,1]$ *(muni de sa tribu borélienne) dans* $\mathbb{R}$ *(muni de sa tribu borélienne).*

On montre maintenant que f *est intégrable. Comme la fonction* f *est continue sur le compact* $[0,1]$, *elle est bornée. Il existe donc* $M \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $|f| \le M$ *sur* $[0,1]$. *On a donc, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$ *:*

$$\int |f| dm \le M m([0,1]) < \infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Exercice 4.7 (Intégrale d'une fonction continue non bornée) Soit $f \in C(]0,1[,\mathbb{R})$ et F une primitive de f (on a donc $F \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$).

On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

1. Montrer que f est borélienne c'est-à-dire mesurable quand on munit $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ de leur tribu borélienne.
2. On suppose maintenant que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,1[$ (on a donc $f \in \mathcal{M}_+$).

 (a) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

(b) On suppose dans cette question que $\lim_{x\to 1^-} F(x) \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to 0^+} F(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$. [On pourra utiliser les exercices 4.4 et 4.5.]

(c) On suppose maintenant que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$. Montrer que $f \notin \mathcal{L}^1$ (on a donc $\int f d\lambda = +\infty$).

Exercice 4.8 ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. [On pourra utiliser l'exercice 4.7.]

Corrigé – *On pose* $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. *Un exemple consiste à prendre* $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *pour* $x \in]0,1[$. *Selon l'exercice 4.7, on a bien* $f, g \in \mathcal{L}^1$, *car une primitive de* f *et* g *est la fonction* F *définie par* $F(x) = 2\sqrt{x}$, *et* $fg \notin \mathcal{L}^1$ *car une primitive de* fg *est la fonction* G *définie par* $G(x) = \ln x$.

Exercice 4.9 (Majoration d'une fonction intégrable décroissante) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que f est borélienne (et donc borélienne positive).

Corrigé – *Soit* $\alpha > 0$. *comme* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *et nulle sur* $\mathbb{R}_-$ *l'ensemble* $f^{-1}([\alpha,+\infty[)$ *est un intervalle du type* $]0,\beta[$ *ou* $]0,\beta]$ *(avec* $\beta \geq 0$*), c'est donc un borélien. Si* $\alpha \leq 0$, *on a* $f^{-1}([\alpha,+\infty[) = \mathbb{R}$, *qui est aussi un borélien. Comme l'ensemble des intervalles* $[\alpha,+\infty[$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$, *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on en déduit que* f *est borélienne.*

2. On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq C/x$ pour tout $x > 0$.

Corrigé – *Soit* $x > 0$. *Comme* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *on a* $f(y) \geq f(x)$ *pour tout* $y \in]0,x[$ *et donc* $|f| \geq f(x)1_{]0,x]}$. *En intégrant cette inégalité sur* $\mathbb{R}$, *on en déduit* $xf(x) \leq \|f\|_1$, *ce qui est l'inégalité demandée avec* $C = \|f\|_1$.

3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (même si f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$).

Corrigé – *Il suffit de prendre une fonction* f *intégrable, positive, nulle sur* $\mathbb{R}_-$ *et qui ne tend pas vers* 0 *en* $+\infty$. *Un tel exemple est* $f = \sum_{n>2} \varphi_n$ *avec*

$$\varphi_n(x) = n^2\left(x - n + \frac{1}{n^2}\right) \text{ si } n - \frac{1}{n^2} \leq x \leq n,$$
$$\varphi_n(x) = -n^2\left(x - n - \frac{1}{n^2}\right) \text{ si } n < x \leq n + \frac{1}{n^2},$$
$$\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \notin [n - \frac{1}{n^2}, [n + \frac{1}{n^2}].$$

Exercice 4.10 (Caractérisation d'une fonction caractéristique) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $0 \le f \le 1$ p.p. et que $\int f\,dm = \int f^2\,dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_A$ p.p..

Corrigé – *On remarque que* $\int f(1-f)\,dm = 0$. *Comme* $0 \le f \le 1$ *p.p., on a* $f(1-f) \ge 0$ *p.p., on en déduit que* $f(1-f) = 0$ *p.p.. On pose* $A = \{f = 1\}$, *on a alors* $f = 0$ *p.p. sur* A^c, *ce qui donne bien* $f = 1_A$ *p.p..*

Exercice 4.11 (f positive intégrable implique f finie p.p.) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f\,dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

Corrigé – *Cet exercice a été vu dans ce chapitre. On redonne une preuve ici.*
Soit $A = f^{-1}(\{+\infty\})$. *On a* $A \in T$ *car* f *est mesurable et* $\{+\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $f \ge n 1_A$, *donc, par monotonie de l'intégrale,* $\int f\,dm \ge n m(A)$, *ou encore*

$$m(A) \le \frac{1}{n}\int f\,dm.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, *on en déduit* $m(A) = 0$. *On a donc* $f < +\infty$ *p.p. car* $f(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in A^c$.

Exercice 4.12 (Une caractérisation de l'intégrabilité) Soient (E, T, m) un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{x \in E, |u(x)| \ge n\}$ et $B_n = \{x \in E, n < |u(x)| \le n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u|dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\,m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty.$$

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $B_n, A_n \in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n 1_{B_n} \le |u| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) 1_{B_n}.$$

On en déduit (en utilisant le théorème de convergence monotone et la monotonie de l'intégrale) que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) \le \int |u|dm \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n). \tag{4.18}$$

Si $\int |u|dm < +\infty$, *on a donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,m(B_n) < +\infty$, *on a aussi* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) m(B_n) < +\infty$ *car* $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \le m(E) < +\infty$ *(remarquer que* $B_n \cap B_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$*). On déduit donc de (4.18) que* $\int |u|dm < +\infty$.

On a ainsi montré que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(B_n).$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n *par* $C_n = \{x \in E, n \leq |u(x)| < n+1\}$. *On a donc aussi :*

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n). \tag{4.19}$$

Pour terminer la question, il suffit de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty. \tag{4.20}$$

Pour montrer (4.20), on remarque que $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc, comme* $A_{n+1} \subset A_n$ *et que* $m(A_{n+1}) \leq m(A_n) \leq m(E) < +\infty$ *:*

$$m(C_n) = m(A_n) - m(A_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_{p+1})$$
$$= \sum_{p=0}^{n} p\, m(A_p) - \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) m(A_p) = \sum_{p=1}^{n} m(A_p) - n\, m(A_{n+1}).$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) \leq \sum_{p=1}^{n} m(A_p), \tag{4.21}$$

et :

$$\sum_{p=1}^{n} m(A_p) = \sum_{p=0}^{n} p\, m(C_p) + n\, m(A_{n+1}). \tag{4.22}$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$*, on déduit donc de (4.21) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(C_n) < +\infty$*. On a, par (4.19),* $\int |u| dm < +\infty$ *et donc, comme* $n 1_{A_{n+1}} \leq |u|$*, on a aussi* $n\, m(A_{n+1}) \leq \int |u| dm < +\infty$*. On déduit donc de (4.22) que* $\sum_{n=1}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$*. Comme* $m(A_0) \leq m(E) < +\infty$*, on a bien finalement* $\sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n) < +\infty$.

On a bien montré (4.20), ce qui termine la question.

2. Soit $p \in]1, +\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(B_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(A_n) < +\infty.$$

Corrigé – *La fonction $|u|^p$ est mesurable car composée d'une fonction mesurable et d'une fonction continue.*

On reprend maintenant le raisonnement de la question précédente. On remarque que :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) \le \int |u|^p dm \le \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n). \tag{4.23}$$

Si $\int |u|^p dm < +\infty$, on a donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$.

Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty$, on a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^p n^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$$

et $m(\mathrm{B}_0) \le m(\mathrm{E}) < +\infty$. On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p m(\mathrm{B}_n) < +\infty$. Ceci donne $\int |u|^p dm < +\infty$ par (4.23).

On a ainsi montré que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty.$$

Ici aussi, on peut utiliser le même raisonnement en remplaçant B_n par $\mathrm{C}_n = \{x \in \mathrm{E}, n \le |u(x)| < n+1\}$. On a donc aussi :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty. \tag{4.24}$$

Pour terminer la question, il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < +\infty. \tag{4.25}$$

Pour montrer (4.25), on utilise, comme dans la question précédente que $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_n \setminus \mathrm{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$m(\mathrm{C}_n) = m(\mathrm{A}_n) - m(\mathrm{A}_{n+1}).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{A}_n) - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} (n-1)^p m(\mathrm{A}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) - \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}).\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) \le \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n), \tag{4.26}$$

et :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (n^p - (n-1)^p) m(\mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} n^p\, m(\mathrm{C}_n) + \mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}). \tag{4.27}$$

Pour conclure, on remarque que $\dfrac{n^p-(n-1)^p}{n^{p-1}} \to p$ *quand* $n \to +\infty$. *Il existe donc* $\alpha, \beta > 0$ *t.q.* $\alpha n^{p-1} \le n^p - (n-1)^p \le \beta n^{p-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty$, *on déduit alors de (4.26) que* $\sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$.

Réciproquement, on suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{C}_n) < +\infty$. *On a alors, par (4.24),* $\int |u|^p dm < \infty$ *et donc, comme* $\mathrm{N}\, 1_{\mathrm{A}_{\mathrm{N}+1}} \le |u|$, *on a aussi* $\mathrm{N}^p\, m(\mathrm{A}_{n+1}) \le \int |u|^p dm < \infty$. *On déduit alors de (4.27) que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{p-1} m(\mathrm{A}_n) < \infty.$$

On a bien montré (4.25), ce qui termine la question.

Exercice 4.13 (Sur la convergence en mesure) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$k \ge k_1 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E}\,;\, |g(x)| \ge k\}$. *On a donc* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_k = \emptyset$. *Comme g est intégrable, on a* $m(\mathrm{A}_k) \le \|g\|_1/k < +\infty$. *On peut donc appliquer la continuité décroissante de m, on obtient que* $m(\mathrm{A}_k) \to 0$ *quand* $k \to +\infty$, *ce qui donne le résultat souhaité.*

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \ge n_0,\ k \ge k_0 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,;\, |f_n(x)| \ge k\}) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$\{|f_n| \ge k\} \subset \{|f| \ge k-1\} \cup \{|f_n - f| \ge 1\},$$

et donc

$$m(\{|f_n| \ge k\} \le m(\{|f| \ge k-1\}) + m(\{|f_n - f| \ge 1\}).$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* f *est intégrable, il existe (comme à la question précédente)* k_0 *t.q.*

$$k \ge k_0 \Rightarrow m(\{|f| \ge k-1\}) \le \varepsilon.$$

Puis comme $f_n \to f$ *en mesure, il existe* n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| \ge 1\}) \le \varepsilon.$$

On a donc

$$k \ge k_0,\ n \ge n_0 \Rightarrow m(\{|f_n| \ge k\} \le 2\varepsilon.$$

Ce qui donne le résultat souhaité.

(c) Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra remarquer que $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$.]

Corrigé – *Soit* $\delta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$. *On remarque que*

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n(g_n - g)| \geq \frac{\delta}{2}\} \cup \{|g(f_n - f)| \geq \frac{\delta}{2}\}.$$

Pour tout $k > 0$, *on a donc*

$$\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\} \subset \{|f_n| \geq k\} \cup \{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\} \cup \{|g| \geq k\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}.$$

Grâce aux deux questions précédentes, il existe donc k_1, k_0 *et* n_0 *t.q. avec* $k = \max\{k_1, k_0\}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 2\varepsilon + m(\{|g_n - g| \geq \frac{\delta}{2k}\}) + m(\{|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2k}\}).$$

En utilisant les convergences en mesure de f_n *et* g_n, *on obtient alors l'existence de* n_1 *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow m(\{|f_n g_n - fg| \geq \delta\}) \leq 4\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n g_n \to fg$ *en mesure.*

(d) En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *On peut, par exemple, prendre* f *et* g *définies par* $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ *pour* $x \in]0,1[$ *et* $f(x) = g(x) = 0$ *si* $x \notin]0,1[$. *(Et on prend* $f_n = f$ *et* $g_n = g$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.*)*

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Corrigé – *On peut prendre, par exemple,*

$$f_n(x) = \frac{x}{n(x^2+1)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

$$g_n(x) = x^2 + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.14 (Sur l'inégalité de Markov) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \int_{\{|f|>a\}} |f| dm$.

Corrigé – *Comme* $|f| \in \mathcal{M}_+$, *la méthode pour faire les questions 1 et 2 a déjà été vue (voir l'inégalité (4.6)).*

Soit $a > 0$. *On remarque que* $|f| 1_{\{|f|>a\}} \geq a 1_{\{|f|>a\}}$. *Par monotonie de l'intégrale, on en déduit :*

$$am(\{|f| > a\}) = \int a 1_{\{|f|>a\}} dm \leq \int |f| 1_{\{|f|>a\}} dm = \int_{\{|f|>a\}} |f| dm.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\int |f| dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)

Corrigé – *Comme* $\int_{\{|f|>a\}} |f| dm \leq \int |f| dm$*, cette question découle immédiatement de la précédente.*

3. Montrer que

$$\lim_{a\to\infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.28}$$

Corrigé – *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $a_n \to +\infty$*, quand* $n \to +\infty$*. On pose*

$$g_n = |f| 1_{\{|f|>a_n\}}.$$

On a $g_n \to 0$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|g_n| \leq |f|$ *p.p.. Grâce au théorème de convergence dominée, on en déduit que* $\int g_n dm \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc, avec la question 1,* $a_n m(\{|f| > a_n\}) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*.*

4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.28) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

Corrigé – *Dans le cas* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*, il suffit de prendre* $f = 1_{\mathbb{R}}$*.*

Dans le cas $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$*, on peut prendre, par exemple,* f *définie par* $f(x) = \frac{1}{x|\ln(2x)|}$ *pour* $x \in]0, 1[$*. La fonction* f *est mesurable mais n'est pas intégrable. Pour* $a > 0$*, on a* $am(\{|f| > a\}) = ax_a$ *avec* $x_a > 0$ *t.q.* $x_a|\ln(2x_a)| = \frac{1}{a}$*. On a* $x_a \to 0$ *quand* $a \to \infty$ *et donc* $am(\{|f| > a\}) = ax_a = \frac{1}{|\ln(2x_a)|} \to 0$ *quand* $a \to \infty$*.*

Exercice 4.15 (Sur la positivité presque partout.) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que :

$$f \geq 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow \int_A f\, dm \geq 0 \text{ pour tout } A \in T.$$

Corrigé – *On suppose d'abord que* $f \geq 0$ *p.p.. Soit* $A \in T$*, on a alors* $f 1_A \geq 0$ *p.p. et donc, par monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 182),* $\int_A f dm = \int f 1_A dm \geq 0$*.*

En fait, pour être tout à fait précis, la proposition 4.26 est énoncée avec l'hypothèse "$f \geq g$*" et non seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Toutefois il est clair que cette proposition est aussi vraie avec seulement "*$f \geq g$ *p.p.". Il suffit de remarquer que, si* $f \geq g$ *p.p., il existe* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$ *et* $f \geq g$ *sur* B^c*. On a donc* $f 1_{B^c} \geq g 1_{B^c}$*. Si* $f, g \in \mathcal{L}^1$*, la proposition 4.26 donne alors* $\int f 1_{B^c} dm \geq \int g 1_{B^c} dm$*. On en déduit* $\int f dm \geq \int g dm$ *car* $\int f dm = \int f 1_{B^c} dm$ *et* $\int g dm = \int g 1_{B^c} dm$ *(voir la proposition 4.28 page 184).*

On suppose maintenant que $\int_A f\,dm \geq 0$ *pour tout* $A \in T$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on choisit* $A = A_n = \{f \leq -\frac{1}{n}\} = \{x \in E : f(x) \leq -\frac{1}{n}\}$, *de sorte que* $f 1_{A_n} \leq -\frac{1}{n} 1_{A_n}$. *La monotonie de l'intégrale sur* $\mathcal{L}^1$ *(proposition 4.26 page 182) donne alors*

$$\int f 1_{A_n} dm \leq -\frac{1}{n} m(A_n).$$

Comme $\int f 1_{A_n} dm \geq 0$ *par hypothèse, on a donc nécessairement* $m(A_n) = 0$.

Par σ*-sous additivité de* m, *on en déduit que* $m(\{f < 0\}) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{f \leq -\frac{1}{n}\}) = 0$, *et donc* $f \geq 0$ *p.p.*.

Exercice 4.16 (Intégrale sur des ensembles "petits" et "petitesse à l'infini")

Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [Introduire $f_n = \inf(|f|, n)$.]

   Corrigé – *On pose* $f_n = \inf(|f|, n)$. *Comme* $f_n \uparrow |f|$ *quand* $n \to +\infty$ *(c'est-à-dire que* f_n *tend vers* $|f|$ *simplement et en croissant), on peut appliquer le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Il donne*

   $$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int |f| dm$$

   et donc, comme $\int |f| dm < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \int (|f| - f_n) dm = 0$.

   Soit $\varepsilon > 0$, *il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\int (|f| - f_n) dm \leq \varepsilon$. *Pour* $A \in T$, *on a donc :*

   $$\begin{aligned}\int_A |f| dm &\leq \int_A (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \\ &\leq \int (|f| - f_n) dm + \int_A f_n dm \leq \varepsilon + n m(A).\end{aligned}$$

   En prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, *on en déduit :*

   $$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq 2\varepsilon.$$

2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

   $$\text{(i) } m(C) < +\infty, \qquad \text{(ii) } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon, \qquad \text{(iii) } \sup_C |f| < +\infty.$$

   [Considérer $C_n = \{x \in E ; \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, et montrer que pour $n \geq n_0$ où n_0 est bien choisi, C_n vérifie (i), (ii) et (iii).]

   Corrigé – *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $C_n = \{x \in E ; \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $|f| \leq n$ *sur* C_n *et* $\frac{1}{n} m(C_n) \leq \int |f| dm < \infty$. *Les conditions (i) et (iii) sont donc vérifiées si on prend* $C = C_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va maintenant montrer qu'on peut choisir n de manière à avoir aussi (ii). Pour cela, on pose g_n par $g_n = |f|1_{C_n}$, de sorte que $g_n \uparrow |f|$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne alors $\lim_{n\to+\infty}\int g_n dm = \int |f| dm$ et donc, comme à la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty}\int(|f|-g_n)dm = 0.$$

En remarquant que $\int(|f|-g_n)dm = \int_{C_n^c}|f|dm$, Il existe donc $n\in\mathbb{N}^*$ t.q. (ii) soit vérifiée. En prenant $C = C_n$, on a donc (i), (ii) et (iii).

Exercice 4.17 (Intégration par rapport à une mesure image) Cet exercice est une généralisation à un espace mesuré quelconque du théorème de la loi image (théorème 4.58) qui est restreint à un espace probabilisé. Soit (E, T, m) un espace mesuré, (F, S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. Pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_* m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).

Corrigé – *On remarque tout d'abord que μ est bien application de S dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et que $\mu(\emptyset) = 0$ (car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $m(\emptyset) = 0$).*

On montre maintenant la σ-additivité de μ. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S disjoints deux à deux. On pose $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On veut montrer que $\mu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$. La suite $(f^{-1}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de T, disjoints deux à deux. La σ-addivité de m donne alors

$$m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(B_n)).$$

Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = f^{-1}(B)$, on a donc

$$\mu(B) = m(f^{-1}(B)) = m(\cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Ceci prouve bien que μ est σ-additive et donc que μ est une mesure (sur S).

2. μ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?

Corrigé – *On a $\mu(F) = m(f^{-1}(F)) = m(E)$. La mesure μ est donc finie si la mesure m est finie,*

Par contre, si la mesure m est σ-finie, la mesure μ n'est pas nécessairement σ-finie. Un exemple simple est obtenu en prenant $E = F = \mathbb{R}$, $T = S = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $m = \lambda$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty \text{ si } 0 \in A, \\ 0 \text{ si } 0 \notin A. \end{cases}$$

La mesure m est bien σ-finie mais la mesure μ n'est pas σ-finie.

Le même exemple montre que m peut être diffuse sans que μ soit diffuse. En effet, dans l'exemple précédent, la mesure m est diffuse alors que $\mu(\{0\}) = +\infty > 0$.

3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas

$$\int_E \Phi \circ f \, dm = \int_F \Phi \, d\mu. \tag{4.29}$$

Corrigé – *On raisonne ici en commençant par considérer* $\Phi = 1_B$ *(avec* $B \in S$*) puis* $\Phi \in \mathcal{E}_+(F,S)$ *et* $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$.

Soit $B \in S$ *et* $\Phi = 1_B$. *On a alors*

$$\int_F \Phi d\mu = \mu(B) = m(f^{-1}(B)) = \int_E 1_{f^{-1}(B)} dm$$
$$= \int_E 1_B(f(x)) dm(x) = \int_E \Phi \circ f dm. \tag{4.30}$$

On suppose maintenant que $\Phi \in \mathcal{E}_+(F,S)$. *Il existe donc* $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}_+$ *et* $A_1, \ldots, A_p \in S$ *t.q.* $\Phi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_i$ *avec* $\Phi_i = 1_{A_i}$. *Par linéarité positive de* μ *et m, on en déduit, avec* (4.30)*,*

$$\int_F \Phi d\mu = \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_F \phi_i d\mu = \sum_{i=1}^p \alpha_i \int_E \phi_i \circ f dm$$
$$= \int_E \sum_{i=1}^p \alpha_i \Phi_i \circ f dm = \int_E \Phi \circ f dm.$$

On peut maintenant considérer le cas $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$. *Il existe alors une suite* $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+(F,S)$ *t.q.* $\Phi_n \uparrow \Phi$. *Comme* $\int_F \phi_n d\mu = \int_E \phi_n \circ f dm$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le théorème de convergence monotone (ou simplement la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*) donne alors* $\int_F \phi d\mu = \int_E \phi \circ f dm$. *L'égalité* (4.29) *est donc vraie pour tout* $\Phi \in \mathcal{M}_+(F,S)$.

Enfin, soit Φ *mesurable de* F *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $\Phi \in \mathcal{M}(F,S)$*). En utilisant* (4.29) *avec* Φ^+ *et* Φ^- *(et en notant que* $(\Phi \circ f)^+ = \Phi^+ \circ f$ *et* $(\Phi \circ f)^- = \Phi^- \circ f$*) on obtient que* Φ *est* μ*-intégrable si et seulement si* $\Phi \circ f$ *est m-intégrable et que, si* Φ *est* μ*-intégrable,* (4.29) *est vraie.*

Exercice 4.18 (m–mesurabilité) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On suppose d'abord qu'il existe g mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Il existe donc* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$ *et* $f = g$ *sur* B^c *(et* $B^c \subset A^c$, *i.e.* $A \subset B$*).*

Comme $g \in \mathcal{M}$, *la deuxième caractérisation de la mesurabilité (proposition 3.20 page 125) donne l'existence d'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *t.q.* $f_n(x) \to g(x)$ *pour tout* $x \in E$. *On a donc aussi* $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in B^c$. *Comme* $m(B) = 0$, *on a bien* $f_n \to f$ *p.p..*

On suppose maintenant qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p.. Il existe donc* $B \in T$ *t.q.* $m(B) = 0$ *et* $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in B^c$ *(on a donc aussi* $B^c \subset A^c$*). On pose* $g_n = f_n 1_{B^c}$ *et on définit* g *par* $g(x) = f(x)$ *si* $x \in B^c$ *et* $g(x) = 0$ *si* $x \in B$. *Avec ces choix de* g_n *et* g, *on a* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ *et* $g_n(x) \to g(x)$ *pour tout* $x \in E$. *On a donc, par la proposition 3.20,* $g \in \mathcal{M}$. *On a aussi* $f = g$ *p.p. car* $f = g$ *sur* B^c *et* $m(B) = 0$.

Exercice 4.19 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.33) On reprend les notations de l'exercice 2.33 page 108. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).

Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Corrigé – *1. On commence par montrer que* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$.

Comme $T \subset \overline{T}$, *on a* $\mathcal{M}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, \overline{T})$, $\mathcal{M}_+(E, T) \subset \mathcal{M}_+(E, \overline{T})$, $\mathcal{E}(E, T) \subset \mathcal{E}(E, \overline{T})$ *et* $\mathcal{E}_+(E, T) \subset \mathcal{E}_+(E, \overline{T})$. *Puis, comme* $\overline{m} = m$ *sur* T, *on a* $\int f dm = \int f d\overline{m}$ *pour tout* $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. *Si* $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$, *il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+(E, T)$ *t.q.* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$, *la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$ *donne alors :*

$$\int f dm = \int f d\overline{m}, \text{ pour tout } f \in \mathcal{M}_+(E, T). \tag{4.31}$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, *on a donc* $f \in \mathcal{M}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, \overline{T})$ *et (4.31) donne* $\int |f| d\overline{m} = \int |f| dm < \infty$. *Donc,* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. *En appliquant (4.31) à* $f^{\pm}$, *on montre aussi que* $\int f dm = \int f d\overline{m}$.

2. On va montrer la deuxième partie de la question en raisonnant en trois étapes :

(a) Soit $C \in \overline{T}$. *Il existe donc* $A \in T$, $N \in \mathcal{N}_m$ *t.q.* $C = A \cup N$. *Il existe* $B \in T$ *t.q.* $N \subset B$ *et* $m(B) = 0$. *On a* $\{1_A \neq 1_C\} \subset N \subset B$. *Donc,* $\{1_A \neq 1_C\} \in \mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, *c'est-à-dire* $1_A = 1_C$ *m-p.p. et* $\overline{m}$*-p.p.. En fait, comme* $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{\overline{m}}$, *il est identique de dire "m-p.p." et "*$\overline{m}$*-p.p.", on dira donc simplement "p.p.".*

(b) Soit $f \in \mathcal{E}(E, \overline{T})$. *Il existe* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *et* $C_1, \ldots, C_n \in \overline{T}$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{C_i}$. *D'après (a), on trouve* $A_1, \ldots, A_n \in T$ *t.q.* $1_{A_i} = 1_{C_i}$ *p.p., pour tout* i. *On pose alors* $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, *de sorte que* $g \in \mathcal{E}(E, T)$ *et* $g = f$ *p.p..*

(c) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. *Comme* $f \in \mathcal{M}(E, \overline{T})$, *il existe (d'après la proposition 3.20)* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E, \overline{T})$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in E$. *D'après (b), pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $g_n \in \mathcal{E}(E, T)$ *t.q.* $f_n = g_n$ *p.p.. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe* $A_n \in T$ *t.q.* $m(A_n) = 0$ *et* $f_n = g_n$ *sur* A_n^c. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *On a* $A \in T$, $m(A) = 0$ *et* $f_n = g_n$ *sur* A^c, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On définit alors* g *par* $g = f$ *sur* A^c *et* $g = 0$ *sur* A. *On a* $g \in \mathcal{M}(E, T)$ *car* g *est limite simple de* $(g_n 1_{A^c}) \in \mathcal{E}(E, T)$ *(cf. proposition 3.20) et* $f = g$ *p.p. (car* $f = g$ *sur* A^c*).*

Comme $|f|, |g| \in \mathcal{M}_+(E, \overline{T})$ *et* $|f| = |g|$ *p.p., on a* $\infty > \int |f| d\overline{m} = \int |g| d\overline{m}$. *Puis, comme* $|g| \in \mathcal{M}_+(E, T)$, *(4.31) donne* $\int |g| d\overline{m} = \int |g| dm$. *On en déduit donc que* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Enfin, en utilisant le fait que $f^+ = g^+$ p.p., $f^- = g^-$ p.p. et (4.31) (avec g^+ et g^-) on a aussi :

$$\int f d\overline{m} = \int f^+ d\overline{m} - \int f^- d\overline{m} = \int g^+ d\overline{m} - \int g^- d\overline{m}$$
$$= \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

On a bien trouvé $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et $\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Exercice 4.20 (Petit lemme d'intégration) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}_n) \to 0 \ \Rightarrow \int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0. \tag{4.32}$$

Corrigé – *Comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, la question 1 de l'exercice 4.16 page 218 donne : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ t.q. $(\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \le \eta) \Rightarrow \int f 1_{\mathrm{A}} dm \le \varepsilon$. Ceci donne (4.32)...*

2. On prend (dans cette question) $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$, $f \ge 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$) et (4.32) est faux.

Corrigé – *On prend $f(x) = x 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $\mathrm{A}_n =]n, n + 1/n[$. On a $m(\mathrm{A}_n) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) et $\int f 1_{\mathrm{A}_n} d\lambda \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, $\int f 1_{\mathrm{A}_n} d\lambda \not\to 0$.*

3. On suppose (dans cette question) que $m(\mathrm{E}) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). Montrer que

$$(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T},\ \int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0 \ \Rightarrow m(\mathrm{A}_n) \to 0. \tag{4.33}$$

[On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in \mathrm{A}_n; f(x) \ge \frac{1}{p}\}$.]

Corrigé – *On a $\{f < \frac{1}{p+1}\} \subset \{f < \frac{1}{p}\}$, $\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\{f < \frac{1}{p}\} = \emptyset$ et $m(\{f < \frac{1}{p}\}) < \infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ (car $m(\mathrm{E}) < \infty$). La propriété de continuité décroissante de la mesure m donne alors que $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \to 0$ quand $p \to \infty$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ t.q. $m(\{f < \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon$. On a alors $m(\mathrm{A}_n) \le \varepsilon + m(\{x \in \mathrm{A}_n; f(x) \ge \frac{1}{p}\}) \le \varepsilon + p \int f 1_{\mathrm{A}_n} dm$. Comme $\int f 1_{\mathrm{A}_n} dm \to 0$, il existe donc n_0 t.q. $m(\mathrm{A}_n) \le 2\varepsilon$ pour $n \ge n_0$, ce qui prouve (4.33).

4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = +\infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (4.33) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

Corrigé – *On prend $A_n =]n, n+1[$. En appliquant la proposition 4.29 page 185 (ou le théorème de convergence dominée) à la suite $(f 1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient que $\int f 1_{A_n} d\lambda \to 0$ (quand $n \to +\infty$). D'autre part $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$. La propriété (4.33) est donc fausse.*

On obtient un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ en prenant $f(x) = \exp(-|x|)$.

Exercice 4.21 (Fatou sans positivité) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to +\infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.

i. $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,

ii. $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$,

iii. $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé – *Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in A^c$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in (A_n)^c$. On pose $B = A \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$. On a $B \in T$, $m(B) = 0$, $f_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in B^c$ et $f_n(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in B^c$.*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n 1_{B^c} + h 1_B$ et $g = f 1_{B^c} + h 1_B$. On a bien $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et les 3 conditions demandées sont vérifiées.

(b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *On applique le lemme de Fatou à la suite $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ (noter aussi que $(h - g) \in \mathcal{M}_+$).*
On obtient $\int (h - g) dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int (g_n - g) dm \leq C - \int g dm < \infty$.
On en déduit que $(h - g) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et donc $h = h - g + g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

Corrigé – *On prend $f_n = 1_{[1/n, n+1/n]} - n^2 1_{[0,1/n[}$ et $h = 1_{\mathbb{R}_+}$. On a $f_n \to h$ p.p., $\int f_n dm = 0$ et $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.*

Exercice 4.22 (Application du théorème de convergence monotone)

Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   Corrigé – *La fonction $x \mapsto e^{nx}$ est continue donc mesurable (de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, tous deux munis de la tribu borélienne). La fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ est donc mesurable comme produit de fonctions mesurables.*

   On remarque ensuite que $\int |e^{nx}f(x)|d\lambda(x) \le e^{n\mathrm{T}}\|f\|_1 < \infty$. On en déduit que la fonction $x \mapsto e^{nx}f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.

   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \ge 0$ p.p. et qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]

   Corrigé – *On pose $\mathrm{A} = \{f > 0\} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) > 0\}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{A} \setminus \{0\}$. Comme f est mesurable, on a $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}([0,1])$.*

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = e^{nx}|f(x)|$ pour $x \in [0,1]$. On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec g définie par :

   $$\begin{aligned} &g(x) = \infty, \ \ si\ x \in \mathrm{B},\\ &g(x) = 0, \ \ si\ x \in]0,1] \setminus \mathrm{B},\\ &g(0) = |f(0)|. \end{aligned}$$

   Le théorème de convergence monotone donne que $g \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. Comme $g_n = e^{n\cdot} f$ p.p., on a $\int g_n dm = \int e^{nx}f(x)\,d\lambda(x) \le \mathrm{M}$ et donc, en passant à limite quand $n \to +\infty$, $\int g dm \le \mathrm{M}$.

   On a aussi $h_n \uparrow g$ avec $h_n = n1_{\mathrm{B}} + |f(0)|1_{\{0\}}$.

   La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors $\int g dm = \lim_{n\to+\infty} n\lambda(\mathrm{B})$ et donc $\int g dm = \infty$ si $\lambda(\mathrm{B}) > 0$. Comme $\int g dm \le \mathrm{M}$, on a donc $\lambda(\mathrm{B}) = 0$ et donc aussi $\lambda(\mathrm{A}) = 0$, ce qui donne $f = 0$ p.p..

3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

   Corrigé – *On pose toujours $\mathrm{A} = \{f > 0\} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) > 0\}$. Comme f est continue, l'ensemble A est un ouvert de $[0,1]$. Si $\mathrm{A} \ne \emptyset$, il existe un intervalle ouvert non vide inclus dans A et donc $\lambda(\mathrm{A}) > 0$ en contradiction avec le résultat de la question précédente qui donne $\lambda(\mathrm{A}) = 0$. On a donc $\mathrm{A} = \emptyset$, c'est-à-dire $f = 0$ sur tout $[0,1]$.*

Exercice 4.23 (Distance associée à la convergence en mesure) Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré fini. On pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f,g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}dm.$$

1. Montrer que d est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ pour tout $f, g \in \mathcal{M}$) et que d est une semi–distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f, g, h \in \mathcal{M}$).
2. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} d(f_n, f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 4.24 (Lemme de Fatou et convergence en mesure)

Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$). On suppose que f_n tend vers f en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < 1/2^k$ pour tout $n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (la fonction φ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Corrigé – *Selon la définition de la convergence en mesure, définition 3.40, on a* $\lim_{n\to+\infty} m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$. *On en déduit l'existence de* n_k.
Il suffit, par exemple, de prendre $\varphi(0) = n_0$, *puis, pour tout* $k > 1$, $\varphi(k) = \max\{n_k, \varphi(k-1)+1\}$. *La fonction* φ *est strictement croissante et*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$, $\mathrm{A}_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $\mathrm{B}_n = \cup_{p=n}^{\infty} \mathrm{A}_p$.

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$.

Corrigé – *Par* σ*-sous additivité de m, on a*

$$m(\mathrm{B}_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} m(\mathrm{A}_p) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

car la première question donne que $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}_n) < +\infty$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

$$\int_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq \int_{\mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2 \int |g_n| dm. \tag{4.34}$$

Corrigé – *Soit* $x \in \{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap A_n^c$. *Comme* $x \in A_n^c$, *on a* $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *et donc* $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. *Comme* $|f(x)| \geq 2\varepsilon$ *on a donc* $|g_n(x)| > \varepsilon$. *On en déduit que*

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq 2|g_n(x)|.$$

On a bien montré que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$.

Comme $A_n \subset B_n$, *on a* $B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\} \subset A_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$. *Cette inclusion donne la première inégalité de* (4.34). *Puis comme* $|f| \leq 2|g_n|$ *sur* $A_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}$, *on obtient la seconde inégalité de* (4.34).

2. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| dm \leq M$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\int_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2M. \tag{4.35}$$

[On pourra noter que $\int |g_n| dm \leq M$, utiliser (4.34) et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *En reprenant les ensembles* B_n *de la question précédente on a*

$$\int |f| 1_{B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2 \int |g_n| dm \leq 2M.$$

La suite d'ensembles $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante. La suite* $(B_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ *est donc croissante. On pose* $B = \cap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, *de sorte que* $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n^c = B^c$. *La suite de fonctions* $(|f| 1_{B_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}})_{n \in \mathbb{N}}$ *converge donc (simplement) en croissant vers* $|f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}}$. *Le théorème de convergence monotone donne alors que*

$$\int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2M.$$

On utilise maintenant la continuité décroissante de m et la question 1(b). On obtient que $m(B) = \lim_{n \to +\infty} m(B_n) = 0$. *On en déduit que*

$$\int |f| 1_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm = \int |f| 1_{B^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} dm \leq 2M.$$

(b) Montrer que

$$\int |f| dm \leq 2M. \tag{4.36}$$

[On pourra utiliser (4.35) avec $\varepsilon = 1/n$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *la question précédente donne*

$$\int |f| 1_{\{|f| \geq \frac{2}{n}\}} dm \leq 2M.$$

Quand $n \to +\infty$, $|f| 1_{\{|f| \geq \frac{2}{n}\}} \uparrow |f|$. *On peut encore appliquer le théorème de convergence monotone, il donne* (4.36).

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (4.36) reste vrai avec αM au lieu de $2M$ dès que $\alpha > 1$.

En déduire que (4.36) reste vrai avec M au lieu de 2M.

Corrigé – *Soit $\eta > 0$. A la question 1(c), on remplace l'ensemble $\{|f| \geq 2\varepsilon\}$ par $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}$.*
Soit $x \in \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c$. Comme $x \in A_n^c$, on a $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ et donc $|g_n(x)| > |f(x)| - \varepsilon$. Comme $|f(x)| \geq (1+\eta)\varepsilon$ on a donc $|g_n(x)| > \eta\varepsilon$. On en déduit que

$$|f(x)| \leq |f(x) - g_n(x)| + |g_n(x)| \leq \varepsilon + |g_n(x)| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n(x)|.$$

On a donc $\{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\} \cap A_n^c \subset \{|f| \leq \frac{\eta+1}{\eta}|g_n|\}$.
On obtient ainsi, au lieu de (4.34),

$$\int_{B_n^c \cap \{|f| \geq (1+\eta)\varepsilon\}} |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta} \int |g_n| dm.$$

On reprend alors les questions 2(a) et 2(b) en appliquant toujours le théorème de convergence montone. On obtient $\int |f| dm \leq \frac{\eta+1}{\eta}M$.
Si $\alpha > 1$, il est possible de choisir $\eta > 0$ pour que $(\eta+1)/\eta = \alpha$. On obtient donc $\int |f| dm \leq \alpha M$. Enfin, comme α est arbitrairement proche de 1, on en déduit bien que $\int |f| dm \leq M$.

NB. Une autre méthode pour démontrer (4.36) (avec M au lieu de 2M) consiste à remarquer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de f_n vers f, exercice 3.29). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.

Exercice 4.25 (Convergence p.p. et convergence vague)

On note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \cup_{i=0}^{n-1}]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}[$ et on définit la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n = n^2 1_{B_n}$.

1. Montrer que $f_n \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n\|_1 = 1$.

Corrigé – *L'ensemble B_n est un borélien et donc f_n est borélienne positive. on a ensuite, par σ- additivité de λ,*

$$\int f_n d\lambda = n^2 \lambda(B_n) = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}[) = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1.$$

On a donc $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n\|_1 = 1$ (ce qui est équivalent à dire $\lambda(B_n) = n^2$).

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $C_p = \cup_{q=p}^{+\infty} B_q$. Soit $x \in C_p^c$. Montrer que $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – $C_p^c = \cap_{q=p}^{+\infty} B_q^c$. *Pour tout $q > p$, on a donc $x \in B_q^c$ et donc $f_q(x) = 0$. On en déduit bien que $\lim_{q\to+\infty} f_q(x) = 0$.*

3. Montrer que $f_n \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Avec les notations de la question précédente, on a* $\lim_{n\to+\infty} f_q(x) = 0$ *pour tout* $x \in \cup_{p\in\mathbb{N}^*} C_p^c$*, c'est-à-dire pour tout* $x \in C^c$ *avec* $C = \cap_{p\in\mathbb{N}^*} C_p$*. Pour en déduire que* $f_n \to 0$ *p.p., il suffit de montrer que* $\lambda(C) = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$*. En utilisant la monotonie et la* σ*-sous-additivité de* λ*, on a*

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_p) \leq \sum_{q=p}^{+\infty} \lambda(B_q) \leq \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^2}.$$

Comme $\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \to 0$ *quand* $p \to +\infty$*, on en déduit* $\lambda(C) = 0$ *et donc* $f_n \to 0$ *p.p..*

4. Soit $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int f_n\varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} (\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n}))dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En déduire que $\displaystyle\int f_n\varphi d\lambda \to \int_0^1 \varphi(x)dx$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int f_n\varphi d\lambda = n^2 \int_{B_n} \varphi d\lambda = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} \varphi(x)dx,$$

et

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2\varphi(\frac{i}{n}) \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} dx.$$

On en déduit bien que $\int f_n\varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} (\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n}))dx.$
On pose maintenant $\delta_n = \max\{|\varphi(x) - \varphi(y)|, x, y \in [0,1], |x - y| \leq 1/n\}$*, de sorte que* $|\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})| \leq \delta_n$ *si* $i/n \leq x \leq i/n + 1/n^3$*. On a donc*

$$|\int f_n\varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} n^2 \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} |\varphi(x) - \varphi(\frac{i}{n})|dx \leq \delta_n.$$

Comme $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, la fonction* φ *est uniformément continue sur* $[0,1]$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$*. Ceci donne bien*

$$\lim_{n\to+\infty} |\int f_n\varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n})| = 0.$$

Comme φ *est continue sur* $[0,1]$*, il est bien connu que* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi(\frac{i}{n}) = \int_0^1 \varphi(x)dx$ *(voir le Chapitre 1). On a donc* $\lim_{n\to+\infty} \int f_n\varphi d\lambda = \int_0^1 \varphi(x)dx$.

5. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Corrigé – *Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*. En effet, on a* $f_n \to 0$ *p.p.. Si le théorème de convergence dominée pouvait être appliqué à la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*, il donnerait, en particulier,* $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = 0$*, ce qui est faux.*

4.11.2 L'espace L^1

Exercice 4.26 (Mesure de densité) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = \int_A f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.

Corrigé – *On rappelle que, par définition, pour tout* $A \in T$, *on a* $\int_A f dm = \int f 1_A dm$ *avec* $f 1_A = 0$ *sur* A^c *et* $f 1_A = f$ *sur* A *(on a bien* $f 1_A \in \mathcal{M}_+$ *et donc* $\int_A f dm$ *est bien définie).*

On montre maintenant que μ *est une mesure.*

Il est clair que $\mu(\emptyset) = 0$ *car* $f 1_A = 0$ *(sur tout* E*) si* $A = \emptyset$. *Pour montrer que* μ *est un mesure, il reste à montrer que* μ *est* σ*-additive.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *t.q.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *et on remarque que* $1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x)$ *pour tout* $x \in E$ *et donc* $f 1_A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f 1_{A_n}(x)$ *pour tout* $x \in E$. *Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors*

$$\int f 1_A dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f 1_{A_n} dm,$$

c'est-à-dire $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. *Ceci prouve que* μ *est* σ*-additive et donc que* μ *est une mesure.*

2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$ si et seulement si $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

Corrigé – *On raisonne en trois étapes :*

(a) Soit $g \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. *Il existe donc* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $A_1, \ldots, A_p \in T$ *t.q.* $g = \sum_{i=1}^p a_i 1_{A_i}$. *On a alors (en posant* $fg(x) = 0$ *si* $f(x) = \infty$ *et* $g(x) = 0$*)* $fg = \sum_{i=1}^p a_i f 1_{A_i} \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int fg dm = \sum_{i=1}^p a_i \int f 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^p a_i \mu(A_i) = \int g d\mu.$$

(Ce qui, bien sûr, est aussi vrai pour $g = 0$.*)*

(b) Soit $g \in \mathcal{M}_+$. *Il existe alors* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $g_n \uparrow g$. *L'item précédent donne que* $\int f g_n dm = \int g_n d\mu$. *Avec le théorème de convergence monotone (pour* μ *et pour* m, *puisque* $f g_n \uparrow fg$ *en posant toujours* $fg(x) = 0$ *si* $f(x) = \infty$ *et* $g(x) = 0$*), on en déduit que* $fg \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int fg dm = \int g d\mu. \tag{4.37}$$

(c) Soit maintenant $g \in \mathcal{M}$. *En appliquant (4.37) à* $|g| \in \mathcal{M}_+$, *on a :*

$$\int |fg| dm = \int f|g| dm = \int |g| d\mu,$$

et donc :

$$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu).$$

En fait, on peut ne pas avoir $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *car* fg *peut prendre les valeurs* $\pm\infty$. *L'assertion "*$fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$*" est à prendre, comme d'habitude, au sens "il existe* $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $fg = h$ *p.p.". Ceci est vérifié car si* $\int |fg| dm < \infty$*, on a* $|fg| < \infty$ *p.p.. Il suffit alors de changer* fg *sur un ensemble de mesure nulle pour avoir une fonction mesurable prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,\mu)$*, en écrivant (4.37) avec* g^+ *et* g^- *(qui sont bien des éléments de* $\mathcal{M}_+$*) et en faisant la différence on obtient bien que* $\int fg dm = \int g d\mu$.

Exercice 4.27 (Suite bornée convergeant dans L^1) Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f_n| \leq C$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *Comme la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*, elle contient une sous-suite qui converge p.p.. c'est-à-dire qu'il existe application* φ *strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *t.q.* $f_{\varphi(n)} \to f$ *p.p.. Comme, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq C$ *p.p., on en déduit que* $|f| \leq C$ *p.p..*

Pour conclure, on remarque maintenant que

$$0 \leq \int |f_n - f|^2 dm \leq \int (|f_n| + |f|)|f_n - f| dm \leq 2C \int |f_n - f| dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 4.28 (Comparaison de convergence dans L^1) On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $L^1(\mu) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.29 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)

Soient (E,T,m) un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$ (plus précisément : il existe des représentants des f_n, encore notés f_n, t.q. f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in L^1$ (plus précisément : existe-t-il $F \in L^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in F$) ? [Distinguer les cas $m(E) < +\infty$ et $m(E) = +\infty$.]

2. Si $f \in L^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.30 (Convergence dans L^1 de fonctions positives) Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f \in L^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [On pourra examiner la suite $(f - f_n)^+$.]

Corrigé – *On pose $h_n = (f - f_n)^+$. On a donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h_n \to 0$ p.p.. De plus, comme $f_n \geq 0$ p.p., on a $0 \leq h_n \leq f^+$ p.p.. En effet, soit $x \in E$ t.q. $h_n(x) \neq 0$. On a alors, si $f_n(x) \geq 0$ (ce qui est vrai pour presque tout x), $0 < h_n(x) = f(x) - f_n(x) \leq f(x) = f^+(x)$.*

Comme $f^+ \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il donne que $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire

$$\int (f - f_n)^+ dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.38}$$

On remarque ensuite que

$$\int (f - f_n)^- dm = \int (f - f_n)^+ dm - \int (f - f_n) dm,$$

et donc, comme $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$,

$$\int (f - f_n)^- dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.39}$$

De (4.38) et (4.39), on déduit

$$\int |f - f_n| dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

c'est-à-dire $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.31 (Exemple de convergence)

On pose $(E, T, m) = ([-1, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n 1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?
4. Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.32 (Théorème de Beppo-Lévi)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, tels que

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, que l'on note encore f_n.*

L'hypothèse (i) donne qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}^c$.

L'hypothèse (ii) donne que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$est monotone. On suppose que cette suite est monotone croissante (le cas monotone décroissante est similaire). Il existe alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}_n) = 0$ et $f_{n+1} \geq f_n$ sur A_n^c.

On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n)$. On a donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$. Puis on pose $g_n = f_n 1_{\mathrm{B}^c}$ et on définit g par $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathrm{B}^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathrm{B}$. On a bien $f = g$ p.p., $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$, $f_n = g_n$ p.p. et $g_{n+1} \geq g_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Enfin $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et $g \in \mathcal{M}$ car g est limite simple d'éléments de $\mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19 sur la stabilité de $\mathcal{M}$).

On remarque aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont deux représentants du même élément de $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $\int f_n dm = \int g_n dm$.

2. Montrer que $f \in \mathrm{L}^1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *On reprend la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction g construites à la question précédente et on distingue maintenant les 2 cas de l'hypothèse (ii).*

Cas 1 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée monotone croissante.

Dans ce cas, on a $(g_n - g_0) \uparrow (g - g_0)$ quand $n \to +\infty$ et, comme $(g_n - g_0) \in \mathcal{M}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans $\mathcal{M}_+$ (théorème 4.16). Il donne ($(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$ et)

$$\int (g_n - g_0) dm \to \int (g - g_0) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.40}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ et que $\int |g - g_0| dm = \int (g - g_0) dm$ car $(g - g_0) \in \mathcal{M}_+$. La propriété (4.40) donne alors que $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ si et seulement si la limite de la suite (croissante) $(\int (g_n - g_0) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire différente de ∞).

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on a* $\int (g_n - g_0) dm = \int g_n dm - \int g_0 dm$ *et donc* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement si la limite de la suite (croissante)* $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$*.*

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ *et que* $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on a* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et finalement on obtient bien que* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement la limite de la suite (croissante)* $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$*.*

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f = g$ *p.p.. Plus précisément :*

- *Si la limite de la suite (croissante)* $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$*, on obtient que* $g \in \mathcal{L}^1$*) et donc que* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. (on confond donc* f *et la classe de* g*, c'est-à-dire* $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)\,;\, h = g \text{ p.p.}\}$*).*
- *Réciproquement, si* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, cela signifie qu'il existe* $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = h$ *p.p. (on a donc confondu* f *et la classe de* h*). Comme* $f = g$ *p.p., on a aussi* $h = g$ *p.p.. Comme* $g \in \mathcal{M}$*, on obtient donc que* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et donc* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *ce qui donne, par (4.40), que la limite de la suite (croissante)* $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$*.*

Cas 2 : La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est supposée monotone décroissante.*

La démonstration est très voisine de la précécente. On remarque que $(g_0 - g_n) \uparrow (g_0 - g)$ *quand* $n \to +\infty$ *et, comme* $(g_0 - g_n) \in \mathcal{M}_+$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on peut utiliser le théorème de convergence monotone dans* $\mathcal{M}_+$ *(théorème 4.16). Il donne (*$(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$ *et)*

$$\int (g_0 - g_n) dm \to \int (g_0 - g) dm \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.41}$$

On sait déjà que $(g - g_0) \in \mathcal{M}$ *et que* $\int |g - g_0| dm = \int (g_0 - g) dm$ *car* $(g_0 - g) \in \mathcal{M}_+$*. La propriété (4.41) donne alors que* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement si la limite de la suite (croissante)* $(\int (g_0 - g_n) dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire différente de* ∞*).*

Comme $g_n, g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on a* $\int (g_0 - g_n) dm = \int g_0 dm - \int g_n dm$ *et donc* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement si la limite de la suite (décroissante)* $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire différente de* $-\infty$*).*

Enfin, comme $g = (g - g_0) + g_0$ *et que* $g_0 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, on a* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement* $(g - g_0) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *et finalement on obtient bien que* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si et seulement la limite de la suite (décroissante)* $(\int g_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dans* $\mathbb{R}$*.*

On conclut en remarquant que $\int f_n dm = \int g_n dm$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f = g$ *p.p., comme dans le premier cas.*

3. On suppose ici que $f \in \mathrm{L}^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *On utilise toujours la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et la fonction* g *construites à la première question.*

Comme $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *on a* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et la propriété (4.40) (ou la propriété (4.41)) donne* $\int g_n dm \to \int g dm$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc*

$$\int |g_n - g| dm \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

(On a utilisé ici le fait que $(g_n - g)$ *a un signe constant et que* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$*.)*

Comme $\|f_n - f\|_1 = \int |g_n - g| dm$*, on en déduit que* $f_n \to f$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$*, quand* $n \to +\infty$*.*

Exercice 4.33 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)

Soit (E,T,m) un espace mesuré et soit $f \in L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

[Choisir un représentant de f et introduire $f_n = \inf(|f|, n)$].

Corrigé – *En choisissant un représentant de* f*, cette question est démontrée à la question 1 de l'exercice 4.16.*

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.

[Choisir un représentant de f et considérer $C_n = \{x \in E;\ \dfrac{1}{n} \le |f(x)|\}$.]

Corrigé – *Ici aussi, en choisissant un représentant de* f*, cette question est démontrée dans l'exercice 4.16 (question 2).*

(Dans l'exercice 4.16, on choisit $C_n = \{1/n \le |f| \le n\}$ *car on souhaite avoir aussi, pour ce représentant,* $\sup_{C_n} |f| < +\infty$*.)*

Exercice 4.34 (Théorème de Vitali)

Soient (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi–intégrable *i.e.* : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon)$.

[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...]

Corrigé – **Sens($\Rightarrow$)** *Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'exercice 4.33 (première question), il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ t.q. :*

$$A \in T,\ m(A) \le \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon. \quad (4.42)$$

On ne peut pas déduire de (4.42) l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car on peut avoir $\inf_{n\in\mathbb{N}} \delta_n = 0$.

Comme $f \in L^1$, il existe aussi $\delta > 0$ t.q. :

$$A \in T,\ m(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon. \quad (4.43)$$

On va déduire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (4.42) et (4.43).

Soit $A \in T$, on a :

$$\int_A |f_n| dm \le \int_A |f_n - f| dm + \int_A |f| dm \le \int |f_n - f| dm + \int_A |f| dm. \quad (4.44)$$

Comme $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ si $n > n_0$. Pour $n > n_0$ et $m(A) \le \delta$, (4.44) et (4.43) donne donc $\int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon$. On choisit alors $\bar{\delta} = \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0}, \delta\} > 0$ et on obtient, avec aussi (4.42) (pour tout $n \le n_0$) :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \le \bar{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon.$$

Ce qui donne l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}, A \in T,\ m(A) \le \bar{\delta} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le 2\varepsilon. \quad (4.45)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit maintenant un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $f_n \to f$ p.p., il existe $B \in T$ t.q. $m(B) = 0$ et $f_n \to f$ sur B^c. En remplaçant f par $f 1_{B^c}$ (ce qui ne change f que sur un ensemble de mesure nulle, donc ne change pas les hypothèses du théorème), on a alors $f \in \mathcal{M}$ car f est limite simple de la suite $(f_n 1_{B^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ (noter que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$). Comme $m(E) < +\infty$, on peut utiliser le théorème d'Egorov (théorème 3.39) ; il donne l'existence de $A \in T$ t.q. $f_n \to f$ uniformément sur A^c, c'est-à-dire $\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi, pour ce choix de A,

$$\int_{A^c} |f_n - f| dm \le m(E) \sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Il existe donc $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q. $\int_{A^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$. Avec (4.45), on en déduit, pour tout $n \ge n_0(\varepsilon)$:

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm \le 2\varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Pour majorer le dernier terme de l'inégalité précédente, on utilise le lemme de Fatou sur la suite $(|f_n|1_A)_{n\in\mathbb{N}}$ *(qui est bien dans* $\mathcal{M}_+$*). Comme* $\liminf_{n\to+\infty}|f_n|1_A = |f|1_A$*, il donne avec (4.45),*

$$\int_A |f|dm \leq \liminf_{n\to+\infty}\int |f_n|1_A \leq \varepsilon.$$

On a donc, finalement,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \int |f_n - f|dm \leq 3\varepsilon. \tag{4.46}$$

En choisissant $n = n_0(1)$*, on déduit de (4.46) que* $f_n - f \in L^1$ *et donc que* $f = (f - f_n) + f_n \in L^1$*. Cette appartenance étant, comme d'habitude à prendre au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p. (en fait, ici, comme nous avons remplacé* f *par* $f1_{B^c}$ *ci-dessus, on a même* $f \in \mathcal{L}^1$*).*

Puis, (4.46) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$*, on a bien montré que* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*.*

2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$, $m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n|dm \leq \varepsilon$ pour tout n.

   [Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.33. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.33, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.]

Corrigé – **Sens ($\Rightarrow$)**

(a) *L'hypothèse* $m(E) < +\infty$ *n'a pas été utilisée à la question précédente. La même démonstration donne donc ici l'équi-intégrabilité de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) *On utilise maintenant la deuxième question de l'exercice 4.33.*

Soit $\varepsilon > 0$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $C_n \in T$ *t.q.* $m(C_n) < +\infty$ *et* $\int_{C_n^c} f_n dm \leq \varepsilon$*. Comme* $f \in L^1$*, il existe aussi* $D \in T$ *t.q.* $m(D) < +\infty$ *et* $\int_{D^c} f\, dm \leq \varepsilon$*. Enfin, comme* $f_n \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$*, il existe* n_0 *t.q.* $\|f_n - f\|_1 \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \geq n_0$*.*

On choisit maintenant $C = D \cup (\bigcup_{n=0}^{n_0} C_n)$*, de sorte que*

$$m(C) < m(D) + \sum_{n=0}^{n_0} m(C_n) < +\infty,$$

$C^c \subset D^c$ *et* $C^c \subset C_n^c$ *si* $n \leq n_0$*. Ce choix de* C *nous donne, pour tout* $n \geq n_0$*,*

$$\int_{C^c} |f_n|dm \leq \int_{D^c} |f|dm + \int |f_n - f|dm \leq 2\varepsilon,$$

et, pour tout $n \leq n_0$*,*

$$\int_{C^c} |f_n|dm \leq \int_{C_n^c} |f_n|dm \leq \varepsilon.$$

On a donc $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c} |f_n|dm \leq 2\varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Sens ($\Leftarrow$)

on veut montrer ici que $f \in \mathrm{L}^1$ *et* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. *La deuxième hypothèse donne l'existence de* $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{C}) < +\infty$ *et*

$$\int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm \le \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

Comme dans la question précédente, on peut supposer (en changeant éventuellement f *sur un ensemble de mesure nulle) que* $f \in \mathcal{M}$. *En appliquant le lemme de Fatou à la suite* $(|f_n| 1_{\mathrm{C}^c})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *on déduit de (4.47) que*

$$\int_{\mathrm{C}^c} |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.48}$$

La première hypothèse (c'est-à-dire l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*) donne l'existence de* $\delta > 0$ *t.q.*

$$n \in \mathbb{N}, \mathrm{A} \in \mathrm{T}, m(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm \le \varepsilon. \tag{4.49}$$

On peut maintenant utiliser le théorème d'Egorov sur la suite $(f_{n|_{\mathrm{C}}})_{n\in\mathbb{N}}$ *(qui converge p.p. vers* $f_{|_{\mathrm{C}}}$*) dans l'espace mesurable* $(\mathrm{C}, \mathrm{T_C})$ *où* $\mathrm{T_C}$ *est la tribu* $\{\mathrm{B} \in \mathrm{T}\,;\, \mathrm{B} \subset \mathrm{C}\}$. *Il donne l'existence de* $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}$, $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, *t.q.* $m(\mathrm{A}) \le \delta$ *et* $f_n \to f$ *uniformément sur* $\mathrm{A}^c \cap \mathrm{C}$. *On en déduit que*

$$\int_{\mathrm{A}^c\cap\mathrm{C}} |f_n - f| dm \le m(\mathrm{C}) \sup_{x\in\mathrm{A}^c\cap\mathrm{C}} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Il existe donc n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{\mathrm{A}^c\cap\mathrm{C}} |f_n - f| dm \le \varepsilon. \tag{4.50}$$

Enfin, en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n| 1_{\mathrm{A}})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *on déduit de (4.49) que*

$$\int_{\mathrm{A}} |f| dm \le \varepsilon. \tag{4.51}$$

Il suffit maintenant de remarquer que

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{\mathrm{A}^c\cap\mathrm{C}} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{A}} |f_n| dm + \int_{\mathrm{A}} |f| dm + \int_{\mathrm{C}^c} |f_n| dm + \int_{\mathrm{C}^c} |f| dm,$$

pour déduire de (4.50), (4.49), (4.51), (4.47) et (4.48) que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 5\varepsilon.$$

On conclut comme à la question précédente. En prenant d'abord $\varepsilon = 1$, *on montre que* $f \in \mathrm{L}^1$ *puis, comme* $\varepsilon > 0$ *est arbitraire, on montre que* $f_n \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$.

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$ *t.q.* $|f_n| \leq F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant l'exercice 4.33 sur F, *on montre facilement l'équi-intégrabilité de la suite* $(f_n)_n$ *et l'existence, pour tout* $\varepsilon > 0$, *de* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(noter que si* $m(E) < +\infty$ *cette propriété est immédiate en prenant* $C = E$*). Il est alors facile de montrer le théorème de convergence dominée à partir du théorème de Vitali.*

Exercice 4.35 (Théorème de "Vitali-mesure") Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < +\infty$. On se propose ici de montrer que $[f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty]$ si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$,

   p2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

   (a) Montrer le sens direct (c'est-à-dire que la convergence pour la norme de L^1 implique p1 et p2).

Corrigé – *On montre tout d'abord la convergence en mesure. Soit* $\eta > 0$. *On a alors :*

$$m(\{|f_n - f| \geq \eta\}) \leq \frac{1}{\eta} \int |f_n - f| dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ce qui donne que $f_n \to f$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$.

Pour montrer l'équi-intégrabilité, il suffit de remarquer que, pour tout $A \in T$, *on a :*

$$\int_A |f_n| dm \leq \int |f_n - f| dm + \int_A |f| dm.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $f \in \mathcal{L}^1$, *il existe (voir la proposition 4.50)* $\delta > 0$ *t.q.*

$$m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$

Comme $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *il existe* n_0 *t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f| dm \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$(n \geq n_0 \text{ et } m(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon. \tag{4.52}$$

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *il existe (voir la proposition 4.50)* $\delta_n > 0$ *t.q.*

$$m(A) \leq \delta_n \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{4.53}$$

En posant $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta_0, \ldots, \delta_n\}$ *on a donc, avec (4.52) et (4.53) :*

$$(n \in \mathbb{N} \text{ et } m(A) \leq \bar{\delta}) \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui montre l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Pour montrer la réciproque, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p,q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$.

Corrigé – *On remarque que, pour tout $p,q \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathrm{E}$, $|f_p - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ et $|f_q - f|(x) \leq \frac{\eta}{2}$ implique $|f_p - f_q|(x) \leq \eta$. On a donc $\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \subset \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\} \cup \{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}$, ce qui donne :*

$$m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) + \{|f_q - f| \geq \frac{\eta}{2}\}.$$

Comme $f_n \to f$ en mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$p \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f| \geq \frac{\eta}{2}\}) \leq \frac{\delta}{2},$$

on en déduit :

$$p,q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta.$$

ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

Corrigé – *Soit $p,q \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$, on a :*

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| dm + \eta m(\mathrm{E}). \tag{4.54}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$$(\mathrm{A} \in \mathrm{T},\, m(\mathrm{A}) \leq \delta \text{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |f_n| \leq \varepsilon. \tag{4.55}$$

On commence à choisir $\eta > 0$ t.q. $\eta m(\mathrm{E}) \leq \varepsilon$. Puis, la question précédente donne l'existence de n t.q. $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ si $p,q \geq n$. On a donc, par (4.55) :

$$\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon \text{ et } \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon \text{ si } p,q \geq n.$$

Finalement, (4.54) donne :

$$p,q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 3\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans L^1.

iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Comme L^1 est complet, il existe $g \in \mathrm{L}^1$ t.q. $f_n \to g$ dans L^1, quand $n \to +\infty$. On peut supposer $g \in \mathcal{L}^1$ (en confondant g avec l'un de ses représentants). La question (a) donne alors que $f_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$. Comme $f_n \to f$ en mesure, on a donc nécessairement $f = g$ p.p., ce qui donne bien $f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$.*

2. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si on a les propriétés suivantes :
   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$,
   p2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable,
   p3. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) < +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathrm{A}^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$.

Corrigé – ***Étape 1*** *On montre tout d'abord le sens direct.*

Les propriétés p1 et p2 ont déjà été démontrées dans la question 1-(a) (car l'hypothèse $m(\mathrm{E}) < +\infty$ *n'avait pas été utilisée).*

Pour démontrer la propriété p3, on utilise la proposition 4.50 du cours. Soit $\varepsilon > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *Il existe* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{B}_n) < +\infty$ *et*

$$\int_{\mathrm{B}_n^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \tag{4.56}$$

Il existe aussi $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{B}) < +\infty$ *et*

$$\int_{\mathrm{B}^c} |f| dm \leq \varepsilon. \tag{4.57}$$

En remarquant que

$$\int_{\mathrm{B}^c} |f_n| dm \leq \int |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{B}^c} |f| dm,$$

on obtient, en utilisant le fait que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *et (4.57), l'existence de* n_0 *t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_{\mathrm{B}^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

En prenant $\mathrm{A} = \mathrm{B} \cup (\bigcup_{p=0}^{n_0} \mathrm{B}_p)$, *on obtient alors (avec (4.56))* $m(\mathrm{A}) < +\infty$ *et :*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{\mathrm{A}^c} |f_n| dm \leq 2\varepsilon.$$

Étape 2 *On montre maintenant la réciproque.*

On reprend la même méthode que dans le cas $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

On remarque tout d'abord que pour tout $\delta > 0$ *et* $\eta > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *t.q. :* $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$. *La démonstration est la même que précédemment (l'hypothèse* $m(\mathrm{E}) < +\infty$ *n'avait pas été utilisée).*

On montre maintenant que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* L^1. *Soit* $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *et* $\eta > 0$, *on a :*

$$\|f_p - f_q\|_1 \leq \int_{\mathrm{A}^c} (|f_p| + |f_q|) dm + \int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} (|f_p| + |f_q|) dm + \eta m(\mathrm{A}). \tag{4.58}$$

Soit $\varepsilon > 0$. *D'après l'équi-intégrabilité de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$(\mathrm{B} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{B}) \leq \delta \textit{ et } n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \int_{\mathrm{B}} |f_n| \leq \varepsilon. \tag{4.59}$$

D'après la propriété p3, il existe $A \in T$ *t.q.* $m(A) < +\infty$ *et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon. \qquad (4.60)$$

On commence à choisir $\eta > 0$ *t.q.* $\eta m(A) \leq \varepsilon$. *Maintenant que* δ *et* η *sont fixés, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\}) \leq \delta$ *si* $p, q \geq n$. *On a donc, par (4.59),* $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_p| \leq \varepsilon$ *et* $\int_{\{|f_p - f_q| \geq \eta\}} |f_q| \leq \varepsilon$ *si* $p, q \geq n$. *Avec (4.58) et (4.60), on obtient alors :*

$$p, q \geq n \Rightarrow \|f_p - f_q\|_1 \leq 5\varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est donc de Cauchy dans* L^1.

On conclut, comme dans le cas $m(E) < +\infty$, *que* $f \in \mathcal{L}^1$ *et* $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *(car l'hypothèse* $m(E) < +\infty$ *n'avait pas été utilisée pour cette partie).*

Exercice 4.36 (Convergence en mesure dominée) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.
- Il existe g, fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}).$$

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $|f_n| \leq g$ *p.p., on a*

$$|f| - g \leq |f - f_n| + |f_n| - g \leq |f - f_n| \text{ p.p..}$$

A un ensemble de mesure près, on a donc $\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\})$ *inclus dans* $\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}$ *et donc*

$$m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}). \qquad (4.61)$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que f est intégrable.

Corrigé – *Comme* $f_n \to f$ *en mesure, on obtient, en passant à la limite dans (4.61) quand* $n \to +\infty$, *que* $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$.

Comme $\{|f| - g > 0\} = \cup_{p \in \mathbb{N}^*} \{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}$ *et* $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$ *pour tout p, on obtient (par σ-additivité de m ou par convergence croissante de m) que* $m(\{|f| - g > 0\}) = 0$ *et donc que* $|f| \leq g$ *p.p..*

Comme g est intégrable, on en déduit bien que f est intégrable (et $\int |f| dm \leq \int g dm$*).*

3. On suppose, dans cette question, que $m(\mathrm{E}) < +\infty$.

(a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f| dm \leq \eta m(\mathrm{E}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.$$

Corrigé – *Comme $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ p.p., on a*

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| dm &= \int_{\{|f_n - f| \leq \eta\}} |f_n - f| dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} |f_n - f| dm \\ &\leq \eta m(\{|f_n - f| \leq \eta\}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm \\ &\leq \eta m(\mathrm{E}) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.\end{aligned}$$

(b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

[On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} |h| dm \leq \varepsilon.]$$

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. D'après le rappel, il existe $\delta > 0$ t.q.*

$$\mathrm{A} \in \mathrm{T},\ m(\mathrm{A}) \leq \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} 2g dm \leq \varepsilon. \tag{4.62}$$

Pour majorer $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm$, on choisit d'abord $\eta > 0$ t.q. $\eta m(\mathrm{E}) \leq \varepsilon$. Puis, pour ce choix de η, la convergence en mesure de f_n vers f donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \eta\}) \leq \delta.$$

En utilisant l'inégalité montrée à la question 3(a), on obtient alors, grâce à (4.62),

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui montre bien que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

4. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

[On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |h| dm \leq \varepsilon$.]

Corrigé – *On remarque d'abord que pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$, tout $\eta > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| dm &\leq \int_{\mathrm{C} \cap \{|f_n - f| \leq \eta\}} |f_n - f| dm + \int_{\mathrm{C}^c} |f_n - f| dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} |f_n - f| dm \\ &\leq \eta m(\mathrm{C}) + \int_{\mathrm{C}^c} 2g dm + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Soit $\varepsilon > 0$. *D'après le rappel, il existe* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c} 2g dm \leq \varepsilon$. *On choisit donc un tel ensemble* C. *On choisit maintenant* $\eta > 0$ *t.q.* $\eta m(C) \leq \varepsilon$ *et on peut conclure comme à la question précédente, c'est-à-dire que la convergence en mesure de* f_n *vers* f *donne l'existence de* $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.*

$$n \geq n_0 \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \eta\}) \leq \delta,$$

avec δ *satisfaisant* (4.62). *En utilisant l'inégalité* (4.63), *on obtient alors*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm \leq 3\varepsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

Exercice 4.37 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$**)** Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $I = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.

(a) Soient p_1 et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle.
[On pourra introduire $A = \{x; |f(x)| \leq 1\}$.]

Corrigé – *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *On remarque que* $\alpha^p \leq \alpha^{p_2}$ *si* $1 \leq \alpha$ *et* $\alpha^p \leq \alpha^{p_1}$ *si* $\alpha \leq 1$. *On en déduit que* $|f|^p \leq |f|^{p_1} + |f|^{p_2}$ *(en fait, on a* $|f|^p \leq |f|^{p_1}$ *sur* $A = \{|f| \leq 1\}$ *et* $|f|^p \leq |f|^{p_2}$ *sur* A^c*) et donc que* $f \in \mathcal{L}^p$ *si* $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$.

On suppose que $I \neq \emptyset$. *On pose* $a = \inf I$ *et* $b = \sup I$. *On a donc* $1 \leq a \leq b \leq \infty$ *et* $I \subset [a, b]$. *On montre maintenant que* $]a, b[\subset I$ *(ce qui donne que* I *est bien un intervalle dont les bornes sont a et b).*

Soit $p \in]a, b[$. *La définition de a et b permet d'affirmer qu'il existe* $p_1 \in I$ *t.q.* $p_1 < p$ *et qu'il existe* $p_2 \in I$ *t.q.* $p_2 > p$. *On a donc* $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$ *et* $p \in]p_1, p_2[$, *d'où l'on déduit que* $p \in I$. *on a donc bien monté que* $]a, b[\subset I$ *et donc que* I *est un intervalle.*

(b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela : $(E, T, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants :

i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.

Corrigé – *i.* $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$. *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Pour savoir si* $f \in \mathcal{L}^p$ *ou non, on utilise le théorème de convergence monotone et l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle compact de* $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n = |f|^p 1_{[2,n]}$. *On a donc* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *et* $f_n \uparrow |f|^p$ *ce qui donne, grâce au théorème de convergence monotone,*

$$\int f_n d\lambda \to \int |f|^p d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Les intégrales ci-dessus sont des intégrales sur $[2, +\infty[$, *muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens. La comparaison entre l'intégrale des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue (voir les exercices 4.4 et 4.5) donne que*

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x^p} dx.$$

On distingue maintenant les cas $p = 1$ *et* $p > 1$.

- *Si* $p > 1$, *on a*

$$\int f_n d\lambda = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right) \to \frac{1}{p-1}\frac{1}{2^{p-1}} < \infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

On a donc $f \in \mathcal{L}^p$.

- *Si* $p = 1$, *on a*

$$\int f_n d\lambda = \ln(n) - \ln(2) \to \infty \text{ quand } n \to +\infty.$$

On a donc $f \notin \mathcal{L}^1$.

On a donc $\mathrm{I} =]1, \infty[$.

ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$. *Pour* $1 < p < \infty$, *on a clairement* $f \in \mathcal{L}^p$ *car la fonction* f *est positive et majorée par* $\frac{1}{\ln(2)^2} g$ *où* g *est la fonction de l'exemple précédent, c'est-à-dire* $g(x) = \frac{1}{x}$. *Pour* $p = 1$, *on utilise la même méthode que pour l'exemple précédent :*

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $f_n = |f| 1_{[2,n]}$, *de sorte que* $f_n \uparrow |f| = f$ *et donc*

$$\int f_n d\lambda \to \int |f| d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

On a ici, quand $n \to +\infty$,

$$\int f_n d\lambda = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \ln(2)^{-1} - \ln(n)^{-1} \to \ln(2)^{-1} < \infty.$$

On en déduit que $f \in \mathcal{L}^1$, *donc* $\mathrm{I} = [1, \infty[$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ et $p \in \bar{\mathrm{I}}$, ($\bar{\mathrm{I}}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$.

[On pourra encore utiliser l'ensemble A.]

Corrigé – *On utilise ici* $\mathrm{A} = \{|f| \leq 1\} \in \mathrm{T}$.

(a) On suppose d'abord que $p_n \uparrow p$ *quand* $n \to +\infty$. *On pose* $g_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}}$ *et* $h_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}^c}$, *de sorte que* $g_n \in \mathcal{L}^1$, $h_n \in \mathcal{L}^1$ *et*

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

On remarque alors que $h_n \uparrow h = |f|^p 1_{\mathrm{A}^c}$, *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$, *le théorème de convergence monotone donne*

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.64}$$

Noter que ceci est vrai même si $p \notin \mathrm{I}$ *(dans ce cas, on a, en fait,* $\int h dm = \infty$*).*

On remarque maintenant que $g_n \to g = |f|^p 1_{\mathrm{A}}$ *p.p., quand* $n \to +\infty$*, et que* $0 \leq g_n \leq |f|^{p_0}$ *car la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est ici décroissante. Comme* $p_0 \in \mathrm{I}$*, on a* $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ *et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.29). Il donne*

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.65}$$

Avec (4.64) et (4.65) on obtient, quand $n \to +\infty$*,*

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm,$$

(b) *On suppose maintenant que* $p_n \downarrow p$ *quand* $n \to +\infty$ *et on reprend la même méthode que ci-dessus. On pose* $g_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}}$ *et* $h_n = |f|^{p_n} 1_{\mathrm{A}^c}$*, de sorte que* $g_n \in \mathcal{L}^1$*,* $h_n \in \mathcal{L}^1$ *et*

$$\int g_n dm + \int h_n dm = \int |f|^{p_n} dm.$$

les rôles de g_n *et* h_n *sont inversés par rapport au cas précédent : On remarque que* $g_n \uparrow g = |f|^p 1_{\mathrm{A}}$*, quand* $n \to +\infty$*. Comme* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$*, le théorème de convergence monotone donne*

$$\int g_n dm \to \int g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.66}$$

Ceci est vrai même si $p \notin \mathrm{I}$ *(dans ce cas, on a, en fait,* $\int g dm = \infty$*).*

On remarque que $h_n \to h = |f|^p 1_{\mathrm{A}^c}$ *p.p., quand* $n \to +\infty$*, et que* $0 \leq h_n \leq |f|^{p_0}$ *car la suite* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est ici décroissante. Comme* $p_0 \in \mathrm{I}$*, on a* $|f|^{p_0} \in \mathcal{L}^1$ *et on peut appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition 4.29). Il donne*

$$\int h_n dm \to \int h dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{4.67}$$

Avec (4.66) et (4.67) on obtient, quand $n \to +\infty$*,*

$$\int |f|^{p_n} dm = \int g_n dm + \int h_n dm \to \int g dm + \int h dm = \int |f|^p dm.$$

La conséquence de cette question est que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ *est continue de* $\overline{\mathrm{I}}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*, où* $\overline{\mathrm{I}}$ *est l'adhérence de* I *dans* $\mathbb{R}$*. Dans la suite de l'exercice, on va introduire le cas* $p = \infty$ *et montrer la continuité de* $p \mapsto \|f\|_p$ *sur l'adhérence de* I *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*.*

2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < \mathrm{C}$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < \mathrm{C}$ p.p.$\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.

   (a) Montrer que $f \leq \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?

   Corrigé – *Si* $\|f\|_\infty = +\infty$*, on a, bien sûr,* $f \leq \|f\|_\infty$ *p.p.. On suppose donc maintenant que* $\|f\|_\infty < +\infty$*. Par définition d'une borne inférieure, il existe* $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ *t.q.* $|f| < \mathrm{C}$ *p.p.*$\}$ *t.q.* $\mathrm{C}_n \downarrow \|f\|_\infty$ *quand* $n \to +\infty$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* $\mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ *t.q.* $m(\mathrm{A}_n) = 0$ *et* $|f| < \mathrm{C}_n$ *sur* A_n^c*.*

On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *On a donc* $A \in T$, $m(A) = 0$ *et* $|f(x)| < C_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si* $x \in A^c$. *Comme* $C_n \downarrow \|f\|_\infty$ *quand* $n \to +\infty$, *on en déduit* $|f| \le \|f\|_\infty$ *sur* A^c *et donc que* $|f| \le \|f\|_\infty$ *p.p..*

En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $f(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $\|f\|_\infty = 1$ *et l'assertion* $f < \|f\|_\infty$ *p.p. est fausse.*

Noter aussi que $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}$ *t.q.* $|f| \le C$ *p.p.*$\}$.

On pose $J = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

(b) Remarquer que $J = I$ ou $J = I \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in I$ et $+\infty \in J$, alors $[p, +\infty] \subset J$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Corrigé – *Soit* $p \in I$ *et on suppose que* $\infty \in J$. *Soit* $q \in]p, \infty[$. *Comme* $|f| \le \|f\|_\infty$ *p.p., On a* $|f|^q \le \|f\|_\infty^{q-p}|f|^p$ *p.p.. On en déduit que* $f \in \mathcal{L}^q$, *c'est-à-dire* $q \in I$. *On a ainsi montré que* $]p, \infty[\subset I$ *et donc* $[p, \infty] \subset J$.

On raisonne maintenant comme dans la question 1. On pose $a = \inf J$ *et* $b = \sup J$, *de sorte que* $J \subset [a, b]$. *Puis, soit p t.q.* $a < p < b$. *On a nécessairement* $a < \infty$ *et il existe* $p_1 \in I$ *t.q.* $p_1 < p$. *On a* $b \le \infty$ *et il existe* $p_2 \in J$ *t.q.* $p < p_2$. *Si* $p_2 \in I$, *on utilise la question 1 pour montrer que* $p \in I$ *et si* $p_2 = \infty$ *la première partie de cette question donne que* $p \in I$. *On a bien ainsi montré que* $]a, b[\subset J$. J *est donc un intervalle dont les bornes sont a et b.*

Noter aussi que $\inf I = \inf J$ *et* $\sup I = \sup J$.

(c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).

i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [On pourra remarquer que $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x, |f(x)| \ge c\})$.]

Corrigé – *Comme* $|f|^p \ge c^p 1_{\{|f|\ge c\}}$, *la monotonie de l'intégrale donne bien*

$$\int |f|^p dm \ge c^p m(\{|f| \ge c\}),$$

et donc, comme $\int |f|^p dm \ne 0$,

$$\|f\|_p \ge c m(\{|f| \ge c\})^{\frac{1}{p}}. \tag{4.68}$$

Comme $c < \|f\|_\infty$, *on a* $m(\{|f| \ge c\}) > 0$, *d'où l'on déduit que* $m(\{|f| \ge c\})^{\frac{1}{p}} \to 1$ *quand* $p \to \infty$ *(*$p \in [1, \infty[$*).*

En passant à la limite inférieure quand $n \to +\infty$ *dans (4.68) pour* $p = p_n$, *on obtient alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c.$$

Comme c est arbitrairement proche de $\|f\|_\infty$, *on en déduit :*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge \|f\|_\infty. \tag{4.69}$$

ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \le g_0$ *p.p..*]

Corrigé – *Comme* $\frac{f}{\|f\|_\infty} \le 1$ *p.p. et que* $p_n \ge p_0$ *(car la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante), on a* $g_n \le g_0$ *p.p. et donc* $\int g_n dm \le \int g_0 dm$*, d'où l'on déduit (en notant que toutes les normes de* f *sont non nulles) :*

$$\|f_n\|_{p_n} \le \|f\|_\infty (\int g_0 dm)^{\frac{1}{p_n}}.$$

En remarquant que $\int g_0 dm \neq 0$*, on obtient bien, en passant à la limite supérieure dans cette inégalité,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty. \tag{4.70}$$

iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *On distingue deux cas :*

Cas 1 *On suppose ici que* $\|f\|_\infty = \infty$*. (4.69) donne alors que* $\|f\|_{p_n} \to \infty$ *et donc* $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ *quand* $n \to +\infty$*.*

Cas 2 *On suppose ici que* $\|f\|_\infty < \infty$*, de sorte que* $0 < \|f\|_\infty < \infty$*. Les assertions (4.69) et (4.70) donnent alors*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty \le \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n}$$

et donc $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ *quand* $n \to +\infty$*.*

3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\bar{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\bar{\mathrm{J}}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\bar{\mathrm{J}} = [a,b]$ si $\mathrm{J} = |a,b|$, avec $1 \le a \le b \le +\infty$, et | désigne] ou [).

Corrigé – *Si* $f = 0$ *p.p., on a* $\mathrm{J} = \bar{\mathrm{J}} = [1,\infty]$ *et* $\|f\|_p = 0$ *pour tout* $p \in \mathrm{J}$*. Donc,* $p \to \|f\|_p$ *est continue de* $\bar{\mathrm{J}}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*.*

On suppose maintenant que f *n'est pas nulle presque partout. On a donc* $\|f\|_p > 0$ *pour tout* $p \in [1,\infty]$*.*

On pose $\bar{\mathrm{J}} = [a,b]$ *(si* $\mathrm{J} \neq \emptyset$*). On distingue 3 cas :*

- *Cas 1 – Soit* $p \in]a,b[$*, de sorte que* $p \in \mathrm{I}$*.*

  (a) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ *t.q.* $p_n \uparrow p$*. La question 1-c donne que* $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ *quand* $n \to +\infty$*. On en déduit que* $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ *quand* $n \to +\infty$ *(pour s'en convaincre, on peut remarquer que* $\ln(\|f\|_{p_n}) = \frac{1}{p_n}\ln(\|f\|_{p_n}^{p_n}) \to \frac{1}{p}\ln(\|f\|_p^p)$ $= \ln(\|f\|_p)$*). Ceci donne la continuité à gauche de* $q \to \|f\|_q$ *au point* p*.*

  (b) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ *t.q.* $p_n \downarrow p$*. La question 1-c donne aussi* $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_p^p$ *quand* $n \to +\infty$ *et on en déduit, comme précédemment, que* $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_p$ *quand* $n \to +\infty$*. Ceci donne la continuité à droite de* $q \to \|f\|_q$ *au point* p*.*

- *Cas 2 – On prend ici $p = a$ et on suppose $a \neq \infty$ (sinon $a = b$ et ce cas est étudié au Cas 3). Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \downarrow a$.*

(a) *On suppose d'abord que $a \in \mathrm{I}$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_a^a$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_a$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.*

(b) *On suppose maintenant que $a \notin \mathrm{I}$, de sorte que $\|f\|_a = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à droite de $q \to \|f\|_q$ au point a.*

- *Cas 3 – On prend ici $p = b$. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \uparrow a$.*

(a) *On suppose d'abord que $b \in \mathrm{I}$. Ici encore, la question 1-c donne $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \|f\|_b^b$ quand $n \to +\infty$ et on en déduit que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_b$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.*

(b) *On suppose maintenant que $b \notin \mathrm{I}$.*

Si $b \neq \infty$, on a donc $\|f\|_b = \infty$. La question 1-c donne alors $\|f\|_{p_n}^{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et donc $\|f\|_{p_n} \to \infty$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b.

Si $b = \infty$, la continuité à gauche de $q \to \|f\|_q$ au point b a été démontré à la question 2-c-iii.

Exercice 4.38 (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$)

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t,x) = \mathrm{ch}(t/(1+x)) - 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t,.)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t,x)dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 4.39 (Contre-exemple à la continuité sous le signe $\int$)

Soit f de $]-1,1[\times[0,1]$ dans $\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t,x) = 0$ si $t \in]-1,0]$, puis, pour $t \in]0,1[$, par

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4}{t^2}x \text{ si } x \in [0, \dfrac{t}{2}], \\ \dfrac{4}{t^2}(t-x) \text{ si } x \in]\dfrac{t}{2}, t], \\ 0 \text{ si } x \in]t,1]. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f(t,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $t \in]-1,1[$.

   Pour $t \in]-1,1[$, on pose $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_{]0,1[} f(t,\cdot)d\lambda = \int_0^1 f(t,x)dx$.
2. Montrer que $f(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in [0,1]$.
3. Montrer que $\mathrm{F}(t) \not\to \mathrm{F}(0)$ lorsque $t \to 0$, $t > 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?

Exercice 4.40 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1) Soient (E, T, m) un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \,;\ |g(s)| \le C|s| + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.71}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *u est mesurable de E (muni de la tribu T) dans $\mathbb{R}$ (muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et g est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On en déduit que $g \circ u$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}$).*

   Puis, comme $|g \circ u(x)| = |g(u(x))| \le C|u(x)| + C$ pour tout $x \in E$, on a

   $$\int |g \circ u| dm \le C\|u\|_1 + Cm(E).$$

   Donc, $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   On pose $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $u \in L^1$, on choisit $v \in \mathcal{L}^1$ tel que $v \in u$. D'après la question précédente, on a $g \circ v \in \mathcal{L}^1$. On pose alors $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\}$. On a donc $G(u) \in L^1$.

2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est-à-dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

   Corrigé – *Soient $v, w \in u$. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $v = w$ sur A^c. On a donc aussi $g \circ v = g \circ w$ sur A^c et donc $g \circ v = g \circ w$ p.p.. On en déduit que $\{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m);\ h = g \circ w \text{ p.p.}\}$.*

   $G(u)$ ne dépend donc pas du choix de v dans u.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $F \in L^1$ t.q. $|u_n| \le F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1.

   Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $G(u_n) \to G(u)$ p.p..*

   On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le C|u_n| + C \le CF + C$ p.p. et donc $|G(u_n)| \le CF + C$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme $CF + C \in L^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne que $G(u_n) \to G(u)$ dans L^1 quand $n \to +\infty$.

4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1.

   [On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé réciproque partielle de la convergence dominée.]

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que* G *n'est pas continue de* L^1 *dans* L^1*. Il existe donc* $u \in L^1$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *t.q.* $u_n \to u$ *dans* L^1 *et* $G(u_n) \not\to G(u)$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$*.*

Comme $G(u_n) \not\to G(u)$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *t.q.* $\varphi(n) \to \infty$ *quand* $n \to +\infty$ *et :*

$$\|G(u_{\varphi(n)}) - G(u)\|_1 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4.72}$$

(La suite $(G(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sous-suite de la suite* $(G(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$*.)*

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ *dans* L^1*, on peut appliquer le théorème de réciproque partielle de la convergence dominée (théorème 4.49). Il donne l'existence de* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *et de* $F \in L^1$ *t.q.* $\psi(n) \to \infty$ *quand* $n \to +\infty$*,* $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ *p.p. et* $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \leq F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. (La suite* $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sous-suite de la suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$*).*

On peut maintenant appliquer la question 3 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$*. Elle donne que* $G(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to G(u)$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$*, ce qui est en contradiction avec (4.72).*

Exercice 4.41 (Paris groupés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace mesuré tel que $p(\Omega) = 1$. On se donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déléments de $\mathcal{A}$ telle que $A_{n+1} \subset (\cup_{p=1}^n A_p)^c$ et $p(A_n) = 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En prenant $(\Omega, \mathcal{A}, p) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, donner un exemple d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifant les hypothèses demandées.

   Corrigé – *Il suffit de prendre* $A_n =]\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$.

On se donne aussi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $\alpha_1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$G_n = (-\alpha_n - 1)1_{A_n} + \alpha_{n+1} 1_{A_{n+1}}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\int G_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec ce choix de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{i=1}^n G_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int H_n dp = n.$$

   Corrigé – *On construit la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par récurrence.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. Si* $G_n = (-\alpha_n - 1)1_{A_n} + \alpha_{n+1} 1_{A_{n+1}}$*, on a*
$$\int G_n dp = (-\alpha_n - 1)p(A_n) + \alpha_{n+1} p(A_{n+1}) = \frac{-\alpha_n - 1}{2^n} + \frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}.$$
   On choisit donc, pour $n \geq 1$*,* $\alpha_{n+1} = 2(\alpha_n + 1) + 2^{n+1}$*. On a bien* $\int G_n dp = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
   On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\int H_n dp = \sum_{i=1}^n \int G_i dp = n$*.*

3. Pour $x \in \Omega$, on pose $H(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} G_n(x)$. Montrer que $H(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega$ et que $H = -1$ p.p..

   Corrigé – *Les ensembles* A_n *sont disjoints deux à deux, on a donc* $p(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1/2^n = 1$. *On en déduit que* $p((\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n)^c) = 0$. *Pour montrer que* $H = -1$ *p.p., il suffit donc de montrer que* $H(x) = -1$ *pour tout* $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
   Soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, *il existe un unique* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x \in A_n$.
   Si $n = 1$, *on a alors* $G_1(x) = -1$ *et* $G_n(x) = 0$ *pour* $n > 1$. *Donc* $H(x) = -1$.
   Si $n > 1$, *on a alors* $G_n(x) = -\alpha_n - 1$, $G_{n-1} = \alpha_n$ *et* $G_m(x) = 0$ *si* $m \neq n$ *et* $m \neq n-1$.
   On en déduit bien que $H(x) = -1$.
   On a bien montré que $H = -1$ *p.p..*

4. On choisit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\int G_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à la question 2 ?

   Corrigé – *On a* $H_n \to H$ *p.p. mais* $\int H_n dp \not\to \int H dp$. *Ceci montre que la suite* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne vérifie pas les hypothèses du théorème de convergence dominée (c'est, bien sûr, l'hypothèse de domination qui est manquante).*

N.B. Cet exercice a une interprétation probabiliste un peu inattendue. Il permet de montrer que le fait de faire une infinité de paris favorables peut être défavorable.

4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.42 (Espérance et variance de lois usuelles) Soient (E, T, p) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle, de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. p_X est la loi uniforme sur $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$;
2. p_X est la loi exponentielle ;
3. p_X est la loi de Gauss.

Exercice 4.43 (Inégalité de Jensen) Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Démontrer l'**inégalité de Jensen** qui s'écrit

$$\int f(X) dP \geq f(\int X dP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Corrigé – *On utilise le rappel avec* $a = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int \mathrm{X}d\mathrm{P}$. *On obtient pour tout* $\omega \in \Omega$

$$f(\mathrm{X}(\omega)) - f(a) \geq c_a(\mathrm{X}(\omega) - a).$$

Comme les fonctions $f(\mathrm{X}) - f(a)$ *et* $\mathrm{X} - a$ *sont intégrables, la monotonie de l'intégrale donne alors*

$$\int (f(\mathrm{X}) - f(a))d\mathrm{P} \geq c_a \int (\mathrm{X} - a)d\mathrm{P}.$$

Comme $\int \mathrm{X}d\mathrm{P} = a$, *on en déduit* $\int (f(\mathrm{X}) - f(a))d\mathrm{P} \geq 0$, *ce qui donne le résultat demandé.*

Exercice 4.44 (Sur l'équi-intégrabilité) Soit $(\mathrm{E}, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_\mathrm{A} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \to 0$, quand $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \to 0$ (avec $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{a\to\infty} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|\mathrm{X}_n|>a\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} = 0,$
2. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} < +\infty$ et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Corrigé –

Démonstration de $1 \Rightarrow 2$

Pour montrer que la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, *on remarque simplement qu'il existe* $a_0 \in \mathbb{R}_+$ *t.q.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|\mathrm{X}_n|>a_0\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \leq 1.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} = \int_{\{|\mathrm{X}_n|>a_0\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} + \int_{\{|\mathrm{X}_n|\leq a_0\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \leq 1 + a_0.$$

Ce qui donne bien une borne pour $\|\mathrm{X}_n\|_1$.

On montre maintenant l'équi-intégrabilité. Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|\mathrm{X}_n|>a\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \leq \varepsilon.$$

On choisit $\delta = \varepsilon/a$, *on a alors pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ *t.q.* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \delta$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\mathrm{A} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{A}\cap\{|\mathrm{X}_n|>a\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} + \int_{\mathrm{A}\cap\{|\mathrm{X}_n|\leq a\}} |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P} \leq \varepsilon + a\delta = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve l'équi-intégrabilité de la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration de $2 \Rightarrow 1$

On pose $\mathrm{M} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |\mathrm{X}_n| d\mathrm{P}$. *On a donc* $\mathrm{M} < +\infty$ *et pour tout* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(par (4.6)),*

$$\mathrm{P}(\{|\mathrm{X}_n| > a\}) \leq \frac{\mathrm{M}}{a}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *D'après l'equi–intégrabilité de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que* $n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}, P(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |X_n| dP \leq \varepsilon$. *On choisit alors* $a_0 = M/\delta$. *On a pour tout* $a \geq a_0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $P(\{|X_n| > a\}) \leq M/a \leq \delta$, *et donc*

$$\int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP \leq \varepsilon.$$

On a bien ainsi montré la propriété 1.

Exercice 4.45 (Caractérisation de l'indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in]-\infty, +\infty[^n, P[X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i]. \qquad (4.73)$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

Corrigé – *Le fait que l'indépendance de* $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ *entraîne la propriété (4.73) est immédiat car l'ensemble* $\{X_i \leq a_i\}$ *appartient à la tribu engendrée par* X_i *(pour tout* $a_i \in \mathbb{R}$ *et* $i \in \{1, \ldots, n\}$*).*

On montre maintenant la réciproque, c'est-à-dire que (4.73) entraîne l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$. *On note* $\mathcal{D} = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$ *et* $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \{\mathbb{R}\}$ *(on a donc* $A \in \mathcal{C}$ *si et seulement si* $A \in \mathcal{D}$ *ou* $A = \mathbb{R}$*). L'hypothèse (4.73) donne*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{D}.$$

Mais, comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$ *une conséquence facile de la continuité croissante de* P *est que*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \text{ pour tout } A_i \in \mathcal{C}. \qquad (4.74)$$

.

Nous allons, à partir de (4.74), montrer, par récurrence sur q (q allant de 1 *à* $n+1$*), la propriété suivante :*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) \quad \text{pour tout } A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_i \in \mathcal{C} \text{ si } i \geq q. \qquad (4.75)$$

Par définition de v.a.r. indépendantes (définition 3.29), la propriété (4.75) pour $q = n+1$ *donne l'indépendance de* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Pour $q = 1$, *la propriété (4.75) est donnée par (4.74). Soit maintenant* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *t.q. (4.75) soit vraie. On montre maintenant que (4.75) est encore vraie pour* $q+1$ *au lieu de q (ce qui termine la récurrence).*

Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *donnés pour* $i \neq q$, *avec* $A_i \in \mathcal{C}$ *si* $i > q$. *Pour tout* $A_q \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *on définit* $m(A_q)$ *et* $\mu(A_q)$ *de la manière suivante :*

$$m(A_q) = P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}),\ \mu(A_q) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}).$$

La σ*-additivité de* P *donne que* m *et* μ *sont des mesures sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *L'hypothèse de récurrence (c'est-à-dire le fait que (4.75) est vraie) donne que ces deux mesures sont égales sur* $\mathcal{C}$. *On peut alors appliquer la proposition 2.31 (car* $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et* $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$, $m(\mathbb{R}) < \infty$*). Elle donne que* $m = \mu$ *(sur tout* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*), ce qui montre que (4.75) est encore vraie pour* $q+1$ *au lieu de* q.

On a bien terminé la récurrence et montré ainsi l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

N.B. Une démonstration (probablement plus directe) de cette dernière implication peut se faire en utilisant une généralisation de la proposition 2.31 à $\mathbb{R}^n$. *Cette méthode permet d'éviter la récurrence sur* q.

Exercice 4.46 (Sign(X) et |X| pour une gaussienne) On définit la fonction "sign" par :

$$\text{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \quad s \mapsto \text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0, \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases} \tag{4.76}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et |X| sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Corrigé – *On pose* $Y = sign(X)$ *et* $Z = |X|$. *Pour montrer que* Y *et* Z *sont indépendantes il suffit de montrer que* $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(en fait, par définition de l'indépendance, il suffit de considérer* $\varphi = 1_A$ *et* $\psi = 1_B$ *avec* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*).*

Soit φ, ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a, en utilisant* $f(-x) = f(x)$ *:*

$$\begin{aligned} E(\varphi(Y)\psi(Z)) &= \int_\Omega \varphi(\text{sign}(X))\psi(|X|)dP = \int_\mathbb{R} \varphi(\text{sign}(x))\psi(|x|)f(x)dx \\ &= \varphi(1)\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x) + \varphi(-1)\int_{\mathbb{R}_-} \psi(-x)f(x)dx \\ &= (\varphi(1)+\varphi(-1))\int_{\mathbb{R}^+} \psi(x)f(x)dx. \end{aligned}$$

En prenant $\psi = 1_\mathbb{R}$, *on a* $E(\varphi(Y)) = \frac{1}{2}(\varphi(1)+\varphi(-1))$ *car* $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

En prenant $\varphi = 1_\mathbb{R}$, *on a* $E(\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}_+} \psi(x)2f(x)dx$.

On en déduit que $E(\varphi(Y)\psi(Z)) = E(\varphi(Y))E(\psi(Z))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et donc que* Y *et* Z *sont indépendantes. On obtient aussi*

que $P_Y = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ *et* $P_Z = g\lambda$ *avec* $g = 2f1_{\mathbb{R}_+}$ *(c'est-à-dire que* P_Z *est la mesure de densité* g *par rapport à la mesure de Lebesgue). Noter que* $E(\varphi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Y$ *et* $E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP_Z$ *si* φ *est borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, ce qui caractérise* P_Y *et* P_Z *(voir (4.11) ou le théorème 4.58, par exemple).*

Pour montrer l'indépendance de sign(X) *et* X^2*, on remarque que* $X^2 = Z^2$*. Comme* Y *et* Z *sont indépendantes, les v.a.r.* Y *et* Z^2 *sont aussi indépendantes (voir la proposition 3.30) et donc sign*(X) *et* X^2 *sont indépendantes.*

Il reste à trouver la loi de X^2*. On a, pour* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, en utilisant* $f(-x) = f(x)$*,*

$$E(\varphi(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) f(x)dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x^2) f(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(y)\frac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}dy.$$

Ce qui donne $P_{X^2} = h\lambda$ *avec* $h(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ *pour* $x > 0$ *et* $h(x) = 0$ *pour* $x \le 0$*.*

Exercice 4.47 (V.a. gaussiennes dépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2).$$

(le signe "∼" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

Exercice 4.48 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Corrigé – *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, on pose* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ *de sorte que la loi de* X *est de densité* f *par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on note* $-A = \{-x, x \in A\}$*. Comme* f *est paire, on a :*

$$P(X \in (-A)) = \int_{-A} f(x)dx = \int_A f(-x)dx = \int_A f(x)dx = P(X \in A).$$

On remarque maintenant que $P(SX \in A) = P(S = 1, X \in A) + P(S = -1, X \in (-A))$*. Comme* S *et* X *sont indépendantes, on a :*

$$P(S = 1, X \in A) = P(S = 1)P(X \in A) = \frac{1}{2}P(X \in A),$$

$$P(S = -1, X \in (-A)) = P(S = -1)P(X \in (-A)) = \frac{1}{2}P(X \in (-A)).$$

Comme $P(X \in (-A)) = P(X \in A)$*, on en déduit* $P(SX \in A) = P(X \in A)$*. Les v.a.r.* SX *et* X *ont donc même loi, et donc* $SX \sim \mathcal{N}(0, 1)$*.*

2. Montrer que SX et X sont dépendantes.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que* SX *et* X *sont indépendantes. La proposition 4.59 donne alors* $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ *(noter que la fonction* $s \mapsto |s|$ *est borélienne positive). Comme* $|S| = 1$ *p.s., on a donc :*

$$E(X^2) = E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|) = E(|X|)^2.$$

Comme $E(|X|) < +\infty$*, on en déduit que Var*$(|X|) = 0$*, ce qui est impossible car* $|X|$ *n'est pas égale p.s. à sa moyenne (sinon, la loi de* $|X|$ *serait une masse de Dirac et non pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue).*

3. Montrer que $Cov(SX, X) = 0$.

Corrigé – *Comme* $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$*, on a* $E(SX) = E(X) = 0$*. Comme* S *et* X *sont indépendantes (et* S *et* X^2 *intégrables), on a (proposition 4.59)* SX^2 *intégrable et* $E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$*. On en déduit Cov*$(SX, X) = E([SX - E(SX)][X - E(X)]) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0$.

4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Corrigé – *Il suffit de prendre* $S = \text{sign}(Y)$ *où la fonction* sign *est définie par* (4.76)*; noter que* sign *'est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Les variables aléatoires* X *et* S *sont indépendantes (par la proposition 3.30, mais la preuve est facile ici car la tribu engendrée par* $\varphi(Y)$ *est incluse dans celle engendrée par* Y *dès que* φ *est borélienne). Enfin, on a* $P(S = 1) = P(Y > 0) = \frac{1}{2} = P(Y < 0) = P(S = -1)$*, ce qui donne bien* $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Exercice 4.49 (Limite p.s. et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to +\infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Corrigé – *Soit* ϕ, $\psi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Comme* X_n *et* Y *sont indépendantes, on a (voir la proposition 4.59), pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X_n))E(\psi(Y)). \tag{4.77}$$

Comme φ *est continue, on a* $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ *p.s. et* $\varphi(X_n)\psi(Y) \to \varphi(X)\psi(Y)$ *p.s.. les convergences sont dominées car* $|\varphi(X_n)| \le \sup\{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ *(et* $|\psi(Y)| \le \sup\{\psi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$*). On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée, il donne*

$$\lim_{n\to+\infty} E(\varphi(X_n)\psi(Y)) = E(\varphi(X)\psi(Y)) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} E(\varphi(X_n)) = E(\varphi(X)).$$

En passant à la limite dans (4.77), on en déduit que

$$E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)).$$

La proposition 4.61 permet de conclure que X *et* Y *sont indépendantes.*

Exercice 4.50 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $\mathrm{Y} = \exp(\mathrm{X})$. Calculer la moyenne, la variance et la densité de Y (si elle existe).

Corrigé – *On calcule tout d'abord la moyenne et la variance de* Y.

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \int_\Omega e^{\mathrm{X}} d\mathrm{P} = \int_{\mathbb{R}} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx = \sqrt{e}.$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) = \int_\Omega e^{2\mathrm{X}} d\mathrm{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2.$$

On a donc $Var(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{Y})^2 = e^2 - e = e(e-1)$.
On cherche maintenant la loi de Y.
Soit φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Le changement de variable $y = e^x$ *donne alors*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Y})) = \int_0^{+\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}} dy.$$

La v.a.r. Y *a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction* g *définie par :*
$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}}$ *si* $y > 0$ *et* $g(y) = 0$ *si* $y \leq 0$.

Exercice 4.51 (Loi du χ^2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a.r. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle loi du χ^2 à 1 degré de liberté.)

Exercice 4.52 (Conséquence du lemme de Borel-Cantelli) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de loi normale centrée réduite (c'est-à-dire que la loi de X_1 est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \exp(\frac{-x^2}{2})$.

Corrigé – *Soit* $x > 0$, *on a*

$$x\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n| > x) = 2x \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty t e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|\mathrm{X}_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1$ p.s..

Corrigé – *Soit* $a \geq 1$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $\mathrm{A}_{n,a} = \{|\mathrm{X}_n| > a\sqrt{2\ln(n)}\}$ *et* $\mathrm{A}_a = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_{k,a}$. *On va montrer les deux propriétés suivantes :*

(p1) $P(A_a) = 0$ *si* $a > 1$.

(p2) $P(A_1) = 1$.

La propriété (p2) donne que $P(\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} \geq 1\}) = 1$ *car*

$$A_1 \subset \{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} \geq 1\}.$$

La propriété (p1) donne que $P(\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} > 1\}) = 0$ *car*

$$\{\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} > 1\} \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{a+\frac{1}{p}},$$

et $P(\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} A_{a+\frac{1}{p}}) \leq \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{a+\frac{1}{p}}) = 0$. *Il reste à montrer (p1) et (p2). Ce que l'on fait ci après en reprenant la démonstration du lemme de Borel-Cantelli (exercice 2.35).*

Démonstration de (p1). *On a* $P(\bigcup_{k\geq n} A_{k,a}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_{k,a})$. *La 1ere question donne alors, avec* $b = a^2 > 1$

$$P(\bigcup_{k\geq n} A_{k,a}) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a\sqrt{2\ln(k)}} \frac{1}{k^b} \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

car c'est le reste d'une série convergente. Par continuité décroissante de P *on a donc* $P(A_a) = 0$.

Démonstration de (p2). *On a*

$$P(\bigcup_{k\geq n} A_{k,1}) = 1 - P(\bigcap_{k\geq n} A_{k,1}^c) = 1 - \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} (A_{k,1}^c)). \quad (4.78)$$

(On a utilisé ici la continuité décroissante de P*). On utilise maintenant l'indépendance des* X_n, *on obtient, pour* $m > n$,

$$b_{n,m} = P(\bigcap_{k=n}^{m} (A_{k,1}^c)) = \prod_{k=n}^{m} P(A_{k,1}^c).$$

Si on montre que $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$ *(pour tout n), on aura, par (4.78),*

$$P(\bigcup_{k\geq n} A_{k,1}) = 1$$

pour tout n et donc, par continuité décroissante de P, $P(A_1)$=*1, ce qui montre* $(p1)$.

Il reste donc à montrer que $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$. *Pour cela, on remarque que, si* $b_{n,m} \neq 0$, *on a*

$$\ln(b_{n,m}) = \sum_{k=n}^{m} \ln(P(A_{k,1}^c)) = \sum_{k=n}^{m} \ln(1 - P(A_{k,1})).$$

Comme $\ln(1-u) \leq -u$ *pour* $u \in [0,1[$, *on en déduit*

$$\ln(b_{n,m}) \leq -\sum_{k=n}^{m} P(A_{k,1}) \leq -\sum_{k=n}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\ln(k)}} \frac{1}{k},$$

et donc $\ln(b_{n,m}) \to -\infty$ *quand* $m \to \infty$ *car la série de terme général* $1/(k\sqrt{\ln(k)})$ *est divergente. On a donc finalement* $\lim_{m\to\infty} b_{n,m} = 0$ *ce qui termine la démonstration de* $(p1)$ *(et termine l'exercice).*

Exercice 4.53 (Sur la somme de v.a.r.i.i.d. intégrables) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{\omega \in \Omega, N(w) = n\}$.

1. On suppose, dans cette question, que les v.a.r. $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$ et $Z_n = \sum_{p=1}^{n} |X_p|$.

 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1_{A_n} et Y_n sont des v.a.r. indépendantes et que 1_{A_n} et Z_n sont des v.a.r. indépendantes. [On pourra utiliser la proposition 3.30.]

 Corrigé – *On utilise la proposition 3.30. Comme fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *on choisit* $\varphi = 1_{\{n\}}$ *et comme fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *on choisit* $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_i$. *La proposition 3.30 donne alors que* $\varphi(N)$ *et* $\psi(X_1,\ldots,X_n)$ *sont des v.a.r. indépendantes. Ceci montre que* 1_{A_n} *et* Y_n *sont indépendantes car* $\varphi(N) = 1_{A_n}$ *et* $\psi(X_1,\ldots,X_n) = Y_n$.

 En prenant maintenant $\psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} |x_i|$, *on montre aussi que* 1_{A_n} *et* Z_n *sont indépendantes.*

 (b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$. [On pourra remarquer que $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_n$ et $|S_N| \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Z_n$.]

 Corrigé – S_N *est bien une v.a.r. (*S_N *prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et est mesurable comme limite de fonctions mesurables). Comme* $|S_N| \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Z_n$, *on a grâce a l'indépendance de* 1_{A_n} *et* Z_n *(et le théorème de convergence monotone)*

$$E(|S_N|) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{A_n})E(Z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n)E(|X_1|) = E(N)E(|X_1|).$$

 Ceci prouve que S_N *est intégrable. Cela prouve aussi que la série de terme général* $1_{A_n} Y_n$ *est absolument convergente dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Cette série est donc aussi convergente dans le même espace et on obtient ainsi (grâce a l'indépendance de* 1_{A_n} *et* Y_n*)*

$$E(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{A_n})E(Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n)E(X_1) = E(N)E(X_1).$$

2. On suppose maintenant que $A_n \in \sigma(X_1,\ldots,X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (où $\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ est la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$).

 (a) Montrer que $1_{\{n\le N\}}$ et X_n sont des v.a.r. indépendantes.

Corrigé – *On pose* $B_n = \{N \geq n\}$. *On a donc* $B_n^c = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. *Comme* $A_k \in \sigma(X_k) \subset \sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$ *pour* $1 \leq k \leq n-1$, *on a donc* $B_n \in \sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$ *et donc* $\sigma(1_{B_n}) \subset \sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$.

Enfin, comme $\sigma(X_1),\ldots,\sigma(X_n)$ *sont des tribus indépendantes, la proposition 2.60 donne l'indépendance de* $\sigma(X_n)$ *et* $\sigma(X_1,\ldots,X_{n-1})$. *On a donc l'indépendance de* $\sigma(X_n)$ *et* $\sigma(1_{B_n})$, *c'est-à-dire l'indépendance de* X_n *et* 1_{B_n}.

(b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de E(N) et $E(X_1)$. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{n\leq N\}}X_n$.]

Corrigé – *On reprend la démonstration de la question 1(b). On a*

$$|S_N|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{n\leq N\}}|X_n|.$$

Avec le théorème de convergence monotone et l'indépendance de $1_{\{n\leq N\}}$ *et* $|X_n|$, *on a donc*

$$E(|S_N|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{n\leq N\}})E(|X_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \leq N\})E(|X_1|) = E(N)E(|X_1|),$$

car $\sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \leq N\}) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N = k) = E(N)$. *Comme à la question 1(b), ceci montre que* S_N *est intégrale et que la série de terme générale* $1_{\{n\leq N\}}X_n$ *est absolument convergente (et donc convergente) dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega,\mathcal{A},P)$. *On obtient ainsi*

$$E(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{n\leq N\}})E(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n \leq N\})E(X_1) = E(N)E(X_1).$$

Exercice 4.54 (Dés pipés) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes, bornées et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y).$$

Corrigé – *Comme* X *et* Y *sont des v.a.r. indépendantes, on a* $E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y))$ *pour toutes fonctions* φ *et* ψ *boréliennes bornées de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On peut alors choisir* φ *et* ψ *t.q.*

$$\varphi(s) = \psi(s) = t^s \text{ si } s \in \mathrm{Im}(X)\cup\mathrm{Im}(Y)\cup\mathrm{Im}(X+Y)$$

et, par exemple, $\varphi(s) = \psi(s) = 0$ *si* $s \notin \mathrm{Im}(X)\cup\mathrm{Im}(Y)\cup\mathrm{Im}(X+Y)$ *(la fonction* φ *est bien borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*). On obtient alors pour tout* $\omega \in \Omega$,

$$\varphi(X(\omega)) = t^{X(\omega)},\ \psi(Y(\omega)) = t^{Y(\omega)} \text{ et } \varphi(X(\omega))\psi(Y(\omega)) = t^{X(\omega)}t^{Y(\omega)} = t^{X(\omega)+Y(\omega)}.$$

On en déduit que

$$E(t^{X+Y}) = E(\varphi(X)\psi(Y)) = E(\varphi(X))E(\psi(Y)) = E(t^X)E(t^Y).$$

2. On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(X) = \mathrm{Im}(Y) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et que $P(\{X = i\}) = p_i > 0$, $P(\{Y = i\}) = q_i > 0$ pour $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

   On pose $P(\{X+Y = i\}) = r_i$ pour $i = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Montrer qu'il est impossible que r_i soit indépendant de i (c'est-à-dire $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12). [On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12, on a alors $(1 - t^{11}) = 11(1 - t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible...]

Corrigé – *Comme* X + Y *ne peut prendre que des valeurs entières comprises entre* 1 *et* 12*, on a bien sûr* $\sum_{i=2}^{12} r_i = 1$. *On suppose que* r_i *ne dépend pas de* i *(quand* $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$*). On a donc* $r_i = 1/11$ *pour tout* $i \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. *On utilise alors la première question. Soit* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$, *on a*

$$E(t^{X+Y}) = \sum_{i=2}^{12} r_i t^i = \sum_{i=2}^{12} \frac{1}{11} t^i = \frac{t^2}{11} \sum_{i=0}^{10} t^i = \frac{t^2(1-t^{11})}{11(1-t)},$$

$$E(t^X) = \sum_{i=1}^{6} p_i t^i = t \sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i, \qquad E(t^Y) = \sum_{i=1}^{6} q_i t^i = t \sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i.$$

La première question donne alors

$$(1 - t^{11}) = 11(1-t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1} t^i). \tag{4.79}$$

On a démontré (4.79) pour tout $t \neq 1$, *mais elle aussi trivialement vraie pour* $t = 1$. *On a donc bien (4.79) pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

L'égalité (4.79) donne l'égalité de deux polynômes (de degré 11*) sur* $\mathbb{R}$. *Mais, cette égalité est impossible. En effet, le polynôme au membre de gauche ne s'annule (dans* $\mathbb{R}$*) que pour* $t = 1$. *Or,* $\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} t^i$ *est un polynôme de degré impair, il s'annule donc au moins une fois dans* $\mathbb{R}$. *On note* t_0 *un nombre réel annulant ce polynôme. On a* $t_0 \neq 1$ *car* $\sum_{i=0}^{5} p_{i+1} = 1$. *L'égalité (4.79) est donc impossible au point* t_0.

Chapitre 5

Intégrale sur les boréliens de $\mathbb{R}$

5.1 Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale classique des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathrm{A} \subset \mathrm{I}\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(\mathrm{I})$.

Proposition 5.1

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 4.5 page 209. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$. ∎

Remarque 5.2

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$ ou $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

   Cette notation est justifiée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.2).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in C([a, b], \mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$, qui est l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)\,;\, g = f$ p.p.$\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)\,;\, g = f$ p.p.$\}$ comme le montre la proposition suivante (proposition 5.3).

Proposition 5.3 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur strictement positive et* $f, g \in C(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. *On suppose que* $f = g$ λ-*p.p.. On a alors* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.11 page 138 pour $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. La démonstration pour I quelconque est similaire.

Proposition 5.4 *Soit* $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(c'est-à-dire que* f *est une fonction continue à support compact). Alors* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *(Ici aussi, on écrira souvent* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*)*

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b$ *et* $f = 0$ *sur* $[a, b]^c$ *(de tels* a *et* b *existent). Alors,* $\int f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$ *(cette dernière intégrale étant à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on utilise la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a, b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1,

$$f_{|[a,b]} \in C([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda).$$

On a donc

$$\int |f| d\lambda = \int |f_{|[a,b]}| d\lambda < \infty$$

et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$. ■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.2.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

Remarque 5.5 Les propositions 5.1 et 5.4 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0$. (On rappelle que $f \geq 0$ signifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.6).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a,b],\mathcal{B}([a,b]))$. Il est facile de voir que $C([a,b],\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$ (ou plutôt $C([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\mathcal{B}([a,b]),m)$). Pour $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.15).

On énonce maintenant des résultats, dus à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (applications que nous appellerons mesures de Radon) et les mesures abstraites sur $\mathcal{B}$(R) (c'est-à-dire les applications $\sigma-$additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.6 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce livre, nous réservons l'appellation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.56 de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

Théorème 5.6 (Riesz) *Soit* L *une forme linéaire positive sur* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, c'est-à-dire une application linéaire positive de* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors il existe une unique mesure* m *sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall\ f\in C_c,\ \ L(f)=\int f\,dm.$$

De plus, m *est finie sur les compacts (c'est-à-dire* $m(K)<+\infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$*.)*

DÉMONSTRATION – La partie unicité de cette démonstration est assez facile et est donnée dans la proposition 5.8. La partie existence est plus difficile, on en donne seulement le schéma général, sous forme d'exercice détaillé.

Soit L une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue au sens suivant : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $C_K\in\mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|L(f)|\le C_K\|f\|_\infty$.
   [Considérer une fonction $\psi_K\in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\psi_K(x)=1$ si $x\in K$ et $\psi_K(x)\ge 0$ pour tout x.]
2. Montrer le lemme suivant :
   Lemme 5.7 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f\in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n\uparrow f$ ou $f_n\downarrow f$ lorsque $n\to+\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.
3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f\in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n\uparrow f$ ou $f_n\downarrow f$ lorsque $n\to+\infty$, alors $L(f_n)\to L(f)$.
4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n\uparrow f$ et $g_n\uparrow g$ (ou $f_n\downarrow f$ et $g_n\downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $f\le g$ alors $\lim_{n\to+\infty}L(f_n)\le\lim_{n\to+\infty}L(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f=g$, $\lim_{n\to+\infty}L(f_n)=\lim_{n\to+\infty}L(g_n)$).
   [On pourra, par exemple, considérer, pour n fixé, $h_p=\inf(g_p,f_n)$ et remarquer que $h_p\uparrow f_n$.]
5. On définit :
   $$A_+ = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\exists(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n\uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty}L(f_n)<+\infty\}, \quad (5.1)$$
   $$A_- = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\exists(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n\downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty}L(f_n)>-\infty\}, \quad (5.2)$$
   Si $f\in A^+$, on pose $L(f)=\lim_{n\to+\infty}L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n\uparrow f$.
   Si $f\in A^-$, on pose $L(f)=\lim_{n\to+\infty}L(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n\downarrow f$.
   Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f\in A^+\cap A^-$, les deux définitions coincïdent). Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Si $f\in A^+$ (resp. A^-) alors $-f\in A^-$ (resp. A^+)et $L(-f)=-L(f)$.
   (b) Si $f,g\in A^+$ (resp. A^-) alors $f+g\in A^+$ (resp. A^-) et $L(f+g)=L(f)+L(g)$.
   (c) Si $f\in A^+$ (resp. A^-) et $\alpha\in\mathbb{R}_+$ alors $\alpha f\in A^+$ (resp. A^-) et $L(\alpha f)=\alpha L(f)$.
   (d) Si $f\in A^+$ (resp. A^-) et $g\in A^+$ alors $\sup(f,g)\in A^+$ et $\inf(f,g)\in A^+$.

(e) Si $f, g \in A^+$ (resp. A^-) et $f \geq g$, alors $L(f) \geq L(g)$.

(f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in A^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in A^-$), alors $L(f_n) \geq L(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) < +\infty$, alors $f \in A^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caractéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caractéristiques des compacts.

6. On pose :
$$E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists g \in A^+ \text{ et } h \in A^-; h \leq f \leq g \text{ et } L(g) - L(h) \leq \varepsilon\}$$
et pour $f \in E$, on définit :
$$L(f) = \sup_{h\in A^-, h\leq f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\geq f} L(g).$$
Montrer que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que d'une part :
$$\sup_{h\in A^-, h\leq f} L(h) = \inf_{g\in A^-, g\geq f} L(g),$$
et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $A^+ \subset E$ et $A^- \subset E$). Montrer les propriétés suivantes sur E :

(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.

(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.

(c) E est stable par inf et sup, *i.e.* si $f \in E$ et $g \in E$, alors $\sup(f, g) \in E$ et $\inf(f, g) \in E$.

7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c$ t.q. $0 \leq \varphi_n \leq 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $T = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_A\varphi_n \in E \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $T \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

8. Pour $A \in T$, on pose : $m(A) = \lim_{n\to+\infty} L(1_A\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.

9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, T, m) = E$ et que $\int f dm = L(f), \forall f \in E$.

■

Proposition 5.8 *Soit $d \geq 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f dm = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.31. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.60). Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice.

Remarque 5.9 Le théorème 5.6 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a, b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de

$\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.6 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f dm = L(f)$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a,b[) = b-a$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.10 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*

$$C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\},$$
$$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\},$$
$$C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \exists K \subset \mathbb{R}, K \text{ compact}, f = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\|\cdot\|_u$ s'appelle norme de la convergence uniforme (elle est aussi parfois appelée norme infinie.)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\|\cdot\|_u$. Ces espaces seront parfois notés, en abrégé, C_c, C_0 et C_b.

Remarque 5.11 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \le m(\mathbb{R})\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow L(f) \ge 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

Théorème 5.12 (Riesz) *Soit L une application linéaire positive de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, alors il existe une unique mesure m finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. :*

$$\forall\ f \in C_0,\ \ L(f) = \int f dm.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration consiste d'abord à montrer que L est continue (quand $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est muni de sa norme naturelle, c'est-à-dire de la norme $\|\cdot\|_u$). C'est la première étape ci-dessous. Puis à appliquer le théorème 5.6, c'est le deuxième étape.

Étape 1

On montre, dans cette étape, que L est continue.

On raisonne par l'absurde. Si L n'est pas continue, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $L(f_n) \ge n$ et $\|f_n\|_u = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $g_n = |f_n|/(n^2)$, on a $g_n \in$

$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en utilisant la linéarité et la positivité de L, on obtient

$$L(g_n) = \frac{1}{n^2}L(|f_n|) \geq \frac{1}{n^2}L(f_n) \geq \frac{1}{n} \text{ et } \|g_n\|_u = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est absolument convergente dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle est donc convergente (car $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace de Banach). On note g la somme de cette série. On a donc $g \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et comme les fonctions g_n sont positives,

$$L(g) \geq \sum_{p=1}^{n} L(g_p) \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $L(g) = +\infty$, ce qui est absurde.
On a donc bien montré que L est continue. Il existe donc M t.q. $L(f) \leq M\|f\|_u$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Etape 2
La restriction de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire positive. Le théorème 5.6 donne l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q.

$$L(f) = \int f\,dm \text{ pour tout } f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{5.3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\varphi_n = 1_{[-n,n]} + (x+n+1)1_{[-(n+1),-n]} + (n+1-x)1_{[n,n+1]},$$

et on prend $f = \varphi_n$ dans (5.3). On obtient $m([-n,n]) \leq L(\varphi_n) \leq M\|\varphi_n\|_u = M$. On a donc, en faisant $n \to +\infty$, $m(\mathbb{R}) \leq M$, ce qui prouve que m est une mesure finie.

Enfin, si $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on pose $f_n = f\varphi_n$. On remarque que f_n tend vers f dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est dominée par $|f|$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ car L est continue et $\lim_{n\to+\infty} \int f_n\,dm = \int f\,dm$ par convergence dominée. Comme $L(f_n) = \int f_n\,dm$ (car $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$), on obtient finalement $L(f) = \int f\,dm$. ■

Le résultat du théorème 5.12 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle sur C_b et nulle sur C_0. Si on note L une telle application (nulle sur C_0 mais non identiquement nulle sur C_b) et si m est une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $L(f) = \int f\,dm$ pour $f \in C_b$, on montre facilement (en utilisant $\int f\,dm = 0$ pour tout $f \in C_0$) que $m = 0$ et donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_b$, en contradiction avec le fait que L n'est pas identiquement nulle sur C_b.

Pour construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle et nulle sur C_0, on peut procéder de la manière décrite ci après. On note F le sous espace vectoriel de C_b formé des éléments de C_b ayant une limite en $+\infty$. On a donc $f \in F$ si $f \in C_b$ et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Pour $f \in F$ on pose $\tilde{L}(f) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. On a ainsi défini une forme linéaire positive sur F (car, pour

$f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique bien $\tilde{L}(f) \geq 0$). En utilisant le théorème 5.14 donné ci après, il existe donc L, forme linéaire positive sur C_b, t.q. $L = \tilde{L}$ sur F. L'application L est donc linéaire continue positive sur C_b (pour la continuité, on remarque que $|L(f)| \leq \|f\|_u$), elle est bien nulle sur C_0 (car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $f \in C_0 \subset F$) et non identiquement nulle sur C_b car $L(f) = 1$ si f est la fonction constante, égale à 1 en tout point.

Remarque 5.13 Soit E un espace de Banach réel, F un s.e.v. de E et T une application linéaire continue de F (muni de la norme de E) dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Hahn-Banach [**brezis**] donne alors l'existence d'une application linéaire continue $\bar{T}$ de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* $\bar{T} \in E'$) t.q. $\tilde{T} = T$ sur F. (Si F est dense dans E, le théorème de Hahn-Banach est inutile et on peut montrer aussi l'unicité de $\bar{T}$. Si F n'est pas dense dans E, $\tilde{T}$ n'est pas unique.) L'objectif du théorème 5.14 est de remplacer l'hypothèse de continuité de T par une propriété de positivité.

Théorème 5.14 (Hahn-Banach positif) *Soit* F *un sous espace vectoriel de* $C_b = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\}$ *et* T *une application linéaire de* F *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* F *contient les fonctions constantes et que* T *est positive (c'est-à-dire que, pour* $f \in F$, $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *implique* $T(f) \geq 0$*). Il existe alors* $\overline{T}$, *application linéaire positive sur* C_b, *t.q.* $\overline{T} = T$ *sur* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration n'est pas détaillée ici. Elle peut se faire en utilisant une technique très similaire à celle donnant la démonstration du théorème de Hahn-Banach (qui permet aussi de montrer le théorème de prolongement d'une application linéaire continue définie sur un sous espace vectoriel d'un espace de Banach). Elle peut aussi se faire en se ramenant à la version du théorème de Hahn-Banach donné, par exemple, dans le livre d'analyse fonctionnelle de H. Brezis [**brezis**].

Il est intéressant de noter que le résultat du théorème peut être faux si on retire l'hypothèse F contient les fonctions constantes. ■

On peut maintenant faire la remarque suivante :

Remarque 5.15 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R}) = \{f_{|_K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K,\mathcal{B}(K))$ l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K,\mathcal{B}(K),m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur

$(\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathrm{K}))$ t.q. :

$$\mathrm{L}(f) = \int f dm, \ \ \forall f \in \mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}).$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées : si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathrm{K}))$), l'application qui à $f \in \mathrm{C}_0$ (ou $\in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.16 (Riesz, mesures signées) *Soit* L *une application linéaire continue de* $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *(ou de* $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*, où* K *est un compact de* $\mathbb{R}$*). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(ou sur* $\mathcal{B}(\mathrm{K})$*) t.q. :*

$$\mathrm{L}(f) = \int f dm, \ \ \forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) (\text{ ou } \mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})).$$

Les éléments de $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))'$ *(ou* $(\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}))'$*) sont appelés mesures de Radon sur* $\mathbb{R}$ *(ou* K*). On rappelle que, pour un espace de Banach (réel)* E*, on note* E' *son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{R}$*.*

DÉMONSTRATION – Elle consiste à se ramener au théorème de Riesz pour des formes linéaires positives. Elle n'est pas détaillée ici. On rappelle seulement que si m est une mesure signée sur T (tribu sur un ensemble E). il existe deux mesures finies m^+ et m^- sur T, étrangères (c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m^+(\mathrm{A}) = m^-(\mathrm{A}^c) = 0$) et t.q. $m = m^+ - m^-$. On a alors (par définition)

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m^+) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m^-),$$

et, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$,

$$\int f dm = \int f dm^+ - \int f dm^-.$$

■

Définition 5.17 (Mesure de Radon) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}$*, alors on appelle mesure de Radon sur* $\overline{\Omega}$ *un élément de* $(\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}))'$*, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la norme infinie) de* $\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 5.18 Soit T une forme linéaire sur $\mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, on peut montrer qu'il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$\mathrm{T}(f) = \int f d\mu \text{ pour tout } f \in \mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R}).$$

Pour montrer l'existence de μ, on peut commencer par se ramener au théorème 5.16 en prolongeant T (de manière non unique) en une application linéaire continue sur $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ (ceci est possible par le théorème de Hahn-Banach). Le théorème 5.16 donne alors une (unique) mesure sur $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ correspondant à ce prolongement de T. La restriction de cette mesure à $\mathcal{B}(\Omega)$ est la mesure μ recherchée. Il est intéressant de remarquer que cette mesure μ est unique, sans que celle donnée par le théorème 5.16 soit unique (car cette dernière dépend du prolongement choisi de T à $C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$).

2. Si T est continue pour la topologie naturelle de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$, (c'est-à-dire que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K \in \mathbb{R}$ tel que $T(f) \le C_K\|f\|_\infty$, pour tout $f \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ avec $f = 0$ sur le complémentaire de K) alors le résultat donné dans le premier item (c'est-à-dire l'existence de μ) peut être faux ; par contre on peut montrer qu'il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur les boréliens de Ω telles que

$$T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2,\ \forall f \in C_c(\Omega,\mathbb{R});$$

on peut noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $N = 1$, $\Omega =]-1,1[$, $T(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nf(1-\frac{1}{n}) - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nf(-1+\frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1 - \mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens.

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\cdot\|_u$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$T(f) = \int f d\mu,\ \forall f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}).$$

5.3 Changement de variable, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts).

Proposition 5.19 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On définit*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ par } g(x) = f(\alpha x + \beta) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|}\int f d\lambda.$$

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

DÉMONSTRATION – 1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.

2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et
$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda, \tag{5.4}$$
on raisonne en plusieurs étapes :

   (a) On suppose que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}, x \in A\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}A - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(A)$, dans la proposition 2.48).

   (b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
   Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a aussi $\lambda(A_i) < +\infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}A_i - \frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.4) est vraie.

   (c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to +\infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors
   $$g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),\ g_n \uparrow g \text{ et } \int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda \text{ quand } n \to +\infty.$$
   Comme (5.4) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie.

   (d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Comme
   $$f = f^+ - f^-, \text{ avec } f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),$$
   on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.4) est vraie.

3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que
$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. }, \text{ avec } g_i(\cdot) = f_i(\alpha \cdot + \beta),\ i = 1, 2.$$
En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha \cdot + \beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ aussi près que l'on veut par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1 : on montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on passe à la limite.

Théorème 5.20 (Densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) *On note* $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. *L'ensemble* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *à support compact, est dense dans* L^1*, c'est-à-dire :*

$$\forall f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \|f-\varphi\|_1 < \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – On a déjà vu que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1$. En toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \leq \varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.43), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n = F \cap [-n,n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(F_n) \uparrow \lambda(F)$, quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda(F) \leq \lambda(A) < +\infty$, on a aussi $\lambda(F \setminus F_n) = \lambda(F) - \lambda(F_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 tel que $\lambda(F \setminus F_{n_0}) \leq \varepsilon$.

On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$, ce qui donne

$$\lambda(O \setminus K) \leq \lambda(O \setminus F) + \lambda(F \setminus K) \leq 2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) \leq 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$.

On pose

$$d = d(K, O^c) = \inf\{d(x,y), x \in K, y \in O^c\}.$$

Montrons que $d > 0$; par caractérisation de l'infimum, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O^c$ telles que

$$d(x_n,y_n) = |x_n - y_n| \to d \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous-suite) que $x_n \to x$, quand $n \to +\infty$. Si $d = 0$, on a alors aussi $y_n \to x$ quand $n \to +\infty$ et donc $x \in O^c \cap K$ (car K et O^c sont fermés), ce qui est impossible puisque $K \subset A \subset O$ et donc $O^c \cap K = \emptyset$. On a donc bien montré $d > 0$.

On définit maintenant la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x,K))^+ \text{ avec } d(x,K) = \inf\{d(x,y),\ y \in K\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x,K)$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,K) - d(y,K)| \leq |x-y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ tel que $K \subset [-A,A]$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur $[-A-d, A+d]^c$. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \leq \varphi \leq 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \leq |f-\varphi| \leq 1$, ce qui donne

$$\|f-\varphi\|_1 \leq \lambda(O \setminus K) \leq 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in T$ tels que $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(\mathrm{A}_i) < +\infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon > 0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\|1_{\mathrm{A}_i} - \varphi_i\|_1 \leq \varepsilon$. On pose

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

et on obtient

$$\|f - \varphi\|_1 \leq (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$$

(ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.9), il existe $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$ et

$$\int f d\lambda - \varepsilon \leq \int g dm \leq \int f dm,$$

de sorte que

$$\|g - f\|_1 = \int (f - g) d\lambda \leq \varepsilon,$$

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\|g - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. D'où l'on déduit

$$\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon,$$

ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^{\pm} \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\|f^+ - \varphi_1\|_1 \leq \varepsilon \text{ et } \|f^- - \varphi_2\|_1 \leq \varepsilon.$$

On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve bien la densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans L^1. ■

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.16. Par contre, le résultat de continuité en moyenne que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.16).

Théorème 5.21 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x+h) - f(x)| dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.5}$$

DÉMONSTRATION – Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.19). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

La démonstration de (5.5) fait l'objet de l'exercice 5.10. ■

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Définition 5.22 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\int^a$ existe) si $\int f 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta \to a$. Cette limite est notée $\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.23 Ceci ne veut pas dire que $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a = +\infty$, $\alpha = 0$, considérer la fonction f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.24 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \beta \in]\alpha, a[$, $f1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f1_{]\alpha,a[} \in L^1$.*

DÉMONSTRATION – Ce résultat se déduit du théorème de convergence monotone en remarquant que $f1_{]\alpha,\beta[} \uparrow f1_{]\alpha,a[}$ quand $\beta \uparrow a$. ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (La mesure de Dirac n'est pas une fonction...) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = (1-n|x|)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $]-1,1[$, et $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[,\mathcal{B}(]-1,1[),\lambda)$. Soit T l'application de $C([-1,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que $T \in \Big(C([-1,1],\mathbb{R})\Big)'$ (on rappelle que $\Big(C([-1,1],\mathbb{R})\Big)'$ est le dual de $C([-1,1],\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Soit $\varphi \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[,\mathcal{B}(]-1,1[),\delta_0)$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, et que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$.
3. Soient $g \in L^1$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   En déduire qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1$ telle qu'on ait, pour toute fonction $\varphi \in C([-1,1],\mathbb{R})$, $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$ (et donc que δ_0 n'est pas une mesure de densité).

Exercice 5.2 (Intégrale de Riemann) Soient a, b des réels, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, *i.e.* telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \le M, \forall t \in [a,b]$.

Soit Δ une subdivision de $[a,b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. On pose

$$S^\Delta = \sum_{i=0}^{N} (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i) \text{ et } S_\Delta = \sum_{i=0}^{N} (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1}-x_i).$$

On note A l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, $S^* = \inf_{\Delta\in A} S^\Delta$ et $S_* = \sup_{\Delta\in A} S_\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^* = S_*$.

On pose alors $R\int_a^b f(x)dx = S^*$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2 \in A$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1} \le S_{\Delta_2} \le S^{\Delta_2} \le S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta \le S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta, \Delta' \in A$, et donc que $S_* \le S^*$.
2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n} \to S_*$ et $S^{\Delta_n} \to S^*$ quand $n \to +\infty$.
3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.
4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions notée $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{\Delta_n} \to S_*$ et $S^{\Delta_n} \to S^*$ quand $n \to +\infty$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{N_n+1}^{(n)}\}$ et on pose :

$$g_n(x) = \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, N_n, \qquad (5.6)$$

$$h_n(x) = \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, \mathrm{N}_n, \tag{5.7}$$

$$g_n(b) = h_n(b) = 0. \tag{5.8}$$

(a) Montrer que $g_n, h_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\{[a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda\})$ et que $\int (h_n - g_n) d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que $g_n \le g_{n+1} \le f \le h_{n+1} \le h_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$; montrer que $g = h$ p.p.. En déduire que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \mathrm{R}\int_a^b f(x) dx$.

5. Soit f définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \tag{5.9}$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \tag{5.10}$$

Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$.

Exercice 5.3 (Convergence de la dérivée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($\subset \mathrm{C}(]0,1[, \mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Corrigé – *La réponse est non. La fonction f peut même ne pas être continue, comme le montre l'exemple suivant :*

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$, on définit g_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 + n^2(x - \frac{1}{2}) & si\ \frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 - n^2(x - \frac{1}{2} - \frac{2}{n}) & si\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{2} + \frac{2}{n}, \\ 1 & si\ \frac{1}{2} + \frac{2}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $g_n \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ et que $g_n(x) \to 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Pour $n \ge 4$, on définit f_n par :

$$f_n(x) = \int_0^x g_n(t) dt, \text{ pour tout } x \in]0,1[,$$

de sorte que $f_n \in \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f'_n = g_n$ sur $]0,1[$. On a donc bien que $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante et égale à 1. (On prend n'importe quelles fonctions C^1 pour f_n, $0 \le n \le 3$).

On remarque maintenant que, pour $n \ge 4$, $f_n(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et que $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2} + \frac{2}{n}, 1[$. On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}]$ et $f_n(x) = x + 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Cette fonction n'est pas continue en $\frac{1}{2}$, donc $f \notin \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$.

2. On suppose maintenant que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ vers la fonction constante et égale à 1. A-t-on $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$?

   Corrigé – *La réponse maintenant est oui. En effet, soit $0 < x < 1$. Comme $f_n \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$, on a $f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^x f_n'(t)dt$, c'est-à-dire*

$$f_n(x) = f_n(\frac{1}{2}) + s_x \int f_n' 1_{I_x} d\lambda, \tag{5.11}$$

   avec $s_x = 1$ et $I_x =]\frac{1}{2}, x[$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $s_x = -1$ et $I_x =]x, \frac{1}{2}[$ si $x < \frac{1}{2}$.

   Quand $n \to +\infty$, on a

$$|\int f_n' 1_{I_x} d\lambda - \int 1_{I_x} d\lambda| \leq \|f_n' - 1\|_1 \to 0,$$

   et $f_n(x) \to f(x)$ (ainsi que $f_n(\frac{1}{2}) \to f(\frac{1}{2})$). On déduit donc de (5.11), quand $n \to +\infty$,

$$f(x) = f(\frac{1}{2}) + s_x \int 1_{I_x} d\lambda,$$

   c'est-à-dire $f(x) = f(\frac{1}{2}) + x - \frac{1}{2}$.

   On a bien montré que $f \in C^1(]0,1[,\mathbb{R})$ et $f' = 1$.

Exercice 5.4 (Intégrale impropre) On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0, \text{ si } x \leq 0,$$
$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *La fonction f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ si $x > 0$.*

   Pour montrer la continuité et la dérivabilité de f en 0, il suffit de remarquer que, pour tout $x > 0$, on a $|f(x)| \leq x^2$ et donc $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| \leq x$. On en déduit que f est continue et dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2. Soit $0 < a < b < +\infty$. Montrer que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f'1_{]a,b[}d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

   Corrigé – *La fonction f' est continue sur $]0,+\infty[$. La restriction de f' à $[a,b]$ est donc continue (on utilise ici le fait que $a > 0$). On a donc, voir la proposition 5.1 (ou l'exercice 4.5) :*

$$f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b],\mathcal{B}([a,b]),\lambda_{[a,b)}),$$

où $\lambda_{[a,b)}$ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $[a,b]$ (c'est-à-dire la restriction à $\mathcal{B}([a,b])$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et l'intégrale (de Lebesgue) de $f'_{|[a,b]}$ coïncide avec l'intégrale des fonctions continues, c'est-à-dire :

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int_a^b f'(x)dx.$$

Le terme de droite de l'égalité précédente est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues. Comme f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert contenant $[a,b]$, il est alors classique que :

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pour se convaincre de cette dernière égalité, on rappelle que f et $x \mapsto \int_a^x f'(t)dt$ sont deux primitives de f', leur différence est donc constante sur $[a,b]$.

Enfin, comme $f'_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)})$, il est facile d'en déduire que $f' 1_{]a,b[}$ $\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que

$$\int f'_{|[a,b]} d\lambda_{[a,b)} = \int f' 1_{]a,b[} d\lambda.$$

Plus précisément, on pose $f' = g$ et on considère d'abord le cas $g_{|[a,b]} \in \mathcal{E}_+([a,b],$ $\mathcal{B}([a,b])$ puis $g_{|[a,b]} \in \mathcal{M}_+([a,b], \mathcal{B}([a,b])$ et enfin $g_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b)})$, comme dans l'exercice 4.4. Ceci termine la question.

Un autre moyen de montrer $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est de procéder de la manière suivante :

La fonction f' est la limite simple, quand $n \to +\infty$, de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où f_n est définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est mesurable (c'est-à-dire borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de la tribu de Borel). Grâce à la stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables (voir la proposition 3.19), on en déduit que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc que f' est mesurable (comme limite simple de fonctions mesurables). La fonction $f' 1_{]a,b[}$ est donc aussi mesurable (comme produit de fonctions mesurables). La mesurabilité de $f' 1_{]a,b[}$ est donc vraie pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (noter cependant que f' n'est pas continue en 0).

Pour montrer que $f' 1_{]a,b[}$ est intégrable, il suffit de remarquer que f' est bornée sur $]a,b[$, car f' est continue sur $[a,b]$ (on utilise ici le fait que $a > 0$) et que $\lambda(]a,b[) < +\infty$. On a donc bien montré que $f' 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

3. Soit $a > 0$.

(a) Montrer $f' 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Corrigé – *La restriction de f' à $]0,a[$ est continue, c'est donc une fonction mesurable (c'est-à-dire borélienne) de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit facilement que*

$f'1_{]0,a[}$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. (On a aussi vu à la question précédente que f' est borélienne. Ceci montre également que $f'1_{]0,a[}$ est borélienne.)

On a $f'1_{]0,a[} = g_1 1_{]0,a[} - g_2 1_{]0,a[}$, avec :

$$g_1(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} \text{ et } g_2(x) = \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]0,a[.$$

Il est clair que $g_1 1_{]0,a[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (car g_1 est continue et bornée sur $]0,a[$). Pour montrer que $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, il suffit donc de montrer que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Pour cela, on remarque maintenant que :

$$|g_2(x)| \geq \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}, \text{ si } \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}},\ n \geq n_0, \tag{5.12}$$

avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{n_0\pi - \frac{\pi}{4}}} \leq a$. On déduit alors de (5.12), par monotonie de l'intégrale, que, pour tout $\mathrm{N} \geq n_0$:

$$\begin{aligned}\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda &\geq \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \sqrt{2}\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1}{\sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}}\Big) \\ &= \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \sqrt{2}\frac{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} - \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}},\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda &\geq \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}(\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} + \sqrt{n\pi - \frac{\pi}{4}})} \\ &\geq \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} \frac{\sqrt{2}\pi}{4(n\pi + \frac{\pi}{4})}.\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que $\int |g_2| 1_{]0,a[} d\lambda = +\infty$ et donc que $g_2 1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

(b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement... car $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, la restriction de f' à $]0,a[$ n'est donc pas intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0,a[$.)

Corrigé – *On a $g(x) = f(a) - f(x)$, pour tout $x > 0$. Comme f est continue en 0, on en déduit bien que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$.*

Exercice 5.5

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit F : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $F(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $F(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Corrigé – *On remarque que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,*

$$F(y) - F(x) = \int f 1_{]x,y[} d\lambda = \int_{]x,y[} f d\lambda.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, l'exercice 4.16 (ou l'exercice 4.33) montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. On a donc, comme $\lambda(]x,y[) = y - x$,

$$|y - x| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - F(x)| \leq \int_{]x,y[} |f| d\lambda \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien la continuité uniforme de F.

Exercice 5.6 (Intégrabilité et limite à l'infini) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.

   Corrigé – *On pose $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et on suppose $l \neq 0$. Il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \geq \frac{|l|}{2}$ pour tout $x > a$. On en déduit, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$,*

   $$\int |f| d\lambda \geq \int_{]a,+\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty,$$

   en contradiction avec l'hypothèse $f \in \mathcal{L}^1$.

2. On suppose que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

   Corrigé –
   La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, f_n par :

   $$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq n - \frac{1}{n^2}, \\ n^2(x - n + \frac{1}{n^2}) & si\ n - \frac{1}{n^2} < x \leq n, \\ -n^2(x - n - \frac{1}{n^2}) & si\ n < x \leq n + \frac{1}{n^2}, \\ 0 & si\ x > n + \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

   Puis, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série définissant $f(x)$ a au plus un terme non nul. Plus précisément, il existe n (dépendant de x) tel que $f = f_n$ dans un voisinage de x. On en déduit que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et que f est continue (car les f_n sont continues). Comme $f_n \in \mathcal{M}_+$

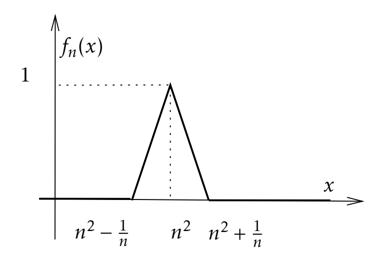


FIGURE 5.1 – La fonction f_n

pour tout n, le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\int f dm = \sum_{n\geq 2}\int f_n dm = \sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2} < +\infty.$$

On a donc $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$ car $f_n(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?
[On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{x_n-\eta}^{x_n+\eta}|f(x)|d\lambda(x) = 0.]$$

Corrigé – *On commence par montrer le résultat préliminaire suggéré.*
Soient $\eta > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite telle que. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On pose $f_n = |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$ (on a même $f_n(x) = 0$ pour n tel que $x_n - \eta > x$). On a aussi $|f_n| \leq |f| \in \mathcal{L}^1$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (ou la proposition préliminaire 4.29). Il donne que $\int f_n dm \to 0$, c'est-à-dire :

$$\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \to 0, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.13}$$

On montre maintenant que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $x_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $|f(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La continuité uniforme de f donne l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$x,y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc $|f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n-\eta,x_n+\eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int |f|1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \geq \varepsilon\eta > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est en contradiction avec (5.13).

On a donc bien finalement montré que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

4. On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f' \in L^1$; a-t-on : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

   Corrigé – *Comme $f \in C^1$, on a, pour $y > x$, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt = \int_{]x,y[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, l'exercice 5.5 donne que f est uniformément continue. La question précédente donne alors que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).*

   Une autre démonstration possible est : Comme $f \in C^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_{]0,x[} f' d\lambda$. Comme $f' \in \mathcal{L}^1$, on en déduit que $f(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. En effet, le théorème de convergence dominée donne que $\int_{]0,x[} f' d\lambda \to \int_{]0,+\infty[} f' d\lambda$ (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to +\infty$. Enfin, la première question donne que la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ est nécessairement 0 (et ici aussi, c'est seulement pour ce dernier point qu'on utilise $f \in \mathcal{L}^1$).

Exercice 5.7 (Intégrabilité de certaines fonctions) On s'intéresse dans cet exercice à l'intégrabilité de fonctions classiques.

1. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[,\lambda)$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. On pose, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = (\frac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$?
2. On considère l'espace mesuré $(E,T,m) = (\mathbb{R}_+^*,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*),\lambda)$. Soit f définie, pour $x \in]0,+\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.8 (Égalité presque partout de fonctions continues) On munit $\mathbb{R}^N$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Cette mesure, dont l'existence sera prouvée au chapitre 7, vérifie :

$$\lambda_N\left(\prod_{i=1}^{N} A_i\right) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(A_i), \forall A_1,\dots A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ ; \lambda(A_i) < +\infty, i = 1,\dots,N.$$

Soient f et $g \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ telles que $f = g$ p.p.. Montrer que $f = g$ partout. [On dira donc que $f \in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ est continue s'il existe $g \in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ telle que $f = g$ p.p. (plus précisément on devrait écrire $g \in f$). Dans ce cas on identifie f avec g.]

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. Soit $x = (x_1,\dots,x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(x) \neq g(x)$. Comme f et g sont continues, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(y) \neq g(y)$ pour tout $y \in \prod_{i=1}^N]x_i - \alpha, x_i + \alpha[$. On en déduit que $\lambda_N(\{f \neq g\}) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^N]x_i - \alpha, x_i + \alpha[) = (2\alpha)^N > 0$, en contradiction avec $f = g$ p.p..*

Exercice 5.9 (Un sous espace de $H^1(\mathbb{R})$) (*Notation : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f^2(x) = (f(x))^2$.*)

On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}); f \in L^1 \text{ et } f'^2 \in L^1\}$.

Pour $f \in E$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?

Corrigé – *Pour $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $\|g\|_1 = \int |f(x)|dx$, $\|g\|_2 = (\int g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ et*

$$F_1 = \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|g\|_1 < +\infty\}, \qquad F_2 = \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|g\|_2 < +\infty\}.$$

L'espace F_1, muni de $\|\cdot\|_1$ est un espace espace vectoriel normé (on ne détaille pas ce point ici, assez simple à démontrer). Il est un peu plus difficile de montrer que l'espace F_2, muni de $\|\cdot\|_2$, est aussi un espace vectoriel normé. Si $g \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda g \in F_2$ et $\|\lambda g\|_2 = |\lambda|\|g\|_2$. Puis, si g, $h \in F_2$, on montre que $g + h \in F_2$ en remarquant, par exemple, que $|g(x) + h(x)|^2 \le 4(|g(x)|^2 + |h(x)|^2)$. Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire (ce point est le plus délicat), on montre tout d'abord que, pour tout g, $h \in F_2$, on a

$$\int |g(x)h(x)|dx \le \|g\|_2\|h\|_2,$$

ce qui peut se montrer en remarquant que $\int |\alpha g(x) + h(x)|^2 dx \ge 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\|g+h\|_2^2 = \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\int g(x)h(x)dx \le \|g\|_2^2 + \|h\|_2^2 + 2\|g\|_2\|h\|_2 = (\|g\|_2 + \|h\|_2)^2,$$

et donc $\|g + h\|_2 \le \|g\|_2 + \|h\|_2$.

On remarque maintenant que $E = \{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\ f \in F_1$ et $f' \in F_2\}$ et que, pour $f \in E$, $\|f\| = \|f\|_1 + \|f'\|_2$. On déduit que E, muni de $\|\cdot\|$, est un espace vectoriel normé.

On va montrer maintenant que E, muni de $\|\cdot\|$, n'est pas un espace de Banach. Pour cela, on va construire une suite de Cauchy de E, non convergente (c'est-à-dire non convergente dans E muni de la norme $\|\cdot\|$).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit g_n par

$$g_n(x) = 0 \text{ si } x \le -1 - \frac{1}{n},$$
$$g_n(x) = n(x + 1 + \frac{1}{n}) \text{ si } -1 - \frac{1}{n} < x \le -1$$
$$g_n(x) = -x \text{ si } -1 < x \le 1,$$
$$g_n(x) = n(x - 1 - \frac{1}{n}) \text{ si } 1 < x \le 1 + \frac{1}{n},$$
$$g_n(x) = 0 \text{ si } 1 + \frac{1}{n} < x.$$

Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{-2}^{x} g_n(y)dy$. La fonction g_n est continue, à support compact et d'intégrale (sur $\mathbb{R}$) nulle. La fonction f_n est donc de classe C^1 (et $f_n' = g_n$) et à support compact. On en déduit que $f_n \in E$.

Enfin, on définit g et f par

$$g(x) = 0 \text{ si } x < -1, \qquad g(x) = -x \text{ si } -1 < x < 1, \qquad g(x) = 0 \text{ si } 1 < x$$
$$f(x) = \int_{-2}^{x} g(y)dy \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On remarque que $f \notin \mathrm{E}$ *(f n'est pas de classe* C^1*). On a* $g_n \to g$ *p.p. et, par convergence dominée (car* $|g_n| \le 1$ *p.p.), on a aussi* $f_n(x) \to f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Puis, en utilisant encore le théorème de convergence dominée, on a aussi*

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|^2 dx \to 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

(Pour la domination, il suffit de remarquer que $|g_n - g|^2 \le 1_{[-2,2]}$ *et* $|f_n - f| \le 1_{[-2,2]}$ *p.p..) On en déduit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est de Cauchy dans* E *mais ne converge pas dans* E *car la limite dans* E*, si elle existait, serait nécessairement égale à* f *(qui n'est pas dans* E*)*

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a \le \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$. En déduire que pour $f \in \mathrm{E}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|f(x) - f(y)| \le \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta}|x - y|$.

Corrigé – *Si* $a > 1/\delta$*, on a alors* $a\delta > 1$ *et donc* $a^2\delta > a$*, c'est-à-dire* $a < a^2\delta$*. On en déduit que* $a \le 1/\delta + a^2\delta$.

Soient $f \in \mathrm{E}$*,* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\delta \in \mathbb{R}_+^*$*. On suppose* $y \le x$*. Comme* $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *on a* $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(z)dz$*. En utilisant l'inégalité précédente avec* $a = f'(z)$*, on a donc*

$$|f(x) - f(y)| \le \int_x^y |f'(z)| dz \le \int_x^y (\delta |f'(z)|^2 + \frac{1}{\delta}) dz \le \delta \int_{\mathbb{R}} |f'(z)|^2 dz + \frac{1}{\delta}|x - y|.$$

(Bien sûr, le même résultat est vrai si $x < y$*.)*

3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que f est uniformément continue, bornée, et que $f^2 \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *La question précédente montrer que tout* $\delta > 0$ *on a*

$$|f(x) - f(y)| \le \delta \|f\|^2 + \frac{1}{\delta}|x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

On déduit que f *est uniformément continue. En effet, soit* $\varepsilon > 0$*. On choisit* $\delta > 0$ *tel que* $\delta \|f\|^2 \le \varepsilon$ *et on pose* $\eta = \varepsilon\delta$*. On a alors, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon + \frac{1}{\delta}\eta = 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve l'uniforme continuité de f.

On montre maintenant que f *est bornée. Ceci est une conséquence, par exemple, de l'exercice 5.6 (mais plusieurs autres méthodes sont possibles). Comme* f *est intégrable et uniformément continue, la question 3 de l'exercice 5.6 donne que* $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et donc que* f *est bornée.*

On note $\mathrm{M} = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$*. On vient de montrer que* $\mathrm{M} < +\infty$*. On en déduit* $\int f^2 d\lambda \le \mathrm{M} \int |f| d\lambda \le \mathrm{M}\|f\| < +\infty$ *et donc* $f^2 \in \mathrm{L}^1$.

Exercice 5.10 (Continuité en moyenne) Pour $f \in \mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in \mathrm{L}^1$).

1. Soit $f \in \mathrm{C}_c = \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

   Corrigé – *Comme $f \in \mathrm{C}_c$, f est uniformément continue, ce qui donne*
   $$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$
   Soit $a > 0$ tel que $f = 0$ sur $[-a, a]^c$. Pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \le 1$, on a donc, comme $f(x+h) - f(x) = 0$ si $x \notin [-a-1, a+1]$,
   $$\int |f(x+h) - f(x)| dx \le (2a+2) \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)| \to 0, \text{ quand } h \to 0,$$
   et donc que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.

2. Soit $f \in \mathrm{L}^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

   Corrigé – *L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot + h) \in \mathrm{L}^1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.*

   Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^1 (théorème 5.20), il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{C}_c$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot + h) - \varphi(\cdot + h)\|_1 = \|f - \varphi\|_1$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:
   $$\|f(\cdot + h) - f\|_1 \le 2\|f - \varphi\|_1 + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \le 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1.$$
   D'après la première question, il existe $\eta > 0$ t.q.
   $$|h| \le \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \le \varepsilon.$$
   Donc,
   $$|h| \le \eta \Rightarrow \|f(\cdot + h) - f\|_1 \le 3\varepsilon.$$
   Ce qui prouve bien que $f(\cdot + h) \to f$ dans L^1, quand $h \to 0$.

Exercice 5.11 (Non existence de borélien "bien équilibré")

On note $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Pour $f \in \mathrm{L}^1$, $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit
   $$f_h(x) = \frac{1}{\lambda(\mathrm{B}(0,h))} \int_{\mathrm{B}(x,h)} f(y) dy,$$
   où $\mathrm{B}(x,h)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon h. Montrer que f_h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f_h \in \mathrm{L}^1$ et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de continuité en moyenne dans L^1.]

   En déduire qu'il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.
   Noter que ce résultat s'étend au cas $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$, où λ_{N} est la mesure de Lebesgue N-dimensionnelle, définie au chapitre 7.

2. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A inclus dans [0,1] et tel que $\lambda(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{I} \cap \mathrm{A}^c) = \frac{\lambda(\mathrm{I})}{2}$ pour tout intervalle I de $[0,1]$. [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente et f convenablement choisie. Cette question est aussi une conséquence de l'exercice 5.12.]

Exercice 5.12 (Sur la concentration d'un borélien) Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[)$ et $\rho \in]0,1[$. On suppose que $\lambda(\mathrm{A} \cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ pour tous α,β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$. Montrer que $\lambda(\mathrm{A}) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) \le \rho\lambda(\mathrm{O})$ pour tout ouvert O de $]a,b[$.]

Conséquence de cet exercice : Si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[)$ est tel que $\lambda(\mathrm{A}) > 0$, alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α,β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$ et $\lambda(\mathrm{A} \cap]\alpha,\beta[) \ge \rho(\beta-\alpha)$.

Corrigé – *Soit* O *un ouvert de* $]a,b[$*. Comme* O *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*, il peut s'écrire comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44). On a donc* $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ *avec* $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n =]a_n,b_n[$ *avec* $a \le a_n \le b_n \le b$*. La* σ*-additivité de* λ *et l'hypothèse* $\lambda(\mathrm{A} \cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ *pour tout* α,β *tels que* $a \le \alpha < \beta \le b$ *donne alors :*

$$\lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathrm{A} \cap]a_n,b_n[) \le \rho \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) = \rho \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(]a_n,b_n[) = \rho\lambda(\mathrm{O}). \quad (5.14)$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$*. D'après la régularité de* λ *(et le fait que* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(]a,b[) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$*), il existe* O *ouvert de* $\mathbb{R}$ *tel que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ *et* $\lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \le \varepsilon$*. En remplaçant* O *par* $\mathrm{O} \cap]a,b[$*, on peut supposer que* O *est un ouvert de* $]a,b[$*. En utilisant (5.14) et l'additivité de* λ*, on a donc :*

$$\lambda(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{O}) \le \rho\lambda(\mathrm{O}) = \rho(\lambda(\mathrm{A}) + \lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A})) \le \rho(\lambda(\mathrm{A}) + \varepsilon).$$

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit, on en déduit* $\lambda(\mathrm{A}) \le \rho\lambda(\mathrm{A})$*, ce qui n'est possible (comme* $\rho < 1$*) que si* $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ *ou si* $\lambda(\mathrm{A}) = +\infty$*.*

Il reste donc à montrer que le cas $\lambda(\mathrm{A}) = +\infty$ *est impossible. Pour cela, on pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \mathrm{A} \cap [-n,n]$*. Soit* $n \in \mathbb{N}$*, la monotonie de* λ *donne* $\lambda(\mathrm{A}_n \cap]\alpha,\beta[) \le \lambda(\mathrm{A} \cap]\alpha,\beta[)$*, on a donc aussi* $\lambda(\mathrm{A}_n \cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta-\alpha)$ *pour tout* α,β *tels que* $a \le \alpha < \beta \le b$*. Comme* $\lambda(\mathrm{A}_n) < +\infty$*, la démonstration précédente, appliquée à* A_n *au lieu de* A*, donne* $\lambda(\mathrm{A}_n) = 0$*. Enfin, comme* $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$*, on en déduit* $\lambda(\mathrm{A}) = 0$*.*

Exercice 5.13 (Points de Lebesgue) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathrm{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tels que chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $\mathrm{I}_k =]a_k,b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints deux à deux.

Corrigé – *Soit* $k \in \{1, \ldots, n\}$*. Comme* $a_k \leq a_{k+1}$*, on a* $b_k < b_{k+1}$ *(sinon* $\mathrm{I}_{k+1} \subset \mathrm{I}_k$*). La suite* $(b_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ *est donc (strictement) croissante.*

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$*. On a* $b_k \leq a_{k+2}$ *(sinon* $\mathrm{I}_k \cup \mathrm{I}_{k+2} =]a_k, b_{k+2}[$ *et donc* $\mathrm{I}_{k+1} \subset \mathrm{I}_k \cup \mathrm{I}_{k+2}$ *car* $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_{k+2}$*). On a donc* $\mathrm{I}_k \cap \mathrm{I}_{k+2} = \emptyset$*. Ceci prouve (avec la croissance de* $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$*) que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints deux à deux.*

2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous–famille finie de J, notée $(\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m)$, formée d'intervalles disjoints deux à deux et tels que $\lambda(\mathrm{A}) \leq 2\sum_{k=1}^{m} \lambda(\mathrm{I}_k)$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – *On commence par montrer la propriété suivante :*

Pour toute famille finie J d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$*, il existe une sous-famille K telle que :*

(a) chaque élément de K n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de K,

(b) la réunion des éléments de K est égale à la réunion des éléments de J.

Cette propriété se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de J. Elle est immédiate si J a un seul élément (on prend K= J). Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. On suppose que la propriété est vraie pour toutes les familles de* n *éléments. Soit J une famille de* $(n+1)$ *éléments. Si chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J, on prend K= J. Sinon, on choisit un élément de J, noté* I*, contenu dans la réunion des autres éléments de J. On applique alors l'hypothèse de récurrence à la famille J* $\setminus\{\mathrm{I}\}$*, on obtient une sous famille de J* $\setminus\{\mathrm{I}\}$ *(et donc de J), notée K, vérifiant bien les assertions* (a) *et* (b) *(en effet, la réunion des éléments de J* $\setminus\{\mathrm{I}\}$ *est égale à la réunion des éléments de J). Ceci termine la démonstration de la propriété désirée.*

Soit maintenant J une famille finie d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ *dont la réunion est notée* A *(remarquer que* $\mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathbb{R})$*). Grâce à la propriété démontrée ci-dessus, on peut supposer que chaque élément de J n'est pas contenu dans la réunion des autres éléments de J. On note* $\mathrm{J}_1, \ldots \mathrm{J}_n$ *les éléments de J,* $\mathrm{J}_i =]a_i, b_i[$*,* $i = 1, \ldots, n$*. En réordonnant, on peut aussi supposer que la suite* $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ *est croissante. On peut alors appliquer la question 1, elle donne, en posant* $\mathrm{P} = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ pair}\}$ *et* $\mathrm{I} = \{i = 1, \ldots, n;\ i \text{ impair}\}$ *que les familles* $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{P}}$ *et* $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *sont formées d'éléments disjoints deux à deux, de sorte que :*

$$\lambda\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{P}} \mathrm{J}_i\Big) = \sum_{i\in\mathrm{P}} \lambda(\mathrm{J}_i), \quad \lambda\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{J}_i\Big) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda(\mathrm{J}_i).$$

Enfin, comme $\mathrm{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{J}_i$*, la sous–additivité de* λ *donne*

$$\lambda(\mathrm{A}) \leq \sum_{i\in\mathrm{P}} \lambda(\mathrm{J}_i) + \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda(\mathrm{J}_i).$$

Une sous–famille de J satisfaisant les conditions demandées est alors $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{P}}$ *si* $\sum_{i\in\mathrm{P}} \lambda(\mathrm{J}_i) \geq \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda(\mathrm{J}_i)$ *et* $(\mathrm{J}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *si* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda(\mathrm{J}_i) > \sum_{i\in\mathrm{P}} \lambda(\mathrm{J}_i)$*.*

On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ p.p. sur $[-a, a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.15}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit f_ε^* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon^*(x) = \sup_{h\geq\varepsilon} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.16}$$

3(a) Montrer que f_ε^* est bornée.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour $h \geq \varepsilon$, $\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$ donc $f_\varepsilon^*(x) \in \mathbb{R}$ et $|f_\varepsilon^*(x)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$. La fonction f_ε^* est donc bornée par $\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_1$.*

(b) Montrer que f_ε^* est borélienne. [On pourra montrer que f_ε^* est le sup de fonctions continues.]

Corrigé – *Soit $h > 0$. On définit f_h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_h(x) = \int_{-h}^{h}|f(x+t)|dt$. La fonction f_h est continue car*

$$|f_h(x+\eta)-f_h(x)| = |\int_{-h}^{h}(|f(x+\eta+t)|-|f(x+t)|)dt| \leq \int_{-h}^{h}|f(x+\eta+t)-f(x+t)|dt$$
$$\leq \int |f(x+\eta+t)-f(x+t)|dt = \|f(\cdot+\eta)-f\|_1 \to 0, \text{ quand } \eta \to 0,$$

par le théorème de continuité en moyenne. (Ceci donne même la continuité uniforme.)

On en déduit que f_ε^* est borélienne comme sup de fonctions continues. En effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$(f_\varepsilon^*)^{-1}(]\alpha,+\infty[) = \bigcup_{h\geq\varepsilon}(\frac{1}{2h}f_h)^{-1}(]\alpha,+\infty[)$$

et donc $(f_\varepsilon^*)^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ est un ouvert, et donc aussi un borélien.

(c) Montrer que $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\eta > 0$. On a (avec la notation de la question précédente), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2h}f_h(x) \leq \eta$ si $h \geq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. D'autre part, on a $f_h(x) = 0$ si $h \leq \frac{\|f\|_1}{2\eta}$ et $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. On en déduit que $0 \leq f_\varepsilon^*(x) \leq \eta$ si $|x| \geq a + \frac{\|f\|_1}{2\eta}$. Ceci prouve que $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.*

4. Pour $y > 0$, on pose $B_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}, f_\varepsilon^*(x) > y\}$.

(a) Montrer que tout $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $\mathrm{I}(x)$ tel que :

i. $\lambda(\mathrm{I}(x)) \geq 2\varepsilon$,

ii. $\frac{1}{\lambda(\mathrm{I}(x))}\int_{\mathrm{I}(x)} |f| d\lambda > y$.

Montrer que parmi les intervalles $\mathrm{I}(x)$, $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $\mathrm{I}(x_1), \ldots, \mathrm{I}(x_n)$ dont la réunion recouvre $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est borné.]

Corrigé – *Si* $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$, *il existe* $h \geq \varepsilon$ *tel que* $\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt > y$. *On choisit alors* $\mathrm{I}(x) =]x-h, x+h[$. *On a bien i. et ii..*

$\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ *est borné car* $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ *quand* $|x| \to +\infty$. $\overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$ *est donc fermé et borné (donc compact). De plus, si* $z \in \overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$, *il existe* $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ *tel que* $|x - z| < \varepsilon$. *On a donc* $z \in \mathrm{I}(x)$. *Ceci montre que* $\{\mathrm{I}(x),\ x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}\}$ *forme un recouvrement ouvert de* $\overline{\mathrm{B}}_{y,\varepsilon}$. *Par compacité, on peut donc en extraire un sous recouvrement fini. Il existe donc* $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ *tels que* $\mathrm{B}_{y,\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{I}(x_i)$.

(b) Montrer que $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

Corrigé – *En appliquant la question 2 à la famille* $\{\mathrm{I}(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$, *il existe* $\mathrm{E} \subset \{1, \ldots, n\}$ *tel que* $\mathrm{I}(x_i) \cap \mathrm{I}(x_j) = \emptyset$ *si* $i, j \in \mathrm{E}$ $i \neq j$ *et* $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \lambda(\bigcup_{i=1}^n \mathrm{I}(x_i)) \leq 2\sum_{i\in\mathrm{E}} \lambda(\mathrm{I}(x_i))$. *Comme* $\lambda(\mathrm{I}(x_i)) < \frac{1}{y}\int_{\mathrm{I}(x_i)} |f(t)|dt$ *et comme* $\mathrm{I}(x_i) \cap \mathrm{I}(x_j) = \emptyset$, *si* $i, j \in \mathrm{E}$, $i \neq j$, *on a aussi* $\sum_{i\in\mathrm{E}} \lambda(\mathrm{I}(x_i)) < \frac{1}{y}\int |f(t)|dt$ *et donc* $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$.

On définit maintenant f^* de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.17}$$

5. Montrer que f^* est borélienne et que $\lambda(\{f^* > y\}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.

Corrigé – *La fonction* f^* *est borélienne (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) car c'est le supremum de fonctions continues de* $\mathbb{R}$. *dans* $\mathbb{R}$.

On remarque ensuite que $\{f^* > y\} = \{x \in \mathbb{R},\ f^*(x) > y\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}}$ *et que* $\mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}} \subset \mathrm{B}_{y,\frac{1}{n+1}}$ *(car* $f_{\frac{1}{n}}^* \leq f_{\frac{1}{n+1}}^*$*). Par continuité croissante de* λ, *on a donc* $\lambda(\{f^* > y\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(\mathrm{B}_{y,\frac{1}{n}}) \leq \frac{2}{y}\|f\|_1$.

6. Montrer (5.15) si f admet un représentant continu. [Cette question n'utilise pas les questions précédentes.]

Corrigé – *On confond* f *(qui est dans* L^1*) avec ce représentant continu. On a alors* $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *quand* $n \to +\infty$. *En effet, pour*

tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, par continuité de f, il existe $\theta_{x,n} \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ tel que $\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt = f(\theta_{x,n})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(\theta_{x,n}) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$ (par continuité en x de f).

7. Montrer (5.15). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f - f_p)^*$.]

Corrigé – *On confond f (qui est dans L^1) avec l'un de ses représentants (de sorte que $f \in \mathcal{L}^1$). Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1, il existe une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_p \to f$ dans L^1 lorsque $p \to +\infty$. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer aussi que $f_p \to f$ p.p..*

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| + (f-f_p)^*(x). \quad (5.18)$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_{m,p} = \{(f-f_p)^* > \frac{1}{m}\},\ B_{m,p} = \bigcap_{q\ge p} A_{m,q} \text{ et } B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_{m,p}).$$

On remarque que, par la question 5, $\lambda(A_{m,p}) \le 2m\|f - f_p\|_1 \to 0$ quand $p \to +\infty$ (avec m fixé). On a donc $\lambda(B_{m,p}) \le \inf_{q\ge p}\lambda(A_{m,q}) = 0$. On en déduit, par σ-sous-additivité de λ, que $\lambda(B) = 0$.

On choisit $C \in B(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(C) = 0$ et $f_p(x) \to f(x)$ pour tout $x \in C^c$.

On va maintenant montrer (grâce à (5.18)) que $(f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt) \to 0$ pour tout $x \in (B\cup C)^c$ (ce qui permet de conclure car $\lambda(B\cup C) = 0$).

Soit donc $x \in (B\cup C)^c$ et soit $\eta > 0$. Comme $x \in C^c$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - f_p(x)| \le \eta$ pour $p \ge p_1$. Comme $x \in B^c$, $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*}(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p})$. On choisit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} \le \eta$. On a

$$x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} B^c_{m,p} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{q\ge p} A^c_{m,q} \subset \bigcup_{q\ge p_1} A^c_{m,q}.$$

Il existe donc $p \ge p_1$ tel que $x \in A^c_{m,p}$, on en déduit $(f - f_p)^*(x) \le \frac{1}{m} \le \eta$. Enfin, p étant maintenant fixé, la question 6 donne l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|f_p(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_p(x+t)dt| \le \eta$ pour $n \ge n_1$. On a donc

$$|f(x) - \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt| \le 3\eta \text{ pour } n \ge n_1,$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 5.14 (Convergence vague et convergence étroite) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]

Corrigé – *Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_p par $\rho_p(x) = p^d \rho(px)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_p(x)dx = 1$ et $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1/p$. La suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ s'appelle suite régularisante (ou suite de noyaux régularisants).*

Soit $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on définit la suite $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ en posant $\psi_p(x) = \int \psi(y)\rho_p(x-y)dy$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Comme ρ_p et ψ sont des fonctions à support compact, il est clair que ψ_p est aussi une fonction à support compact. Grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (théorème 4.53), il est assez facile de voir que ψ_p est indéfiniment dérivable. On a donc $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Enfin, du fait que ψ est uniformément continue, on déduit que ψ_p converge uniformément (sur $\mathbb{R}^d$) vers ψ quand $p \to +\infty$. Plus précisément, en notant $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\|\psi_p - \psi\|_u \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d, |z|\leq 1/p} \|\psi(\cdot + z) - \psi\|_u,$$

dont on déduit bien $\|\psi_p - \psi\|_u \to 0$ quand $p \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. On remarque maintenant que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \psi dm_n - \int \psi dm = \int (\psi - \psi_p)dm_n + \int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm + \int (\psi_p - \psi)dm,$$

on a donc

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \|\psi_p - \psi\|_u (\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d))$$
$$+ |\int \psi_p dm_n - \int \psi_p dm|.$$

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) + m(\mathbb{R}^d) < +\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$), il existe donc $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq \varepsilon + |\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm|.$$

Comme $\psi_{p_0} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la première hypothèse sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne qu'il existe n_0 t.q. $n \geq n_0$ implique $|\int \psi_{p_0} dm_n - \int \psi_{p_0} dm| \leq \varepsilon$. On a donc finalement

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \psi dm_n - \int \psi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $\int \psi dm_n \to \int \psi dm$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \varphi_p \le 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \le \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ dans les questions suivantes.

Corrigé – *Il suffit de prendre* φ_p *définie ainsi :*

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in B_p, \\ \varphi_p(x) = p + 1 - |x| & si\ x \in B_{p+1} \setminus B_p, \\ \varphi_p(x) = 0 & si\ x \notin B_{p+1}. \end{cases}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \ge p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm \le \varepsilon$.

Corrigé – *On utilise ici le théorème de convergence dominée, la suite* $(1-\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge p.p. vers 0 et est dominée par la fonction constante et égale à 1 (qui est bien une fonction intégrable pour la mesure m). On a donc* $\lim_{p\to+\infty} \int (1 - \varphi_p) dm = 0$*, ce qui donne le résultat demandé.*

(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm_n \to \int (1 - \varphi_p) dm$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On a* $\int (1-\varphi_p) dm_n = m_n(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm_n$*. Comme* $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*, on a* $\int \varphi_p dm_n \to \int \varphi_p dm$ *(quand* $n \to +\infty$*). D'autre part, on a* $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathbb{R}^d) = m(\mathbb{R}^d)$*. On a donc finalement, quand* $n \to +\infty$*,*

$$\int (1 - \varphi_p) dm_n \to m(\mathbb{R}^d) - \int \varphi_p dm = \int (1 - \varphi_p) dm.$$

(c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \in \mathbb{N}$, $p \ge p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) dm_n \le \varepsilon$.

Corrigé – *D'après a), il existe* p_2 *tel que* $\int (1 - \varphi_{p_2}) dm \le \varepsilon/2$*. D'après b), il existe* n_0 *tel que*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \le \int (1 - \varphi_{p_2}) dm + \varepsilon/2.$$

On a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int (1 - \varphi_{p_2}) dm_n \le \varepsilon.$$

Comme $(1 - \varphi_p) \le (1 - \varphi_{p_2})$ *si* $p \ge p_2$*, on a aussi*

$$n \ge n_0,\ p \ge p_2 \Rightarrow \int (1 - \varphi_p) dm_n \le \varepsilon.$$

D'autre part, le théorème de convergence dominée donne (comme en a) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{p\to+\infty} \int (1-\varphi_p)dm_n = 0.$$

Pour tout $n \in 0,\ldots,n_0$, il existe donc $p_{2,n}$ tel que

$$p \geq p_{2,n} \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

On choisit donc $p_1 = \max\{p_2, \max_{n=0,\ldots,n_0} p_{2,n}\}$ et on obtient bien $p \in \mathbb{N}^*$ et :

$$n \in \mathbb{N},\, p \geq p_1 \Rightarrow \int (1-\varphi_p)dm_n \leq \varepsilon.$$

4. Montrer que $\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).

Corrigé – *Soit $\varphi \in C_b[\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. En écrivant que $\varphi = \varphi\varphi_p + \varphi(1-\varphi_p)$, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$|\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq |\int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm| + \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p)dm_n + \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_p)dm.$$

Les questions 2a) et 2c) permettent de trouver $p_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que les deux derniers termes de la précédente inégalité soient inférieurs à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_0$. Puis, comme $\varphi\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, il existe n_1 tel que le premier terme du membre de droite de la précédente inégalité soit inférieur à ε pour $p = p_0$ et $n \geq n_1$. On a donc finalement

$$n \geq \max\{n_0,n_1\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to +\infty$).

5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace $\mathbb{R}^d$ (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

Corrigé – *Pour la question 1, on remarque que toute fonction de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions appartenant à $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ (la démonstration, semblable au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ utilise le fait que, si $\varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$, la distance entre le support de φ, qui est compact, et le complémentaire de Ω, qui est ouvert, est strictement positive. On rappelle que le support de φ est l'adhérence de l'ensemble des points où φ est non nulle).*

Pour la question 2, on construit (avec la fonction distance) une suite φ_p comme demandée en remplaçant simplement B_p par $B_p \cap \{x \in \Omega,\ d(x,\Omega^c) \geq 1/p\}$, avec $d(x,\Omega^c) = \max\{|x-y|,\ y \in \Omega^c\}$.

Pour les questions 3 et 4, on remplace simplement $\mathbb{R}^d$ par Ω.

Exercice 5.15 (Unicité avec C_c^∞) Soit m et μ deux mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). on suppose que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $m = \mu$.

Exercice 5.16 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (cela est démontré au chapitre 7, proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact tels que $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4. du polycopié de cours).]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.

7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 5.17 (Loi d'une fonction linéaire de X**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a. $aX + b$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.

Chapitre 6

Les espaces L^p

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Les espaces L^p, avec $1 \le p < +\infty$

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$ et $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ (c'est-à-dire $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, mesurable). On remarque que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$, car $|f|^p = \varphi \circ f$ où φ est la fonction continue (donc borélienne) définie par $\varphi(s) = |s|^p$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. (Noter que $p > 0$ et on rappelle que $|s|^p = e^{p \ln(|s|)}$ pour $s \ne 0$ et $|s|^p = 0$ pour $s = 0$.) La quantité $\int |f|^p dm$ est donc bien définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci va nous permette de définir les espaces de fonctions de puissance p–ième intégrable. On retrouve, pour $p = 1$, la définition de l'espace des fonctions intégrables.

Définition 6.1 (Les espaces $\mathcal{L}^p$) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $1 \le p < +\infty$ *et* f *une fonction définie de* E *dans* $\mathbb{R}$*, mesurable. (On a donc* $|f|^p \in \mathcal{M}_+$*.)*

1. On dit que $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $\int |f|^p dm < +\infty$*. On pose alors :*

$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

2. On dit que $f \notin \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $\int |f|^p dm = +\infty$ *et on pose alors* $\|f\|_p = +\infty$*.*

De manière analogue au cas $p = 1$ on quotiente les espaces $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence "= p.p." afin que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ définisse une norme sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence (voir section 4.5).

Définition 6.2 (Les espaces L^p) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$.

1. *On définit l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de* $\mathcal{L}^p$ *pour la relation d'équivalence* ($= pp$). *En l'absence d'ambiguïté on notera* L^p *l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
2. *Soit* $F \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On pose* $\|F\|_p = \|f\|_p$ *si* $f \in F$. *(Cette définition est cohérente car ne dépend pas du choix de* f *dans* F. *On rappelle aussi que* $F = \tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^p\,;\ g = f \text{ p.p.}\}$.*)*

Proposition 6.3 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$. *Alors :*

1. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.
2. $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION – 1. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. On a $\alpha f \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et $\int |\alpha f|^p dm = |\alpha|^p \int |f|^p dm < +\infty$. Donc, $\alpha f \in \mathcal{L}^p$.

— Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. On veut montrer que $f + g \in \mathcal{L}^p$. On sait que $f + g \in \mathcal{M}$ (car $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel) et on remarque que, pour tout $x \in E$,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p + 2^p |g(x)|^p,$$

et donc

$$\int |f + g|^p dm \leq 2^p \int |f|^p dm + 2^p \int |g|^p dm < +\infty,$$

ce qui montre que $f + g \in \mathcal{L}^p$.

2. La structure vectorielle de L^p s'obtient comme pour $p = 1$. Soit $F, G \in L^p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On choisit $f \in F$ et $g \in G$ et on définit $\alpha F + \beta G$ comme étant la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$. Comme d'habitude, cette définition est cohérente car la classe d'équivalence de $\alpha f + \beta g$ ne dépend pas des choix de f et g dans F et G.

■

On va montrer maintenant que $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$ et une norme sur L^p.

Lemme 6.4 (Inégalité de Young) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q \in \,]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DÉMONSTRATION – La fonction exponentielle $\theta \mapsto \exp(\theta)$ est convexe (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On a donc, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$\exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\exp(\theta_1) + (1-t)\exp(\theta_2).$$

Soit $a, b > 0$ (les autres cas sont triviaux). On prend $t = \frac{1}{p}$ (de sorte que $(1-t) = \frac{1}{q}$), $\theta_1 = p\ln(a)$ et $\theta_2 = q\ln(b)$. On obtient bien $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. ∎

Lemme 6.5 (Inégalité de Hölder) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Soient* $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors,* $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.1}$$

Le même résultat est vrai avec L^p, L^q *et* L^1 *au lieu de* $\mathcal{L}^p$, $\mathcal{L}^q$ *et* $\mathcal{L}^1$.

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$ car $f, g \in \mathcal{M}$ (voir la proposition 3.19).

L'inégalité de Young donne $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ pour tout $x \in E$. On en déduit, en intégrant :

$$\int |fg| dm \leq \frac{1}{p} \int |f|^p dm + \frac{1}{q} \int |g|^q dm < +\infty. \tag{6.2}$$

Donc, $fg \in \mathcal{L}^1$.

Pour montrer (6.1), on distingue maintenant 3 cas :

Cas 1. On suppose $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$. On a alors $f = 0$ p.p. ou $g = 0$ p.p.. On en déduit $fg = 0$ p.p., donc $\|fg\|_1 = 0$ et (6.1) est vraie.

Cas 2. On suppose $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$. On a alors, avec (6.2),

$$\|fg\|_1 = \int |fg| dm \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

L'inégalité (6.1) est donc vraie.

Cas 3. On suppose $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. On pose alors $f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$, de sorte que $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$. Le cas 2 donne alors

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \|f_1 g_1\|_{\leq} 1.$$

Ce qui donne (6.1).

Dans le cas où $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on confond les classes f et g avec des représentants, encore notés f et g. Le résultat précédent donne $fg \in \mathcal{L}^1$ et (6.1). On a alors $fg \in L^1$ au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire "il existe $h \in \mathcal{L}^1$ telle que $fg = h$ p.p." (et fg ne dépend pas des représentants choisis), et (6.1) est vérifiée. ∎

Remarquons que dans le cas $p = 2$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int fg\, dm \leq \|f\|_2\|g\|_2,$$

qui est la célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f,g) \in L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m) \mapsto (f \mid g)_2 = \int fg\, dm$, voir le théorème 6.35. Il est facile de voir que l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité si on prend $f = g$, ou, de manière plus générale, si f et g sont colinéaires. L'inégalité de Hölder devient une égalité si on choisit $g = f^{\frac{1}{q-1}}$, auquel cas $\|f\|_p = \|g\|_q$, voir l'exercice 6.1.

Lemme 6.6 (Inégalité de Minkowski) *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$. *Soit* $f,g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. *Alors,* $f+g \in \mathcal{L}^p$ *et :*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{6.3}$$

Le même résultat est vrai avec L^p *au lieu de* $\mathcal{L}^p$.

DÉMONSTRATION – Le cas $p = 1$ à déjà été traité, on suppose donc $p > 1$. On a aussi déjà vu que $f+g \in \mathcal{L}^p$ (proposition 6.3). Il reste donc à montrer (6.3). On peut supposer que $\|f+g\|_p \neq 0$ (sinon (6.3) est trivial).

On remarque que

$$|f+g|^p \leq FH + GH, \tag{6.4}$$

avec $F = |f|$, $G = |g|$ et $H = |f+g|^{p-1}$.

On pose $q = \frac{p}{p-1}$, de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $F \in \mathcal{L}^p$, $G \in \mathcal{L}^p$ et $H \in \mathcal{L}^q$ (car $f+g \in \mathcal{L}^p$). On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (6.1), elle donne

$$\|FH\|_1 \leq \|F\|_p\|H\|_q,\ \|GH\|_1 \leq \|G\|_p\|H\|_q.$$

On en déduit, avec (6.4),

$$\int |f+g|^p dm \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int |f+g|^p dm\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

D'où l'on déduit (6.3).

Il est clair que le lemme est vrai avec L^p au lieu de $\mathcal{L}^p$. ■

On en déduit la propriété suivante :

Proposition 6.7 *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $1 \leq p < +\infty$.

1. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^p$.
2. *L'application* $f \mapsto \|f\|_p$ *est une norme sur* L^p. L^p, *muni de cette norme, est donc une espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) normé.*

DÉMONSTRATION –

- On a bien $\|f\|_p \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- On a déjà vu que $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}^p$.
- L'inégalité (6.3) donne $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p$.

L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est donc une semi–norme sur $\mathcal{L}^p$. On remarque que, si $f \in \mathcal{L}^p$, on a

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p..}$$

Cette équivalence donne que l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur L^p.

■

Remarque 6.8 On reprend ici la remarque 4.40. Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$. On confondra dans la suite un élément F de L^p avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^p$ telle que $f \in \mathrm{F}$. De manière plus générale, soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ t.q. A^c soit négligeable (c'est-à-dire $\mathrm{A}^c \subset \mathrm{B}$ avec $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ et $m(\mathrm{B}) = 0$). On dira qu'une fonction f, définie de A dans $\mathbb{R}$, est un élément de L^p s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^p \,;\, h = g \text{ p.p. }\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^p \,;\, h = f \text{ p.p. }\}$.

Avec cette confusion, si f et g sont des éléments de L^p, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Théorème 6.9 (Convergence dominée dans L^p) *Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $1 \le p < +\infty$. On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p telle que :*

1. $f_n \to f$ p.p.,

2. $\exists\ \mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ telle que $|f_n| \le \mathrm{F}$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $f \in \mathrm{L}^p$ et $f_n \to f$ dans L^p (c'est-à-dire $\int |f_n - f|^p dm \to 0$ quand $n \to +\infty$).

DÉMONSTRATION – On se ramène au cas $p = 1$.

On peut choisir des représentants des f_n (encore notés f_n) de manière à ce que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. On a donc $g \in \mathcal{M}$ et $|g| \le \mathrm{F}$ p.p., ce qui montre que $g \in \mathcal{L}^p$. On a donc $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens $f = g$ p.p. avec $g \in \mathcal{L}^p$).

Puis, on remarque que

$$0 \le h_n = |f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^p \mathrm{F}^p \text{ p.p.,}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $h_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $\mathrm{F}^p \in \mathrm{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée, il donne $h_n \to 0$ dans L^1, c'est-à-dire $f_n \to f$ dans L^p. ■

Comme dans le cas $p = 1$ (voir le théorème 4.45), l'hypothèse "$f_n \to f$ p.p." dans le théorème 6.9 peut être remplacée par "$f_n \to f$ en mesure". Ceci est montré dans l'exercice 6.25.

Dans le théorème 6.9, l'hypothèse de domination sur la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (l'hypothèse 2) implique que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p. La réciproque de cette implication est fausse, c'est-à-dire que le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée dans L^p ne donne pas l'hypothèse 2 du théorème 6.9. Toutefois, le théorème 6.10 ci-dessous donne un résultat de convergence intéressant sous l'hypothèse "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^p" (on pourrait appeler cette hypothèse domination en norme) au lieu de l'hypothèse 2 du théorème 6.9.

Théorème 6.10 (Convergence "dominée en norme", mesure finie) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré fini (c'est-à-dire* $m(\mathrm{E}) < +\infty$*) et* $1 < p < +\infty$*. On note* L^r *l'espace* $\mathrm{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(pour tout* $1 \le r < +\infty$*). Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* L^p *telle que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.,*

2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* L^p*.*

Alors, $f \in \mathrm{L}^p$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^q *pour tout* $q \in [1, p[$ *(c'est-à-dire* $\int |f_n - f|^q dm \to 0$, *quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $1 \le q < p$*).*

Ce théorème est aussi vrai dans le cas $p = +\infty$*, l'espace* L^∞ *sera défini dans la section 6.1.2.*

DÉMONSTRATION – Le fait que $f \in \mathrm{L}^p$ est conséquence immédiate du lemme de Fatou (Lemme 4.19) appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Le fait que $f_n \to f$ dans L^q pour tout $q \in [1, p[$ peut se faire avec le théorème de Vitali (théorème 4.51). Ceci est démontré dans l'exercice 6.21. Une généralisation avec $m(\mathrm{E}) = +\infty$ est étudiée dans l'exercice 6.22. ■

On donne maintenant une réciproque partielle au théorème de convergence dominée, comme dans le cas $p = 1$.

Théorème 6.11 (Réciproque partielle de la convergence dominée)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $1 \le p < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$ et $f \in \mathrm{L}^p$. On suppose que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

— $f_{n_k} \to f$ p.p. lorsque $k \to +\infty$,

— $\exists$ $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ telle que $|f_{n_k}| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Comme dans le cas $p = 1$, Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.12 (Séries absolument convergentes dans L^p)

Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $1 \le p < +\infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$.

On suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$. *Alors :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ *pour presque tout* $x \in \mathrm{E}$. *On pose* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *(la fonction* f *est donc définie p.p.).*
2. $f \in \mathrm{L}^p$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^p$ *telle que* $f = g$ *p.p.").*
3. $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ *p.p. et dans* L^p, *lorsque* $n \to +\infty$. *De plus, il existe* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ *telle que* $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le \mathrm{F}$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n.

On pose, pour tout $x \in \mathrm{E}$, $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)|$. On a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. Comme la suite est croissante, il existe $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_+$ telle que $g_n \uparrow \mathrm{F}$, quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $g_n^p \uparrow \mathrm{F}^p$ quand $n \to +\infty$ et le théorème de convergence monotone donne

$$\int g_n^p \, dm \to \int \mathrm{F}^p \, dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.5}$$

On remarque maintenant que $\|g_n\|_p \le \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p \le \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p = \mathrm{A} < +\infty$. Donc $\|g_n\|_p^p \le \mathrm{A}^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (6.5) donne alors

$$\int \mathrm{F}^p \, dm \le \mathrm{A}^p < +\infty. \tag{6.6}$$

L'inégalité (6.6) donne que $\mathrm{F} < +\infty$ p.p.. Il existe donc $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{B}) = 0$ et $\mathrm{F}(x) < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{B}^c$. Pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est donc absolument convergente dans $\mathbb{R}$. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ et on peut définir, pour tout $x \in \mathrm{B}^c$, $f(x) \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction f n'est pas forcément dans $\mathcal{M}$, mais elle est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 176), il existe donc $g \in \mathcal{M}$ telle que $f = g$ p.p.. Puis, comme $|g| \le \mathrm{F}$ p.p. (car $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le g_n \le \mathrm{F}$ p.p. et $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to g$ p.p.) on a, grâce à (6.6), $g \in \mathcal{L}^p$, ce qui donne bien $f \in \mathrm{L}^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ telle que $f = g$ p.p.")

Enfin, pour montrer le dernier item de la proposition, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p car $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ p.p. et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)| \le g_n \le \mathrm{F}$ p.p. avec $\int \mathrm{F}^p \, dm < +\infty$. On obtient bien que $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \to f$ dans L^p. ■

Toute série absolument convergente de L^p est donc convergente dans L^p. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 6.13 (L'espace L^p est complet) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $1 \le p < +\infty$. *L'espace vectoriel normé* $(L^p, \|.\|_p)$ *est complet.*

On peut maintenant se demander si les espaces L^p sont des espaces de Hilbert. Ceci est vrai pour $p = 2$, et, en général, faux pour $p \neq 2$ (voir à ce propos l'exercice 6.40). Le cas de L^2 sera étudié en détail dans la section 6.2.

En général, les espaces L^p, avec $1 < p < +\infty$, autres que L^2 ne sont pas des espaces de Hilbert, mais nous verrons ultérieurement (section 6.3) que ce sont des espaces de Banach réflexifs (c'est-à-dire que l'injection canonique entre l'espace et son bi-dual est une bijection, voir Définition 6.72). Les espaces L^1 et L^∞ (que nous verrons au paragraphe suivant) sont des espaces de Banach non réflexifs (sauf cas particuliers).

Remarque 6.14 Soient (E,T,m) un espace mesuré et $1 < p < +\infty$. On peut aussi définir $L^p_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et $L^p_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexes ou réels). Le cas $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est particulièrement intéressant. Il sera muni d'une structure hilbertienne (voir le théorème 6.35).

6.1.2 L'espace L^∞

Définition 6.15 (L'espace $\mathcal{L}^\infty$) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* f *une fonction mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*);*

1. *on dit que* f *est essentiellement bornée, ou encore que* $f \in \mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *s'il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $|f| \le C$ *p.p. ;*
2. *si* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *on pose* $\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R}_+ \,;\, |f| \le C \text{ p.p.}\}$,
3. *si* $f \notin \mathcal{L}^\infty$, *on pose* $\|f\|_\infty = +\infty$.

Remarque 6.16 (Rappels sur la définition de l'inf) Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On rappelle que A est borné inférieurement s'il existe un minorant de A, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \ge \alpha$ pour tout $x \in A$. Si A est borné inférieurement, on définit la borne inférieure de A comme le plus grand des minorants : $\overline{x} = \inf\{A\} = \max\{\alpha; \alpha \le x$ pour tout $x \in A\}$. Si A n'est pas borné inférieurement, on pose $\inf A = -\infty$. Dans les manipulations sur les inf (et sur les sup) il est utile de connaître le résultat suivant :

$$\overline{x} = \inf A \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A; x_n \downarrow \overline{x} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Ceci se démontre très facilement en distinguant deux cas :

1. Si A est non borné inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in A$ tel que $y_n \leq -n$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a donc $x_n \downarrow -\infty = \inf A$.
2. Si A est borné inférieurement, soit $\overline{x} = \inf A$. Alors, $\overline{x} + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de A et donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $\overline{x} \leq y_n \leq \overline{x} + \frac{1}{n}$. En choisissant $x_0 = y_0$ et, par récurrence, $x_n = \min(x_{n-1}, y_n)$, on a clairement : $x_n \downarrow \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

Le petit lemme suivant (dont la démonstration est immédiate en écrivant la définition de $\|f\|_\infty$, voir l'exercice corrigé 4.37) est parfois bien utile.

Lemme 6.17 Si $f \in \mathcal{L}^\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p..

La démonstration de ce lemme fait l'objet de l'exercice corrigé 4.37.

On a égalité entre le sup essentiel et le sup pour les fonctions continues :

Proposition 6.18 *Si* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors*

$$\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

DÉMONSTRATION – On distingue 2 cas :

Cas 1. On suppose ici que $|f|$ est non bornée, c'est-à-dire $\|f\|_u = +\infty$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme $|f|$ est non bornée, il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|f(x)| > \alpha$. Par continuité de f, il existe alors $\varepsilon > 0$ t.q. $|f(y)| > \alpha$ pour tout $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. On a donc $\{|f| > \alpha\} \supset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et donc $\lambda(\{|f| > \alpha\}) \geq 2\varepsilon$. Donc, $|f|$ n'est pas inférieure ou égale à α p.p.. On a donc $\{C \in \mathbb{R}_+ ; |f| \leq C \text{ p.p.}\} = \emptyset$, donc $\|f\|_\infty = +\infty = \|f\|_u$.

Cas 2. On suppose maintenant que $\|f\|_u < +\infty$. On a $|f(x)| \leq \|f\|_u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$.

D'autre part, on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ p.p.. On a donc $\lambda\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$. Or $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est ouvert (car f est continue), c'est donc un ouvert de mesure nulle, on a donc $\{|f| > \|f\|_\infty\} = \emptyset$ (la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide est toujours strictement positive), ce qui prouve $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$.

On obtient bien finalement $\|f\|_u = \|f\|_\infty$. ■

Définition 6.19 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. *On définit* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *comme l'ensemble des classes d'équivalence sur* $\mathcal{L}^\infty$ *pour la relation d'équivalence "= p.p.".*
2. *Soit* $F \in L^\infty$. *On pose* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ *avec* $f \in F$, *de sorte que* $F = \{g \in \mathcal{L}^\infty ; g = f$ *p.p.*$\}$. *(Cette définition est cohérente car* $\|f\|_\infty$ *ne dépend pas du choix de* f *dans* F.*)*

Proposition 6.20 *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré,* $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *et* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$*. Alors :*

1. $\mathcal{L}^\infty$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* $\mathcal{L}^\infty$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}^\infty$.
2. L^∞ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et l'application définie de* L^∞ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f \mapsto \|f\|_\infty$ *est une norme sur* L^∞. L^∞ *est donc un espace espace vectoriel normé (réel).*

DÉMONSTRATION – 1. — Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^\infty$, il est clair que $\alpha f \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.

— Soit $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on montre facilement que $|f+g| \le |f|+|g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ p.p., ce qui prouve que $(f+g) \in \mathcal{L}^\infty$ et que $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

On a bien montré que $\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et comme $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^\infty$, l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est bien une semi–norme sur $\mathcal{L}^\infty$.

2. la structure vectorielle de L^∞ s'obtient comme celle de L^p $(p < +\infty)$ et le fait que $f \mapsto \|f\|_\infty$ soit une norme découle du fait que

$$f = 0 \text{ p.p. } \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$$

■

Proposition 6.21 *Soit* (E,T,m) *un espace mesuré. L'espace* $L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ *est un espace de Banach (réel), c'est-à-dire un e.v.n. complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^∞ est un e.v.n.. Le fait qu'il soit complet est la conséquence du fait que toute série absolument convergente dans L^∞ est convergente dans L^∞, ce qui est une conséquence de la proposition suivante sur les séries absolument convergentes. ■

Proposition 6.22 (Séries absolument convergentes dans L^∞**)** *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$*. On suppose que* $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$*. Alors :*

1. *Il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} |f_k| < C$ *p.p..*
2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$*, absolument convergente dans* $\mathbb{R}$*. On définit, pour presque tout* x, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. *On a* $f \in L^\infty$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Comme $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ p.p., il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ sur A_n^c. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. On a $m(A) = 0$ (par σ-sous additivité de m) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A^c$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.

Pour tout $x \in A^c$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = C < \infty. \tag{6.7}$$

Comme $m(A) = 0$, ceci montre le premier item.

Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. On pose donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \in \mathbb{R}.$$

f est donc définie p.p., elle est m-mesurable (voir la définition 4.13) car limite p.p. de fonctions mesurables. Il existe donc $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f = g$ p.p. et (6.7) donne $|g| \leq C$ p.p.. On a donc $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens “il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g$ p.p.”).

Il reste à montrer que $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞.

On remarque que, pour tout $x \in A^c$,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit

$$\Big\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\Big\|_\infty \leq \sup_{x\in A^c} \Big|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} f_k \to f$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$. ■

La proposition 6.22 permet de montrer que L^∞ est complet (théorème 6.21). Elle permet aussi de montrer ce que nous avons appelé précédemment (dans le cas $p < \infty$) réciproque partielle du théorème de convergence dominée. Il est important par contre de savoir que le théorème de convergence dominée peut être faux dans L^∞, comme le montre la remarque suivante.

Remarque 6.23 (Sur la convergence dominée) Le résultat de convergence dominée qu'on a démontré pour les suites de fonctions de L^p, $1 \leq p < +\infty$, est faux pour les suites de fonctions de L^∞. Il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple suivant : $(E, T, m) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^\infty_\mathbb{R}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda),\ f_n \to 0 \text{ p.p. quand } n \to +\infty,$$
$$f_n \leq 1_{[0,1]} \text{ p.p., pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1_{[0,1]} \in L^\infty_\mathbb{R}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda).$$

Pourtant, $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0$, quand $n \to +\infty$.

Par contre, le résultat de réciproque partielle de la convergence dominée est vrai, comme conséquence du résultat que toute suite absolument convergente dans L^∞ est convergente (dans L^∞, proposition 6.22). La démonstration est similaire à la démonstration du théorème 4.49.

Remarque 6.24 Soit (E, T, m) un espace mesuré. On peut aussi définir $L^\infty_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et $L^\infty_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ (avec $N > 1$) comme on a fait pour $p = 1$ (voir la section 4.10). On obtient aussi des espaces de Banach (complexe ou réels).

6.1.3 Quelques propriétés des espaces $L^p, 1 \le p \le +\infty$

Proposition 6.25 (Comparaison entre les espaces L^p) *Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, i.e. $m(E) < +\infty$. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \le p < q \le +\infty$. Alors, $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. De plus, il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, tel que $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (ceci montre que l'injection de L^q dans L^p est continue).*

DÉMONSTRATION – On distingue les cas $q < \infty$ et $q = \infty$.

Cas $q < \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q < +\infty$.

Soit $f \in L^q$. On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour tout $x \in E$, on a $|f(x)|^p \le |f(x)|^q$ si $|f(x)| \ge 1$. On a donc $|f(x)|^p \le |f(x)|^q + 1$, pour tout $x \in E$. Ce qui donne, par monotonie de l'intégrale,

$$\int |f|^p dm \le m(E) + \int |f|^q dm < \infty, \tag{6.8}$$

et donc que $f \in L^p$. On a ainsi montré $L^q \subset L^p$.

On veut montrer maintenant qu'il existe C, ne dépendant que de p, q et $m(E)$, t.q., pour tout $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,

$$\|f\|_p \le C\|f\|_q. \tag{6.9}$$

En utilisant (6.8), on remarque que (6.9) est vraie avec $C = (m(E) + 1)^{\frac{1}{p}}$, si $\|f\|_q = 1$. Ceci est suffisant pour dire que (6.9) est vraie avec $C = (m(E)+1)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $f \in L^q$. En effet, (6.9) est trivialement vraie pour $\|f\|_q = 0$ (car on a alors $f = 0$ p.p. et $\|f\|_p = 0$). Puis, si $\|f\|_q > 0$, on pose $f_1 = \frac{f}{\|f\|_q}$ de sorte que $\|f_1\|_q = 1$. On peut donc utiliser (6.9) avec f_1. On obtient $\frac{1}{\|f\|_q}\|f\|_p = \|f_1\|_p \le C$, ce qui donne bien $\|f\|_p \le C\|f\|_q$.

On a donc montré (6.9) avec un C ne dépendant que p et $m(E)$ (et non de q). Toutefois, le meilleur C possible dans (6.9) dépend de p, q et $m(E)$. Ce meilleur C peut être obtenu en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée (proposition 6.26). Elle donne $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ (voir la remarque 6.27).

Cas $q = \infty$. On suppose ici que $1 \le p < q = +\infty$.

Soit $f \in L^\infty$. On choisit un représentant de f, encore noté f. On a $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p.. On en déduit $|f|^p \le \|f\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |f|^p dm \le m(E)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Ce qui donne $f \in L^p$ et $\|f\|_p \le C\|f\|_\infty$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p}}$.

On voit ici qu'on a obtenu le meilleur C possible (si $m(E) > 0$) car $\|f\|_p = (m(E))^{\frac{1}{p}} = (m(E))^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$ si $f = 1_E$. ∎

Proposition 6.26 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $p, q, r \in [1, +\infty]$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. *Soient* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Alors,* $fg \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et*

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{6.10}$$

DÉMONSTRATION – Comme d'habitude, on confond un élément de L^s ($s = p$, q ou r) avec un de ses représentants. On travaille donc avec $\mathcal{L}^s$ au lieu de L^s. On suppose donc que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ et on veut montrer que $fg \in \mathcal{L}^r$ et que (6.10) est vraie. On remarque d'abord que $fg \in \mathcal{M}$.

Ici encore, on distingue plusieurs cas.

Cas 1. On suppose ici $1 \le p, q, r < \infty$.

On pose $f_1 = |f|^r$ et $g_1 = |g|^r$ de sorte que $f_1 \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r}}$ et $g_1 \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r}}$. Comme $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$, on peut appliquer le lemme 6.5 (donnant l'inégalité de Hölder) avec f_1, g_1 (au lieu de f, g) et $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ (au lieu de p, q). Il donne que $f_1 g_1 \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_1 g_1\|_1 \le \|f_1\|_{\frac{p}{r}} \|g_1\|_{\frac{q}{r}}$. On en déduit que $fg \in L^r$ et

$$\int |fg|^r dm \le \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{r}{p}} \Big(\int |g|^q dm\Big)^{\frac{r}{q}},$$

ce qui donne (6.10)

Cas 2. On suppose ici $q = \infty$ et $r = p < \infty$.

Comme $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., On a $|fg|^p \le |f|^p \|g\|_\infty^p$ p.p. et donc

$$\int |fg|^p dm \le \|g\|_\infty^p \int |f|^p dm,$$

ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^p$ et (6.10).

Cas 3. On suppose ici $p = q = r = \infty$.

Comme $|f| \le \|f\|_\infty$ p.p. et $|g| \le \|g\|_\infty$ p.p., on a $|fg| \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ p.p., ce qui donne $fg \in \mathcal{L}^\infty$ et (6.10). ∎

Remarque 6.27

1. Par une récurrence facile sur $n \in \mathbb{N}^*$, on peut encore généraliser la proposition 6.26. Soient (E, T, m) un espace mesuré, $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $f_i \in L^{p_i}_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Alors, $\prod_{i=1}^{n} f_i \in L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\|\prod_{i=1}^{n} f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$.
2. L'inégalité (6.10) permet aussi de trouver le meilleur C possible dans la proposition 6.25 (Inégalité (6.9)) :

   Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p < q < +\infty$. Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Comme $1 \leq p < q < \infty$, il existe $r \in [1, \infty[$ t.q. $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. On peut alors utiliser la proposition 6.26 avec $f \in L^q$ et $1_E \in L^r$. Elle donne que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ avec $C = (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Cette valeur de C est la meilleure possible (si $m(E) > 0$) dans (6.9) car si $f = 1_E$ on obtient $\|f\|_p \leq (m(E))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$.

Remarque 6.28 Les espaces $L^p, p \in]0, 1[$ (que l'on peut définir comme dans le cas $1 \leq p < \infty$) sont des espaces vectoriels, mais l'application $f \mapsto \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme sur L^p si $p \in]0, 1[$ (sauf cas particulier).

Remarque 6.29 Soient (E, T, m) un espace mesuré, et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. L'ensemble $J = \{p \in [1, +\infty], f \in \mathcal{L}^p\}$ est un intervalle de $[1, +\infty]$. L'application définie de $\overline{J}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $p \mapsto \|f\|_p$ est continue, voir à ce propos l'exercice 4.37, et dans le cas particulier des fonctions continues à support compact, l'exercice 6.11. En particulier, lorsque $p \in J$, $p \to +\infty$ on a $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$. On en déduit le résultat suivant : s'il existe $p_0 < +\infty$ tel que $f \in \mathcal{L}^p$ pour tout p tel que $p_0 \leq p < +\infty$, et s'il existe C t.q. $\|f\|_p \leq C$, pour tout $p \in [p_0, +\infty[$, alors $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq C$.

6.2 Analyse hilbertienne et espace L^2

6.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 6.30 (Produit scalaire)

1. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $H \times H \to \mathbb{R}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_H$ *t.q.*

   (ps1) $(u \mid u) > 0$ *pour tout* $u \in H \setminus \{0\}$,

   (ps2) $(u \mid v) = (v \mid u)$ *pour tout* $u, v \in H$,

   (ps3) $u \mapsto (u \mid v)$ *est une application linéaire de* H *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* $v \in H$.
2. *Soit* H *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$. *On appelle produit scalaire sur* H *une application de* $H \times H \to \mathbb{C}$, *notée* $(\cdot \mid \cdot)$ *ou* $(\cdot \mid \cdot)_H$ *telle que*

(ps1) *$(u \mid u) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$,*

(ps2) *$(u \mid u) = \overline{(v \mid u)}$ pour tout $u, v \in H$,*

(ps3) *$u \mapsto (u \mid v)$ est une application linéaire de H dans $\mathbb{R}$, pour tout $v \in H$.*

Remarque 6.31 (Exemple fondamental) Soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. On prend $H = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. H est un e.v. sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int fg dm$ est un produit scalaire sur H.
2. On prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ (voir le théorème 6.35 ci après). H est un e.v. sur $\mathbb{C}$. En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ (lemme 6.5 pour $p = q = 2$). L'application $(f, g) \mapsto \int f\overline{g} dm$ est un produit scalaire sur H.

Proposition 6.32 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot \mid \cdot)$. Alors :*

$$(u \mid v)^2 \le (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.11}$$

   De plus, $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. *Soit H un e.v. sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire, noté $(\cdot \mid \cdot)$. Alors :*

$$|(u \mid v)|^2 \le (u \mid u)(v \mid v), \text{ pour tout } u, v \in H. \tag{6.12}$$

   De plus, $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

DÉMONSTRATION –

1. On suppose ici $K = \mathbb{R}$. Soit $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = (v \mid v)\alpha^2 + 2\alpha(u \mid v) + (u \mid u).$$

   Comme $p(\alpha) \ge 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = (u \mid v)^2 - (u \mid u)(v \mid v) \le 0$, ce qui donne (6.11).

   On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.11).

   Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.11) (et u et v sont colinéaires).

   Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, on a égalité dans (6.11) (c'est-à-dire $\Delta = 0$) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(\alpha) = 0$. On a donc égalité dans (6.11) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $u = -\alpha v$. On en déduit bien que $(u \mid v)^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

2. On suppose maintenant $K = \mathbb{C}$. Soient $u, v \in H$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose
$$p(\alpha) = (u + \alpha v \mid u + \alpha v) = \alpha\overline{\alpha}(v \mid v) + \alpha(v \mid u) + \overline{\alpha}(u \mid v) + (u \mid u).$$
On choisit de prendre $\alpha = \beta(u \mid v)$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On pose donc, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(\beta) = p(\beta(u \mid v)) = \beta^2|(u \mid v)|^2(v \mid v) + 2\beta|(u \mid v)|^2 + (u \mid u).$$
Ici encore, comme $\varphi(\beta) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\Delta = |(u \mid v)|^4 - |(u \mid v)|^2(v \mid v)(u \mid u) \le 0$, ce qui donne (6.12).
On s'intéresse maintenant au cas d'égalité dans (6.12)
Si $u = 0$ ou $v = 0$, on a égalité dans (6.12) (et u et v sont colinéaires).
On suppose maintenant $u \ne 0$ et $v \ne 0$. On remarque d'abord que, si $(u \mid v) = 0$, on n'a pas égalité dans (6.12) et u et v ne sont pas colinéaires. On suppose donc maintenant que $(u \mid v) \ne 0$. On a alors égalité dans (6.12) si et seulement si $\Delta = 0$ et donc si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel qu $\varphi(\beta) = 0$. Donc, on a égalité dans (6.12) si et seulement s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u = -\beta(u \mid v)v$, et donc si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $u = -\alpha v$.
Finalement, on en déduit bien que $|(u \mid v)|^2 = (u \mid u)(v \mid v)$ si et seulement si u et v sont colinéaires. ■

Proposition 6.33 (Norme induite par un produit scalaire) *Soit* H *un e.v. sur* K*, avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$*, muni d'un produit scalaire, noté* $(\cdot \mid \cdot)$*. Pour tout* $u \in H$*, on pose* $\|u\|_H = \sqrt{(u \mid u)}$*. Alors,* $\|\cdot\|_H$ *est une norme sur* H*. On l'appelle norme induite par le produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$*.*

DÉMONSTRATION –

— Il est clair que $\|u\|_H \in \mathbb{R}_+$ pour tout $u \in H$ et que
$$\|u\|_H = 0 \Leftrightarrow (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$
— On a bien $\|\alpha u\|_H = |\alpha|\|u\|_H$ pour tout $\alpha \in K$ et tout $u \in H$.
— Enfin, pour montrer l'inégalité triangulaire, soit $u, v \in H$. On a $\|u+v\|_H^2 = (u+v \mid u + v) = (u \mid u) + (v \mid v) + (u \mid v) + (v \mid u)$. Comme, par (6.11) ou (6.12), $|(u \mid v)| \le \sqrt{(u \mid u)}\sqrt{(v \mid v)} = \|u\|_H\|v\|_H$, on en déduit $\|u + v\|_H^2 \le (\|u\|_H + \|v\|_H)^2$. Donc,
$$\|u + v\|_H \le \|u\|_H + \|v\|_H.$$
■

Définition 6.34 (Espace de Hilbert)

1. *Un espace préhilbertien (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$*) normé dont la norme est induite par un produit scalaire.*
2. *Un espace de Hilbert (réel ou complexe) est un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$*) normé complet dont la norme est induite par un produit scalaire. C'est donc un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.*

Théorème 6.35 (L'espace L^2) *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *L'espace $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (réel) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int fg \ dm.$$

2.

   (a) *Soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{C}$ (donc $|f| \in \mathcal{M}_+$).*

   (b) *On dit que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si $|f|^2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\||f|^2\|_1}$. Alors, $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$.*

   (c) *On appelle $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". Pour $F \in L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, on pose $\|F\|_2 = \|f\|_2$ avec $f \in F$ (noter que $\|f\|_2$ ne dépend pas du choix de f dans F). Alors $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, muni de $\|\cdot\|_2$, est un espace de Banach (complexe).*

   (d) *L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Hilbert (complexe) et le produit scalaire associé à la norme est défini par :*

$$(f \mid g)_2 = \int f\overline{g} \ dm.$$

DÉMONSTRATION – 1. On sait déjà que $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach (réel). Le lemme 6.5 pour $p = q = 2$ donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ si $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int fg dm$. Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est un produit scalaire et que la norme induite par ce produit scalaire est bien la norme $\|\cdot\|_2$.

2. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. On rappelle (section 4.10) que les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* appartiennent à $\mathcal{M}$). On a donc bien $|f| \in \mathcal{M}_+$ et $|f|^2 = (\mathfrak{Re}(f))^2 + (\mathfrak{Im}(f))^2 \in \mathcal{M}_+$.

   Comme $|f|^2 = (\mathfrak{Re}(f))^2 + (\mathfrak{Im}(f))^2 \in \mathcal{M}_+$, on remarque aussi que $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Comme $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est un e.v. (sur $\mathbb{R}$), il est alors immédiat de voir que $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est un e.v. sur $\mathbb{C}$.

   On quotiente maintenant $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ par la relation "= p.p.". On obtient ainsi l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ que l'on munit facilement d'une structure vectorielle sur $\mathbb{C}$. L'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ est donc un e.v. sur $\mathbb{C}$.

En utilisant le lemme 6.5, on montre facilement que $f\overline{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si $f,g \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ (on utilise le fait que les parties réelles et imaginaires de f et g sont dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$). On peut donc poser $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}dm$. Il est aussi facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_2$ est alors un produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ et que la norme induite par ce produit scalaire est justement $\|\cdot\|_2$ (car $|f|^2 = f\overline{f}$ et donc $\int f\overline{f}dm = \|f\|_2^2$). On a, en particulier, ainsi montré que $f \mapsto \|f\|_2$ est bien une norme sur $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On en déduit aussi que $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

On a montré que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace préhilbertien. il reste à montrer qu'il est complet (pour la norme $\|\cdot\|_2$). Ceci est facile. En effet, $\|f\|_2^2 = \|\mathfrak{Re}(f)\|_2^2 + \|\mathfrak{Im}(f)\|_2^2$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$. Donc, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ est de Cauchy si et seulement si les suites $(\mathfrak{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et cette même suite converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ si et seulement si les suites $(\mathfrak{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathfrak{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Le fait que $L^2_{\mathbb{C}}(E,T,m)$ soit complet découle alors du fait que $L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ est complet.

■

Remarquons que dans le cas $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6.36 (Continuité du produit scalaire)
Soit H *un espace de Hilbert réel ou complexe. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *et* $u, v \in H$ *tels que* $u_n \to u$ *et* $v_n \to v$ *dans* H, *quand* $n \to +\infty$. *Alors,* $(u_n \mid v_n) \to (u \mid v)$ *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Il suffit de remarquer que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalités (6.11) et (6.12)), on a :

$$\begin{aligned}|(u_n \mid v_n) - (u \mid v)| &\le |(u_n \mid v_n) - (u_n \mid v)| + |(u_n \mid v) - (u \mid v)| \\ &\le \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que $u_n \to u$, $v_n \to v$ et en remarquant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente. ■

Définition 6.37 (Dual d'un espace de Banach) Soit H un Banach réel ou complexe. On note H′ (ou $\mathcal{L}(H,K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). Si $T \in H'$, on pose

$$\|T\|_{H'} = \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H' et que H', muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K).

Enfin, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \le \|T\|_{H'}\|u\|_H$.

Remarque 6.38 Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on voit que $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \le \|v\|_H$. Il est facile alors de voir que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$. Ceci montre que $v \mapsto \varphi_v$ est une application injective de H dans H'. le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56), fondamental, montrera que cette application est surjective.

Il est naturel de se demander si deux produits scalaires (sur un même espace vectoriel) peuvent induire la même norme. La réponse est non. En effet, le produit scalaire est entièrement déterminé par la norme qu'il induit. Par exemple, dans le cas d'un espace vectoriel réel, si une norme $\|\cdot\|$ est induite par un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, on doit avoir, pour tout u, v, $(u \mid v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$, voir exercice 6.29. Un moyen simple pour savoir si l'application $(u, v) \mapsto \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$ est bien un produit scalaire est d'utiliser l'identité du parallèlogramme.

Proposition 6.39 (Identité du parallèlogramme)
Soit H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Alors, pour tout* $u, v \in H$, *on a*

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2. \tag{6.13}$$

Cette identité s'appelle identité du parallélogramme.

DÉMONSTRATION – Il suffit d'écrire $\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = (u+v \mid u+v) + (u-v \mid u-v)$ et de développer les produits scalaires. ∎

Remarque 6.40 (De l'utilité de l'identité du parallèlograme)
On se donne maintenant un e.v.n. noté H. Comment savoir si la norme est induite ou non par un produit scalaire ? On peut montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallélogramme (6.13) est vraie pour tout $u, v \in H$, voir exercice 6.29. Ceci est surtout utile pour montrer qu'une norme n'est pas induite par un produit scalaire (on cherche $u, v \in H$ ne vérifiant pas (6.13)), voir à ce propos l'exercice 6.30.

Nous abordons à présent la notion fondamentale d'orthogonalité, qui est liée à la notion de produit scalaire ; cette notion est une des briques de base de la démonstration du théorème de représentation de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert et

son dual topologique (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur cet espace).

Définition 6.41 (Orthogonal) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe).*

1. *Soit* $u, v \in H$. *On dit que* u *et* v *sont orthogonaux (et on note* $u \perp v$*) si* $(u \mid v) = 0$.
2. *Soit* $A \subset H$. *On appelle orthogonal de* A *l'ensemble* $A^\perp = \{u \in H\,;\ (u \mid v) = 0$ *pour tout* $v \in A\}$.

Proposition 6.42 (Propriétés de l'orthogonal) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $A \subset H$. *Alors :*

1. $A^\perp$ *est un s.e.v. fermé de* H,
2. $A^\perp = \overline{A}^\perp$,
3. $A \subset (A^\perp)^\perp$ *(que l'on note aussi* $A^{\perp\perp}$*).*

DÉMONSTRATION – 1. Soit $u_1, u_2 \in A^\perp$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ selon que H est un espace de Hilbert réel ou complexe). Pour tout $v \in A$, on a $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \mid v) = \alpha_1(u_1 \mid v) + \alpha_2(u_2 \mid v) = 0$. Donc, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in A^\perp$, ce qui montre que $A^\perp$ est un s.e.v. de H.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^\perp$ telle que $u_n \to u$ dans H, quand $n \to +\infty$. L'application $w \mapsto (w \mid v)$ est continue de H dans K (voir la remarque (6.38)) pour tout $v \in H$. Soit $v \in A$, de $(u_n \mid v) = 0$ on déduit donc que $(u \mid v) = 0$. Ce qui montre que $u \in A^\perp$ et donc que $A^\perp$ est fermé.

2. — Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$.

— Soit maintenant $u \in A^\perp$. On veut montrer que $u \in \overline{A}^\perp$.

Soit $v \in \overline{A}$, il existe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.q. $v_n \to v$ dans H quand $n \to +\infty$. Comme $(u \mid v_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit, par continuité de $w \mapsto (u \mid w)$, que $(u \mid v) = 0$. Donc $u \in \overline{A}^\perp$, ce qui donne $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

Finalement, on a bien montré $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

3. Soit $v \in A$. On a $(u \mid v) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, donc $(v \mid u) = 0$ pour tout $u \in A^\perp$, ce qui donne $v \in (A^\perp)^\perp$

■

Remarque 6.43 Dans le dernier item de la proposition précédente, on peut se demander si $A = A^{\perp\perp}$. On montrera, dans la section suivante que ceci est vrai si A est s.e.v. fermé (ce qui est aussi une condition nécessaire).

On termine cette section avec le théorème de Pythagore.

Théorème 6.44 (Pythagore) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{H}$ *tels que* $(u_i \mid u_j) = 0$ *si* $i \neq j$. *Alors :*

$$\|\sum_{i=1}^{n} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathrm{H}}^2. \tag{6.14}$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est immédiate, par récurrence sur n. L'égalité (6.14) est vraie pour $n = 1$ (et tout $u_1 \in \mathrm{H}$). Soit $n \in \mathrm{N}$. On suppose que (6.14) est vraie (pour tout $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{H}$). Soit $u_1, \ldots, u_{n+1} \in \mathrm{H}$. On pose $y = \sum_{i=1}^{n} u_i$, de sorte que

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \|y + u_{n+1}\|_{\mathrm{H}}^2 = (y + u_{n+1} \mid y + u_{n+1})\\ = (y \mid y) + (y \mid u_{n+1}) + (u_{n+1} \mid y) + (u_{n+1} \mid u_{n+1}).\end{aligned}$$

Comme $(y \mid u_{n+1}) = 0 = (u_{n+1} \mid y)$, on en déduit, avec l'hypothèse de récurrence, que

$$\|\sum_{i=1}^{n+1} u_i\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \|u_i\|_{\mathrm{H}}^2.$$

■

6.2.2 Projection sur un convexe fermé non vide

Remarque 6.45 Soit E un ensemble muni d'une distance, notée d (E est alors un espace métrique). Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. On pose $d(x, \mathrm{A}) = \inf_{y \in \mathrm{A}} d(x, y)$. Il n'existe pas toujours de $x_0 \in \mathrm{A}$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{A})$ et, si un tel x_0 existe, il peut être non unique. Par exemple, dans le cas où A est compact (pour la topologie induite par d), x_0 existe mais peut être non unique.

Dans le cas où il existe un et un seul $x_0 \in \mathrm{A}$ t.q. $d(x, x_0) = d(x, \mathrm{A})$, x_0 est appelé projection de x sur A.

L'objectif de cette section est de montrer l'existence et l'unicité de x_0 dans le cas où A est une partie convexe fermée non vide d'un espace de Hilbert (et d la distance induite par la norme de l'espace de Hilbert).

Définition 6.46 (Partie convexe) *Soit* E *un e.v. sur* K, *avec* $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. *Soit* $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$. *On dit que* C *est convexe si :*

$$u, v \in \mathrm{C},\ t \in [0,1] \Rightarrow tu + (1-t)v \in \mathrm{C}.$$

Théorème 6.47 (Projection sur un convexe fermé non vide)

Soient H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $C \subset H$ *une partie convexe fermée non vide. Soit* $x \in H$. *Alors, il existe un et un seul* $x_0 \in C$ *t.q.* $d(x, x_0) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ *(avec* $d(x, y) = \|x - y\|_H$*). On note* $x_0 = P_C(x)$. P_C *est donc une application de* H *dans* H *(dont l'image est égale à* C*). On écrit souvent* $P_C x$ *au lieu de* $P_C(x)$.

DÉMONSTRATION – **Existence de x_0.**
On pose $d = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$. Comme $C \neq \emptyset$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ t.q. $d(x, y_n) \to d$ quand $n \to +\infty$. On va montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en utilisant l'identité du parallélogramme (6.13) (ce qui utilise la structure hilbertienne de H) et la convexité de C. L'identité du parallélogramme donne

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|_H^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|_H^2 \\ &= -\|(y_n - x) + (y_m - x)\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2,\end{aligned}$$

et donc

$$\|y_n - y_m\|_H^2 = -4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.15}$$

Comme C est convexe, on a $\frac{y_n + y_m}{2} \in C$ et donc $d \leq \|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|_H$. On déduit alors de (6.15) :

$$\|y_n - y_m\|_H^2 \leq -4d^2 + 2\|y_n - x\|_H^2 + 2\|y_m - x\|_H^2. \tag{6.16}$$

Comme $d(y_n, x) = \|y_n - x\|_H \to d$ quand $n \to +\infty$, on déduit de (6.16) que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme H est complet, il existe donc $x_0 \in H$ t.q. $y_n \to x_0$ quand $n \to +\infty$. Comme C est fermée, on a $x_0 \in C$. Enfin, comme $\|x - y_n\|_H \to d$ quand $n \to +\infty$, on a, par continuité (dans H) de $z \mapsto \|z\|_H$, $d(x, x_0) = \|x - x_0\|_H = d = d(x, C)$, ce qui termine la partie existence.

Unicité de x_0. Soit $y_1, y_2 \in C$ t.q. $d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, C) = d$. On utilise encore l'identité du parallélogramme. Elle donne (voir (6.15)) :

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|_H^2 &= -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 2\|y_1 - x\|_H^2 + 2\|y_2 - x\|_H^2 \\ &= -4\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H^2 + 4d^2.\end{aligned}$$

Comme $\frac{y_1 + y_2}{2} \in C$ On a donc $d \leq \|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\|_H$ et donc $\|y_1 - y_2\|_H^2 \leq -4d^2 + 4d^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$. Ce qui termine la partie unicité. ■

Remarque 6.48 Le théorème précédent est, en général, faux si on remplace “Hilbert” par “Banach”. Un exemple de non existence est donné à l'exercice 6.34 (et il est facile de trouver des exemples de non unicité).

On donne maintenant deux caractérisations importantes de la projection. La première est valable pour tout convexe fermé non vide alors que la deuxième ne concerne que les s.e.v. fermés.

Proposition 6.49 (Première caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $C \subset H$ *une partie convexe fermée non vide. Soient* $x \in H$ *et* $x_0 \in C$.

1. *On suppose que* H *est un Hilbert réel. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow (x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.17}$$

2. *On suppose que* H *est un Hilbert complexe. Alors :*

$$x_0 = P_C x \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in C. \tag{6.18}$$

DÉMONSTRATION –
Cas d'un Hilbert réel

- **Sens** ($\Rightarrow$) On veut montrer que $(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$, pour tout $y \in C$. Comme $x_0 = P_C x$, on a $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2$ pour tout $z \in C$. Soit $y \in C$. On prend $z = ty + (1-t)x_0$ avec $t \in]0,1]$. Comme C est convexe, on a $z \in C$ et donc
$$\begin{aligned}\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - z\|_H^2 &= (x - x_0 - t(y - x_0) \mid x - x_0 - t(y - x_0)) \\ &= \|x - x_0\|_H^2 + t^2\|y - x_0\|_H^2 - 2t(x - x_0 \mid y - x_0).\end{aligned}$$
On en déduit
$$2t(x - x_0 \mid y - x_0) - t^2\|y - x_0\|_H^2 \leq 0.$$
On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir
$$2(x - x_0 \mid y - x_0) - t\|y - x_0\|_H^2 \leq 0,$$
ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :
$$(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0.$$
- **Sens** ($\Leftarrow$)
On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x - x_0\|_H^2 \leq \|x - y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.
Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2+\|x_0-y\|_H^2+2(x-x_0 \mid x_0 - y) \geq \|x - x_0\|_H^2$ car $\|x_0 - y\|_H^2 \geq 0$ et $2(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

- **Sens** ($\Rightarrow$)
On veut montrer que $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$, pour tout $y \in C$.

En reprenant les mêmes notations que dans le cas Hilbert réel et en suivant la même démarche, on obtient :

$$\|x-x_0\|_H^2 \le \|x-z\|_H^2 = (x-x_0-t(y-x_0) \mid x-x_0-t(y-x_0))$$
$$= \|x-x_0\|_H^2 + t^2\|y-x_0\|_H^2 - 2t\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0).$$

On en déduit

$$2t\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0) - t^2\|y-x_0\|_H^2 \le 0.$$

On divise cette inégalité par t (on rappelle que $t > 0$) pour obtenir

$$2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid y-x_0) - t\|y-x_0\|_H^2 \le 0,$$

ce qui donne, en faisant tendre t vers 0 :

$$\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0.$$

- **Sens ($\Leftarrow$)**

  On veut montrer que $x_0 = P_C x$, c'est-à-dire $\|x-x_0\|_H^2 \le \|x-y\|_H^2$ pour tout $y \in C$.

  Soit $y \in C$, on a $\|x-y\|_H^2 = \|x-x_0+x_0-y\|_H^2 = \|x-x_0\|_H^2 + \|x_0-y\|_H^2 + 2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge \|x-x_0\|_H^2$ car $\|x_0-y\|_H^2 \ge 0$ et $2\mathfrak{Re}(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0$.

■

Remarque 6.50 On prend comme espace de Hilbert réel $H = L^2_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (avec $E \neq \emptyset$) et on prend $C = \{f \in H : f \ge 0 \text{ p.p.}\}$. On peut montrer que C est une partie convexe fermée non vide et que $P_C f = f^+$ pour tout $f \in H$. Ceci est fait dans l'exercice 6.33.

Un s.e.v. fermé est, en particulier, un convexe fermé non vide. On peut donc définir la projection sur un s.e.v. fermé. On donne maintenant une caractérisation de la projection dans ce cas particulier.

Proposition 6.51 (Deuxième caractérisation de la projection) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H. *Soient* $x \in H$ *et* $x_0 \in F$. *Alors :*

$$x_0 = P_F x \Leftrightarrow (x-x_0) \in F^\perp. \tag{6.19}$$

DÉMONSTRATION – **Cas d'un Hilbert réel**

— **Sens ($\Leftarrow$)**

On veut montrer que $x_0 = P_F x$. On utilise la première caractérisation. Soit $y \in F$. Comme $(x-x_0) \in F^\perp$, on a $(x-x_0 \mid x_0-y) = 0 \ge 0$ (car $x_0 - y \in F$). Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = P_F x$.

— **Sens ($\Rightarrow$)**

On veut montrer que $(x-x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $(x-x_0 \mid x_0-y) \ge 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 + z \in F$ (car F est un s.e.v.) pour obtenir $(x-x_0 \mid z) \le 0$ et $y = x_0 - z \in F$ pour obtenir $(x-x_0 \mid z) \ge 0$. On en déduit $(x-x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x-x_0) \in F^\perp$.

Cas d'un Hilbert complexe

La démonstration est très voisine.

— **Sens (⇐)**

On veut montrer que $x_0 = P_F x$. Soit $y \in F$. Comme $(x - x_0) \in F^\perp$, on a $(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$ (car $x_0 - y \in F$). On a donc $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) = 0$. Donc, la proposition 6.49 donne $x_0 = P_F x$.

— **Sens (⇒)**

On veut montrer que $(x - x_0) \in F^\perp$. La première caractérisation (proposition 6.49) donne $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid x_0 - y) \geq 0$ pour tout $y \in F$. Soit $z \in F$. On choisit $y = x_0 - \alpha z \in F$ (car F est un s.e.v.) avec $\alpha = (x - x_0 \mid z)$ pour obtenir $\mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) \leq 0$. Mais $(x - x_0 \mid \alpha z) = \overline{\alpha}(x - x_0 \mid z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. Donc, $0 \geq \mathfrak{Re}(x - x_0 \mid \alpha z) = |(x - x_0 \mid z)|^2$. On en déduit $(x - x_0 \mid z) = 0$, ce qui donne que $(x - x_0) \in F^\perp$.

■

Définition 6.52 (Projection orthogonale et projecteurs algébriques)

1. *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* $F \subset H$ *un s.e.v. fermé de* H. *L'opérateur* P_F *s'appelle projecteur orthogonal sur* F. *Si* $u \in H$, $P_F u$ *s'appelle la projection orthogonale de* u *sur* F.
2. *(Rappel algébrique) Soit* E *un e.v. sur* K ($K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$)*. Soient* F, G *deux s.e.v. de* E *t.q.* $E = F \oplus G$. *Pour* $x \in E$, *il existe donc un et un seul couple* $(y, z) \in F \times G$ *t.q.* $x = y + z$. *On pose* $y = Px$ *et donc* $z = (I - P)x$ *(où I est l'application identité).* P *et* $I - P$ *sont les projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$. *Ce sont des applications linéaires de* E *dans* E. *L'image de* P *est égale à* F *et l'image de* $I - P$ *est égale à* G.

   Dans le prochain théorème, on va comparer la projection orthogonale et des projecteurs algébriques particuliers.

Théorème 6.53 (Projecteur orthogonal et projecteur algébrique) *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. fermé de* H. *Alors :*

1. $H = F \oplus F^\perp$,
2. P_F *(projecteur orthogonal sur* F*) est égal au projecteur algébrique sur* F *associé à la décomposition* $H = F \oplus F^\perp$.
3. $F = F^{\perp\perp}$.

DÉMONSTRATION – On rappelle que l'on a déjà vu que $F^\perp$ est un s.e.v. fermé.

1. Soit $u \in H$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^\perp$. Comme $P_F u \in F$, on en déduit que $H = F + F^\perp$.

   Soit maintenant $u \in F \cap F^\perp$. On doit donc avoir $(u \mid u) = 0$, ce qui donne $u = 0$ et donc $F \cap F^\perp = \{0\}$.

   On a donc $H = F \oplus F^\perp$.
2. Soit $u \in H$. Comme $u = P_F u + (u - P_F u)$, avec $P_F u \in F$ et $(u - P_F u) \in F^\perp$, on voit que P_F est égal au projecteur algébrique sur F associé à la décomposition $H = F \oplus F^\perp$. (Noter aussi que $(I - P_F)$ est égal au projecteur algébrique sur $F^\perp$ associé à la décomposition $H = F \oplus F^\perp$.)
3. Il reste à montrer que $F = F^{\perp\perp}$.
   — On a déjà vu que $F \subset F^{\perp\perp}$.
   — Soit $u \in F^{\perp\perp}$. On a $u = (u - P_F u) + P_F u$. La 2eme caractérisation (proposition 6.51) donne $(u - P_F u) \in F^\perp$ et on a aussi $(u - P_F u) \in F^{\perp\perp}$ car $u \in F^{\perp\perp}$ et $P_F u \in F \subset F^{\perp\perp}$. On a donc $(u - P_F u) \in F^\perp \cap F^{\perp\perp} = \{0\}$. Donc $u = P_F u \in F$. On a donc montré que $F^{\perp\perp} \subset F$.

   Finalement, on a bien montré que $F = F^{\perp\perp}$.

■

Le théorème 6.53 a un corollaire très utile :

Corollaire 6.54 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* F *un s.e.v. de* H. *Alors :*

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

DÉMONSTRATION – $\overline{F}$ est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $H = \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp$. On a déjà vu que $(\overline{F})^\perp = F^\perp$, on a donc

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

■

6.2.3 Théorème de Représentation de Riesz

Remarque 6.55 On rappelle ici la définition 6.37 et la remarque 6.38. Soit H un Banach réel ou complexe. On note H' (ou $\mathcal{L}(H, K)$) l'ensemble des applications linéaires continues de H dans K (avec $K = \mathbb{R}$ pour un Banach réel et $K = \mathbb{C}$ pour un Banach complexe). On rappelle que H^* est l'ensemble des applications linéaires de H dans K. On a donc $H' \subset H^*$. Si H est de dimension finie, on a $H' = H^*$, mais si H est de dimension infinie, on peut montrer que $H' \neq H^*$.

1. Si $T \in H^*$, on rappelle que T est continue si seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ t.q. $|T(u)| \le k\|u\|_H$, pour tout $u \in H$.
2. Si $T \in H'$, on pose $\|T\|_{H'} = \sup_{u \in H\setminus\{0\}} \frac{|T(u)|}{\|u\|_H}$. On rappelle que $\|\cdot\|_{H'}$ est bien une norme sur H′ et que H′, muni de cette norme, est aussi un espace de Banach (sur K). Noter que H′, muni de cette norme, est un espace de Banach même si H est un e.v.n. non complet. Noter aussi que, si $T \in H'$ et $u \in H$, on a $|T(u)| \le \|T\|_{H'}\|u\|_H$.
3. On suppose maintenant que H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Pour $v \in H$, on pose $\varphi_v(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ((6.11) ou (6.12)), on a $|\varphi_v(u)| \le \|u\|_H\|v\|_H$. On a donc $\varphi_v \in H'$ et $\|\varphi_v\|_{H'} \le \|v\|_H$. En remarquant que $\varphi_v(v) = \|v\|_H^2$, on montre alors que $\|\varphi_v\|_{H'} = \|v\|_H$.

   On considère maintenant l'application $\varphi : H \to H'$ définie par $\varphi(v) = \varphi_v$ pour tout $v \in H$.

   — Si $K = \mathbb{R}$, φ est une application linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$,

   $$\varphi_{\alpha v+\beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \alpha(u \mid v) + \beta(u \mid w) = \alpha\varphi_v(u) + \beta\varphi_w(u),$$

   ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \alpha\varphi_v + \beta\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc injective.)

   — Si $K = \mathbb{C}$, φ est une application anti-linéaire de H dans H′ car, pour tout $v, w \in H$ tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $u \in H$

   $$\varphi_{\alpha v+\beta w}(u) = (u \mid \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha}(u \mid v) + \overline{\beta}(u \mid w) = \overline{\alpha}\varphi_v(u) + \overline{\beta}\varphi_w(u),$$

   ce qui donne $\varphi_{\alpha v+\beta w} = \overline{\alpha}\varphi_v + \overline{\beta}\varphi_w$. L'application φ est donc une isométrie (anti-linéaire) de H sur $\mathrm{Im}(\varphi) \subset H'$. (En particulier φ est donc, ici aussi, injective.)

   L'objectif du théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) est de montrer que l'application φ est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(\varphi) = H'$.

Théorème 6.56 (Représentation de Riesz) *Soit* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit* $T \in H'$. *Alors, il existe un et un seul élément de* H, *noté* v, *tel que*

$$T(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in H. \quad (6.20)$$

L'application φ *définie dans la remarque 6.55 est donc surjective (le résultat ci-dessus donne* $T = \varphi_v$*).*

DÉMONSTRATION –

Existence de v On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. Comme T est linéaire et continue, F est un s.e.v. fermé de H. Le théorème 6.53 donne donc $H = F \oplus F^\perp$. On distingue deux cas :

- **Cas 1.** On suppose ici que $T = 0$. On a alors $F = H$ et il suffit de prendre $v = 0$ pour avoir (6.20).
- **Cas 2.** On suppose maintenant que $T \neq 0$. On a donc $F \neq H$ et donc $F^\perp \neq \{0\}$ (car $H = F \oplus F^\perp$). Il existe donc $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. Comme $v_0 \notin F$, on a $T(v_0) \neq 0$.

  Pour $u \in H$, on a alors
  $$u = u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 + \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0. \tag{6.21}$$
  On remarque que $u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \in F$ car
  $$T(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0) = T(u) - \frac{T(u)}{T(v_0)} T(v_0) = 0.$$
  Donc, comme $v_0 \in F^\perp$, on a $(u - \frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \mid v_0) = 0$ et (6.21) donne
  $$(u \mid v_0) = (\frac{T(u)}{T(v_0)} v_0 \mid v_0) = \frac{T(u)}{T(v_0)} (v_0 \mid v_0),$$
  d'où l'on déduit
  $$T(u) = \frac{T(v_0)}{(v_0 \mid v_0)} (u \mid v_0).$$
  On pose $v = \frac{T(v_0)}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et $v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On a bien
  $$T(u) = (u \mid v), \text{ pour tout } u \in H,$$
  c'est-à-dire $T = \varphi_v$ (avec les notations de la remarque 6.55).

Dans les deux cas on a bien trouvé $v \in H$ vérifiant (6.20).

Unicité de v Soient $v_1, v_2 \in H$ t.q. $T = \varphi_{v_1} = \varphi_{v_2}$ (avec les notations de la remarque 6.55). Comme φ est linéaire (si $K = \mathbb{R}$) ou anti-linéaire (si $K = \mathbb{C}$), on en déduit $\varphi_{v_1 - v_2} = \varphi_{v_1} - \varphi_{v_2} = 0$. Comme φ est une isométrie, on a donc $v_1 = v_2$, ce qui donne la partie unicité du théorème. ■

Remarque 6.57 (Densité du noyau d'une forme linéaire non continue) Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). Soit $T \in H^* \setminus H'$. T est donc une application linéaire de H dans $K(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, non continue. On pose $F = \mathrm{Ker}(T)$. La démonstration du théorème 6.56 permet alors de montrer que $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F} = H$ (dans un Hilbert H, le noyau d'une forme linéaire non continue est donc toujours dense dans H). En effet, on raisonne par l'absurde :

si $F^\perp \neq \{0\}$, il existe $v_0 \in F^\perp$, $v_0 \neq 0$. le raisonnement fait pour démontrer le théorème 6.56 donne alors $T(u) = (u \mid v)$ pour tout $u \in H$, avec $v = \frac{T(v_0)}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{R}$ et

$v = \frac{\overline{T(v_0)}}{(v_0|v_0)} v_0$ si $K = \mathbb{C}$. On en déduit que T est continu, contrairement à l'hypothèse de départ.

On a donc $F^\perp = \{0\}$ et donc $\overline{F}^\perp = F^\perp = \{0\}$. On en déduit, comme $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp$ (par le théorème 6.53, car $\overline{F}$ est toujours un s.e.v. fermé), que $H = \overline{F}$.

Remarque 6.58 (Structure hilbertienne de H'**)** Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). On sait déjà que H' (avec la norme habituelle, voir la remarque 6.55) est un espace de Banach. Le théorème 6.56 permet aussi de montrer que H' est un espace de Hilbert. En effet, en prenant les notations de la remarque 6.55, l'application φ est un isométrie bijective, linéaire ou anti-linéaire de H dans H'. Cela suffit pour montrer que l'identité du parallélogramme (identité (6.13)) est vraie sur H' et donc que H' est une espace de Hilbert (voir la remarque 6.40). Mais on peut même construire le produit scalaire sur H' (induisant la norme usuelle de H') :

Soient $T_1, T_2 \in H'$. Par le théorème 6.56, il existe v_1 et $v_2 \in H$ tels que $T_1 = \varphi_{v_1}$ et $T_2 = \varphi_{v_2}$. On pose $(T_1 \mid T_2)_{H'} = (v_2 \mid v_1)_H$ (où $(\cdot \mid \cdot)_H$ désigne ici le produit scalaire dans H). Il est facile de voir que $(\cdot \mid \cdot)_{H'}$ est un produit scalaire sur H'. Il induit bien la norme usuelle de H' car $(T_1 \mid T_1)_{H'} = (v_1 \mid v_1)_H = \|v_1\|_H^2 = \|\varphi_{v_1}\|_{H'}^2 = \|T_1\|_{H'}^2$ car φ est une isométrie.

6.2.4 Bases hilbertiennes

Soient E un e.v. sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $B = \{e_i, i \in I\} \subset E$ une famille d'éléments de E (l'ensemble I est quelconque, il peut être fini, dénombrable ou non dénombrable). On rappelle que $B = \{e_i, i \in I\} \subset E$ est une base (algébrique) de E si B vérifie les deux propriétés suivantes :

1. B est libre, c'est-à-dire :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i\in J} \alpha_i e_i = 0, \text{ avec} \\ J \subset I, \operatorname{card}(J) < +\infty, \\ \alpha_i \in K \text{ pour tout } i \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ pour tout } i \in J,$$

2. B est génératrice, c'est-à-dire que pour tout $u \in E$, il existe $J \subset I$, $\operatorname{card}(J) < +\infty$, et il existe $(\alpha_i)_{i\in J} \subset K$ t.q. $u = \sum_{i\in J} \alpha_i e_i$.

En notant $\operatorname{vect}\{e_i, i \in I\}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_i, i \in I\}$, le fait que B soit génératrice s'écrit donc : $E = \operatorname{vect}\{e_i, i \in I\}$.

On rappelle aussi que tout espace vectoriel admet des bases (algébriques). Cette propriété se démontre à partir de l'axiome du choix.

Dans le cas d'un espace de Hilbert, on va définir maintenant une nouvelle notion de base : la notion de base hilbertienne.

Définition 6.59 (Base hilbertienne) *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et* $B = \{e_i,\ i \in I\} \subset H$ *une famille d'éléments de* H *(l'ensemble* I *est quelconque). La famille* B *est une base hilbertienne de* H *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j, \end{cases}$ *pour tout* $i, j \in I$.

2. $\overline{vect\{e_i,\ i \in I\}} = H$. *On rappelle que* $vect\{e_i,\ i \in I\} = \{\sum_{i\in J} \alpha_i e_i,\ J \subset I,\ \mathrm{card}(J) < +\infty,\ (\alpha_i)_{i\in J} \subset K\}$.

Remarque 6.60 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Si H est de dimension finie, il existe des bases hilbertiennes (qui sont alors aussi des bases algébriques). Le cardinal d'une base hilbertienne est alors égal à la dimension de H puisque, par définition, la dimension de H est égal au cardinal d'une base algébrique (ce cardinal ne dépendant pas de la base choisie). La démonstration de l'existence de bases hilbertiennes suit celle de la proposition 6.62 (la récurrence dans la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$, voir la preuve de la proposition 6.62).
2. Si H est de dimension infinie et que H est séparable (voir la définition 6.61), il existe des bases hilbertiennes dénombrables (voir la proposition 6.62).
3. Si H est de dimension infinie et que H est non séparable, il existe toujours des bases hilbertiennes (ceci se démontre avec l'axiome du choix), mais elles ne sont plus dénombrables.

Définition 6.61 (Espace séparable) *Soit* E *un e.v.n. sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On dit que* E *est séparable s'il existe* $A \subset E$ *t.q.* $\overline{A} = E$ *et* A *au plus dénombrable.*

Proposition 6.62 (Existence d'une base hilbertienne) *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, de dimension infinie. On suppose que* H *est séparable. Alors, il existe une base hilbertienne* $B = \{e_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset H$ *de* H.

DÉMONSTRATION – Comme H est séparable, il existe une famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset H$ dense dans H, c'est-à-dire t.q. $\overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} = H$.

On va construire, par une récurrence sur n, une famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ t.q. :

1. $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,
2. $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset \mathrm{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aura alors trouvé une base hilbertienne car on aura $f_i \in \text{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $H = \overline{\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}} \subset H$, d'où $H = \overline{\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$. Avec la propriété $(e_n \mid e_m) = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, ceci donne bien que $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H.

On construit maintenant la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Construction de e_0

Soit $\varphi(0) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \neq 0\}$ (les f_i ne sont pas tous nuls car $H \neq \{0\}$). On prend $e_0 = \frac{f_{\varphi(0)}}{\|f_{\varphi(0)}\|}$, de sorte que $(e_0 \mid e_0) = 1$ et $f_0 \in \text{vect}\{e_0\}$ (car $f_0 = \|f_0\| e_0$, même si $\varphi(0) \neq 0$).

Construction de e_{n+1}

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose construits $e_0, \ldots, e_n$ t.q.

— $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n\}$,

— $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$.

(Ce qui est vérifié pour $n = 0$ grâce à la construction de e_0.)

On construit maintenant e_{n+1} t.q. les deux assertions précédentes soient encore vraies avec $n+1$ au lieu de n.

Un sous espace vectoriel de dimension finie est toujours fermé, donc $\overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Si $f_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a alors $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ et donc $H = \overline{\text{vect}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}} = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. Ce qui prouve que H est de dimension finie (et $\dim(H) = n+1$). Comme H est de dimension infinie, il existe donc $i \in \mathbb{N}$ t.q. $f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ (dans le cas où H est dimension finie, la construction de la famille des e_n s'arrête pour $n = \dim(H) - 1$ et on obtient une base hilbertienne avec $\{e_0, \ldots, e_n\}$). On pose alors $\varphi(n+1) = \min\{i \in \mathbb{N};\ f_i \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}\}$. On a donc, en particulier, $\varphi(n+1) \geq n+1$. En prenant $\tilde{e}_{n+1} = f_{\varphi(n+1)} - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (f_{\varphi(n+1)} \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on remarque que $\tilde{e}_{n+1} \neq 0$ (car $f_{\varphi(n+1)} \notin \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$) et que $(\tilde{e}_{n+1} \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Il suffit alors de prendre $e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$ pour avoir $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$. Enfin, il est clair que $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ car on a $f_{n+1} = \|\tilde{e}_{n+1}\| e_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_{n+1}\}$ si $\varphi(n+1) = n+1$ et $f_{n+1} \in \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$ si $\varphi(n+1) > n+1$.

On a donc bien trouvé e_{n+1} t.q.

— $(e_p \mid e_m) = \delta_{p,m}$ pour tout $p, m \in \{0, \ldots, n+1\}$,

— $\{f_0, \ldots, f_p\} \subset \text{vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n+1\}$.

Ce qui conclut la construction de la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ vérifiant les deux assertions demandées. Comme cela a déjà été dit, la famille $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est alors une base hilbertienne de H. ■

La proposition 6.62 montre donc que tout espace de Hilbert séparable, et de dimension infinie, admet une base hilbertienne dénombrable. On peut aussi démontrer la

réciproque de ce résultat, c'est-à-dire que tout espace de Hilbert admettant une base hilbertienne dénombrable est séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.32). La proposition suivante s'adresse donc uniquement aux espaces de Hilbert séparables.

Proposition 6.63 *Soient* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *et* $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie (cf. exercice 6.32) et, dans ce cas, une telle base existe d'après la proposition 6.62). Alors :*

1. *(Identité de Bessel)* $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(u \mid e_n)|^2$, *pour tout* $u \in H$,
2. $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)e_n$, *pour tout* $u \in H$, *c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^{n} (u \mid e_i)e_i \to u$ *dans* H, *quand* $n \to +\infty$,
3. *soient* $u \in H$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ *t.q.* $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ *(c'est-à-dire* $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ *dans* H *quand* $n \to +\infty$*), alors* $\alpha_i = (u \mid e_i)$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$,
4. *(identité de Parseval)* $(u \mid v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)\overline{(v \mid e_n)}$, *pour tout* $u, v \in H$.

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$. F_n est donc un s.e.v. fermé de H (on a $\dim(F_n) = n + 1$ et on rappelle qu'un espace de dimension finie est toujours complet, F_n est donc fermé dans H).

On remarque que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \text{vect}\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et donc que $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$ (car $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H).

Soit $u \in H$. La suite $(d(u, F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (car $F_n \subset F_{n+1}$), on a donc $d(u, F_n) \downarrow l$ quand $n \to +\infty$, avec $l \geq 0$. On va montrer que $l = 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tel que $d(v, u) \leq \varepsilon$ (car $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n} = H$) ; il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $v \in F_n$. On a alors $d(u, F_n) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $l \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien montré que $l = 0$.

On utilise maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la projection sur un convexe fermé non vide (théorème 6.47). Il donne l'existence (et l'unicité) de $u_n = P_{F_n} u \in F_n$ t.q. $d(u_n, u) = d(u, F_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u = (u - u_n) + u_n$ et la deuxième caractérisation de la projection (proposition 6.51) donne que $(u - u_n) \in F_n^{\perp}$. Le théorème de Pythagore (théorème 6.44) donne enfin que $\|u\|^2 = \|u_n\|^2 + \|u - u_n\|^2$. Comme $\|u - u_n\| = d(u, u_n) = d(u, F_n) \downarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.22}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in F_n = \text{vect}\{e_0, \ldots, e_n\}$, on a $u_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_i = (u_n \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ (car $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i, j). Puis, comme $(u - u_n) \in F_n^{\perp}$, on a $(u - u_n \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, d'où l'on déduit que $\alpha_i = (u \mid e_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On a donc montré que $u_n = \sum_{i=0}^{n} (u \mid e_i)e_i$, ce qui, avec le théorème de Pythagore, donne $\|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |(u \mid e_i)|^2$. On obtient donc, avec (6.22) le premier item de la proposition, c'est-à-dire l'identité de Bessel.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition. En reprenant les notations précédentes, on a, pour $u \in H$, $u = (u - u_n) + u_n$ et $(u - u_n) \to 0$ dans H quand

$n \to +\infty$ (car $\|u - u_n\| = d(u, F_n)$). On a donc $u_n \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Ceci donne bien le deuxième item de la proposition car on a vu que $u_n = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)e_i$.

Pour montrer le troisième item de la proposition, on suppose que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ est t.q. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \to u$ dans H quand $n \to +\infty$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i \mid e_j)$ $= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (e_i \mid e_j) = \alpha_j$ pour $n \geq j$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à son premier argument (ce qui est une conséquence simple de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit (faisant $n \to +\infty$) que $(u \mid e_j) = \alpha_j$, ce qui prouve bien le troisième item de la proposition.

Enfin, pour montrer l'identité de Parseval, on utilise la continuité du produit scalaire par rapport à ses deux arguments (ce qui est aussi une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), c'est-à-dire le fait que

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to u \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \\ v_n \to v \text{ dans H, quand } n \to +\infty, \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n \mid v_n) \to (u \mid v) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.23}$$

Pour $u, v \in H$, on utilise (6.23) avec $u_n = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)e_i$ et $v_n = \sum_{i=0}^{n}(v \mid e_i)e_i$. On a bien $u_n \to u$ et $v_n \to v$ (d'après le deuxième item) et on conclut en remarquant que $(u_n \mid v_n) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_j)}(e_i \mid e_j) = \sum_{i=0}^{n}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$. ■

Remarque 6.64 Soit H un espace de Hilbert sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, séparable et de dimension infinie.

1. Soit $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective. On pose $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. Comme $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} = \{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$, la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc aussi une base hilbertienne de H. On peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ ou avec la famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Le deuxième item de la proposition 6.63 donne alors, pour tout $u \in H$,

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

Ceci montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, dans H, quel que soit l'ordre dans lequel on prend les termes de la série et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre dans lequel les termes ont été pris. Noter pourtant que cette série peut ne pas être absolument convergente. On peut remarquer, pour donner un exemple, que la suite $(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} e_i)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ est de Cauchy, donc converge, dans H, quand $n \to +\infty$, vers un certain u. Pour cet élément u de H, on a $(u \mid e_i) = \frac{1}{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)e_n$ est donc commutativement convergente mais n'est pas absolument convergente car $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(u \mid e_n)e_n\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = +\infty$ (voir à ce propos l'exercice 6.31). L'exercice 6.42 complète cet exemple en construisant une isométrie bijective naturelle entre H et l^2.

Par contre, on rappelle que, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente (voir l'exercice 2.34). On peut d'ailleurs remarquer que la série donnée à l'item 4 de la proposition 6.63 est commutativement convergente (pour la même raison que pour la série de l'item 2, donnée ci-dessus) et est aussi absolument convergente. En effet, pour $u, v \in H$, on a $|(u \mid e_i)(v \mid e_i)| \le |(u \mid e_i)|^2 + |(v \mid e_i)|^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui montre bien (grâce à l'identité de Bessel) que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_n)\overline{(v \mid e_n)}$ est absolument convergente (dans K).

2. Soit I un ensemble dénombrable (un exemple intéressant pour la suite est $I = \mathbb{Z}$) et $\{e_i,\, i \in I\} \subset H$.

   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{e}_n = e_{\varphi(n)}$. On a alors $\{e_i,\, i \in I\} = \{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. La famille $\{e_i,\, i \in I\}$ est donc une base hilbertienne si et seulement si la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne.

   Si la famille $\{e_i,\, i \in I\}$ est une base hilbertienne, on peut donc appliquer la proposition 6.63 avec la famille $\{\tilde{e}_n,\, n \in \mathbb{N}\}$. On obtient, par exemple, que pour tout $u \in H$:
$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}.$$

   La somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u \mid e_{\varphi(n)})e_{\varphi(n)}$ ne dépend donc pas du choix de la bijection φ entre $\mathbb{N}$ et I et il est alors légitime de la noter simplement $\sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$. Ceci est détaillé dans la définition 6.65 et permet d'énoncer la proposition 6.66.

Définition 6.65 *Soient* H *un espace de Hilbert (réel ou complexe) et* I *un ensemble dénombrable. Soit* $(u_i)_{i\in I} \subset H$. *On dit que la série* $\sum_{i\in I} u_i$ *est commutativement convergente s'il existe* $u \in H$ *t.q., pour tout* $\varphi : \mathbb{N} \to I$ *bijective, on ait*

$$\sum_{p=0}^{n} u_{\varphi(p)} \to u, \text{ quand } n \to +\infty.$$

On note alors $u = \sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 6.66 *Soit* H *un espace de Hilbert sur* K, $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soient* I *dénombrable et* $\{e_i,\, i \in I\}$ *une base hilbertienne de* H *(l'espace* H *est donc séparable et de dimension infinie). Alors :*

1. *(Identité de Bessel) Pour tout* $u \in H$, *la série* $\sum_{i\in I}|(u \mid e_i)|^2$ *est commutativement convergente et* $\|u\|^2 = \sum_{i\in I}|(u \mid e_i)|^2$,
2. *Pour tout* $u \in H$, *la série* $\sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$ *est commutativement convergente et* $u = \sum_{i\in I}(u \mid e_i)e_i$,

3. *soient* $u \in H$ *et* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ *tels que la série* $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i$ *est commutativement convergente et* $u = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, *alors* $\alpha_i = (u \mid e_i)$ *pour tout* $i \in I$,
4. *(identité de Parseval) Pour tous* $u, v \in H$, *la série* $\sum_{i\in I}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$ *est commutativement convergente et* $(u \mid v) = \sum_{i\in I}(u \mid e_i)\overline{(v \mid e_i)}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est immédiate à partir de la proposition 6.63 et de la définition des séries commutativement convergentes (définition 6.65). Il suffit de remarquer que $\{e_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de H pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to I$ bijective (et d'appliquer la proposition 6.63), comme cela est indiqué dans la remarque 6.64 (deuxième item). ■

La proposition suivante donne une caractérisation très utile des bases hilbertiennes.

Proposition 6.67 (Caractérisation des bases hilbertiennes) *Soit* H *un espace de Hilbert réel ou complexe. Soit* $\{e_i,\ i \in I\} \subset H$ *t.q.* $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$ *pour tout* $i, j \in I$. *Alors,* $\{e_i,\ i \in I\}$ *est une base hilbertienne si et seulement si :*

$$u \in H,\ (u \mid e_i) = 0\, \forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

DÉMONSTRATION – On pose $F = \text{vect}\{e_i,\ i \in I\}$. F est s.e.v. de H.

On sait que $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\overline{F} = H$. Or, on a déjà vu (proposition 6.54) que $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$. Donc, $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H,\ u \in F^{\perp} \Rightarrow u = 0.$$

Comme $u \in F^{\perp}$ si et seulement si $(u \mid e_i) = 0$ pour tout $i \in I$, on en déduit que $\{e_i,\ i \in I\}$ est une base hilbertienne si et seulement si

$$u \in H,\ (u \mid e_i) = 0\, \forall i \in I \Rightarrow u = 0.$$

■

On donne maintenant un exemple de base hilbertienne, cet exemple donne un résultat de convergence de la série de Fourier d'une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour cet exemple, on prend $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0, 2\pi[, \mathcal{B}(]0, 2\pi[), \lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0, 2\pi[)$. On rappelle que H est un espace de Hilbert complexe et que le produit scalaire sur H est donné par $(f \mid g)_2 = \int f\overline{g}d\lambda = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$ pour $f, g \in H$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in H$ par (en confondant e_n avec son représentant continu) :

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx),\ x \in]0, 2\pi[. \tag{6.24}$$

La convergence dans H de la série de Fourier de $f \in H$ est alors donnée par la proposition suivante (noter que cette proposition ne donne pas de convergence ponctuelle de la série de Fourier, même si f est continue).

Proposition 6.68 (Séries de Fourier) *Soit* $H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. *Alors :*

1. *La famille* $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, *où* e_n *est donnée par (6.24), est une base hilbertienne de* H.
2. *Pour tout* $f \in H$, *la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n$ *est commutativement convergente et*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \mid e_n)_2 e_n.$$

En particulier, on a

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n} (f \mid e_p)_2 e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – Pour démontrer que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne, on utilise la proposition 6.67. Il suffit donc de montrer :

1. $(e_n \mid e_m)_2 = \delta_{n,m}$ pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$,
2. $f \in H$, $(f \mid e_n)_2 = 0\ \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

L'assertion 1 est immédiate car $(e_n \mid e_m)_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp(i(n-m)x)dx$. Ce qui donne bien 0 si $n \neq m$ et 1 si $n = m$.

Pour montrer l'assertion 2, soit $f \in H$ t.q. $(f \mid e_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On va montrer que $f = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$ p.p.) en raisonnant en plusieurs étapes.

Etape 1. On note $P = \text{vect}\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (P est donc l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par anti–linéarité du produit scalaire de H par rapport à son deuxième argument, on a $(f \mid g) = 0$ pour tout $g \in P$.

Etape 2. On note $C_p = \{g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})\,;\, g(0) = g(2\pi)\}$. On peut montrer que P est dense dans C_p pour la norme de la convergence uniforme (définie par $\|g\|_u = \max\{g(x), x \in [0,2\pi]\}$). On admet ce résultat ici (c'est une conséquence du théorème de Stone-Weierstrass). Soit $g \in C_p$, il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P$ t.q. $g_n \to g$ uniformément sur $[0,2\pi]$. On a donc $\|g_n - g\|_u = \|g_n - g\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme $\lambda([0,2\pi]) < +\infty$, on en déduit que $\|g_n - g\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. (Plus précisément, on a ici $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_\infty$). Comme $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par l'étape 1), on en déduit (avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C_p$.

Etape 3. Soit $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit g_n par :

$$g_n(x) = g(x), \text{ si } x \in [\tfrac{1}{n}, 2\pi],$$
$$g_n(x) = g(2\pi) + (g(\tfrac{1}{n}) - g(2\pi))(nx), \text{ si } x \in [0, \tfrac{1}{n}[,$$

de sorte que $g_n \in C_p$ (noter que g_n est affine entre 0 et $\frac{1}{n}$ et vérifie $g_n(0) = g(2\pi)$ et $g_n(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$).

Par l'étape 2, on a $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, le théorème de convergence dominée dans L^p donne que $g_n \to g$ dans H quand $n \to +\infty$ (noter en effet que $g_n \to g$ p.p. et que $g_n \le \|g\|_\infty \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). On en déduit donc que $(f \mid g)_2 = 0$. On a donc $(f \mid g)_2 = 0$ pour tout $g \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$.

Etape 4. On prend maintenant $g \in H = L^2_{\mathbb{C}}(]0,2\pi[,\mathcal{B}(]0,2\pi[),\lambda)$. On définit $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{g} = g$ sur $[0,2\pi]$ et $\tilde{g} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus[0,2\pi]$. On obtient ainsi $\tilde{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (On a, comme d'habitude, confondu un élément de L^2 avec l'un de ses représentants ; et λ désigne maintenant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On montre dans l'exercice (corrigé) 6.5 que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On en déduit facilement que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Il existe donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $h_n \to \tilde{g}$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} |h_n(x) - g(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}} |h_n(x) - \tilde{g}(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En posant $g_n = (h_n)_{|[0,2\pi]}$, on a donc $g_n \in C([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $g_n \to g$ dans H, quand $n \to +\infty$. Comme l'étape 3 donne $(f \mid g_n)_2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(f \mid g)_2 = 0$.

Pour conclure, il suffit maintenant de prendre $g = f$. On obtient $(f \mid f)_2 = 0$ et donc $f = 0$ p.p..

On a bien ainsi montré (grâce à la proposition 6.67) que $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Soit $f \in H$. La proposition 6.66 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)_2 e_n$ est commutativement convergente et que

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \mid e_n)_2 e_n.$$

En utilisant la définition 6.65 et la bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ donnée par $\varphi(0) = 0$, et, pour $n \ge 1$, $\varphi(2n-1) = n$, $\varphi(2n) = -n$, on a donc, en particulier, $\sum_{i=0}^m (f \mid e_{\varphi(m)})_2 e_{\varphi(m)} \to f$, dans H, quand $m \to \infty$. En prenant $m = 2n$, ceci donne exactement

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{p=-n}^{n} (f \mid e_p) e_p(x)|^2 dx \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

■

6.3 Dualité dans les espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

6.3.1 Dualité pour $p = 2$

Soit (E,T,m) un espace mesuré. On note $H = L^2_K(E,T,m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in L^2_K(E,T,m)$. On note $\varphi_f : H \to K$, l'application définie par $\varphi_f(g) = (g \mid f)_2$. On a déjà vu (remarque 6.38) que $\varphi_f \in H'$ (dual topologique de H). On remarque

aussi que $\|\varphi_f\|_{H'} = \|f\|_H = \|f\|_2$. En effet $|\varphi_f(g)| \le \|f\|_H \|g\|_H$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)et $|\varphi_f(f)| = \|f\|_H^2$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{H'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_H}, \ g \in H \setminus \{0\}\} = \|f\|_H.$$

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56 page 325) appliqué à l'espace de Hilbert $H = L^2_K(E, T, m)$ donne que pour tout $T \in H'$, il existe un et un seul $f \in H$ t.q. $T(g) = (g \mid f)_2$ pour tout $g \in H$, c'est-à-dire un et un seul $f \in H$ t.q. $T = \varphi_f$.

L'application $\varphi \ : f \mapsto \varphi_f$ est donc une isométrie bijective de $L^2_K(E, T, m)$ sur $L^2_K(E, T, m)$. (Noter que φ est linéaire si $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $K = \mathbb{C}$.)

Cette situation est spécifique au cas $p = 2$. Nous examinons ci-après le cas général $1 \le p \le \infty$.

6.3.2 Dualité pour $1 \le p \le \infty$

Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $p \in [1, +\infty]$, on pose $q = \frac{p}{p-1} \in [1, +\infty]$ (de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, q s'appelle le conjugué de p). Dans toute cette section, on note $L^r_K = L^r_K(E, T, m)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et $r \in [1, \infty]$).

On cherche à caractériser le dual de L^p_K, de manière semblable à ce qui a été fait à la section précédente dans le cas $p = 2$.

Soit $f \in L^q_K$, on considère l'application :

$$\varphi_f \ : g \in L^p_K \mapsto \begin{cases} \displaystyle\int g f \, dm \text{ si } K = \mathbb{R}, \\ \displaystyle\int g \overline{f} \, dm \text{ si } K = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{6.25}$$

L'inégalité de Hölder (proposition 6.26) montre que $\varphi_f(g)$ est effectivement bien définie pour $g \in L^p_K$ et que φ_f est continue de L^p_K dans $\mathbb{R}$; donc $\varphi_f \in (L^p_K)'$ (dual topologique de L^p_K). On peut aussi obtenir un majorant de la norme de φ_f car l'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_f(g)| \le \|f\|_q \|g\|_p, \text{ pour tout } g \in L^p_K,$$

d'où l'on déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\left\{\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p}, \ g \in L^p_K \setminus \{0\}\right\} \le \|f\|_q. \tag{6.26}$$

On définit donc une application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$ de L^q_K dans $(L^p_K)'$. La définition de φ_f (formule (6.25)) montre que cette application est linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. Elle est toujours continue, grâce à (6.26). On montre maintenant que c'est, en général, une isométrie.

Proposition 6.69 (Injection de L^q dans $(L^p)'$) *Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $p \in [1, +\infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Si $p = 1$, la mesure m est supposée de plus σ-finie. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25) est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$. (L'application φ est donc nécessairement injective. La surjectivité est étudiée dans le théorème 6.70).*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que φ est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. On sait aussi que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \le \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$ (voir (6.26)). Pour terminer la démonstration de cette proposition, Il suffit donc de montrer que, pour tout $f \in L^q_K$,

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} \ge \|f\|_q. \tag{6.27}$$

On se limite au cas $K = \mathbb{R}$ (les adaptations pour traiter le cas $K = \mathbb{C}$ sont faciles à deviner).

Soit $f \in L^q_{\mathbb{R}}$. On suppose $f \neq 0$ (sinon (6.27) est immédiat). On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Pour montrer 6.27, on va chercher une fonction $g \in L^p_K \setminus \{0\}$ telle que $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q$.

On distingue maintenant trois cas.

Cas 1 : $1 < p < \infty$**.** On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par $g(x) = |f(x)|^{q-1}\text{sign}(f(x))$ pour tout $x \in E$, avec la fonction sign : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$. La fonction g est mesurable (comme composée d'applications mesurables) et on a (en notant que $p = \frac{q}{q-1}$) :

$$\int |g|^p dm = \int (|f|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}} dm = \int |f|^q dm < \infty.$$

Donc, $g \in L^p_{\mathbb{R}}$ (plus précisément, $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) et $\|g\|_p = \|f\|_q^{\frac{q}{p}} \neq 0$. Pour ce choix de g, on a donc

$$\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \int f g dm = \frac{1}{\|f\|_q^{\frac{q}{p}}} \|f\|_q^q = \|f\|_q,$$

car $q - \frac{q}{p} = 1$.

On en déduit que

$$\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \sup\{\frac{|\varphi_f(h)|}{\|h\|_p}, h \in L^p_K \setminus \{0\}\} \ge \frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_p} = \|f\|_q,$$

ce qui donne (6.27).

Cas 2 : $p = \infty$**.** On a, dans ce cas, $q = 1$. On prend, comme pour le premier cas, $g = \text{sign}(f)$. On a ici $g \in L^\infty_\mathbb{R}$ et $\|g\|_\infty = 1$ (car $m(E) \neq 0$, sinon $L^1_\mathbb{R} = \{0\}$ et il n'y a pas de $f \in L^1_\mathbb{R}$, $f \neq 0$). Pour ce choix de g, on a $\varphi_f(g) = \|f\|_1$, donc $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_\infty} = \|f\|_1$ et, comme dans le premier cas, ceci donne (6.27).

Cas 3 : $p = 1$**.** On a, dans ce cas, $q = \infty$. Ce cas est un peu plus délicat que les précédents. On ne peut pas toujours trouver $g \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g)|}{\|g\|_1} = \|f\|_\infty$. En utilisant le caractère σ-fini de m, on va, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $g_n \in L^1_K \setminus \{0\}$ t.q. $\frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g\|_1} \geq \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$, ce qui permet aussi de montrer (6.27).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}$ et $A_n = \{|f| \geq \alpha_n\}$. On a $m(A_n) > 0$ (car $m(A_n) = 0$ donnerait $\|f\|_\infty \leq \alpha_n$).

Si $m(A_n) < \infty$, on peut prendre $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ qui est mesurable (car $\text{sign}(f)$ et 1_{A_n} sont mesurables) et intégrable car $m(A_n) < \infty$. On a alors $g_n \in L^1_\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n)$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27).

Si $m(A_n) = \infty$, le choix de $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n}$ ne convient pas car $\text{sign}(f)1_{A_n} \notin L^1_\mathbb{R}$. On utilise alors le fait que m est σ-finie. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_p) < \infty$, $E_p \subset E_{p+1}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, et $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} E_p$. Par continuité croissante de m, on a donc $m(A_n \cap E_p) \uparrow m(A_n)$ quand $p \to \infty$. Comme $m(A_n) > 0$ il existe donc $p \in \mathbb{N}$ (dépendant de n, on ne note pas cette dépendance) t.q. $m(A_n \cap E_p) > 0$. On prend alors $g_n = \text{sign}(f)1_{A_n \cap E_p}$. On a bien alors $g_n \in L^1_\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\|g_n\|_1 = m(A_n \cap E_p) \leq m(E_p) < \infty$ et $\varphi_f(g_n) = \int_{A_n \cap E_p} |f| dm \geq \alpha_n m(A_n \cap E_p)$. Donc :

$$\|\varphi_f\|_{(L^1_K)'} \geq \frac{|\varphi_f(g_n)|}{\|g_n\|_1} \geq \alpha_n = \|f\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit (6.27), ce qui conclut la preuve de la proposition. ■

Sous les hypoyhèses de la proposition 6.69, l'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25), est une application de L^q_K dans $(L^p_K)'$, linéaire dans le cas $K = \mathbb{R}$ et antilinéaire dans le cas $K = \mathbb{C}$. De plus, c'est une isométrie, c'est-à-dire que $\|\varphi_f\|_{(L^p_K)'} = \|f\|_q$ pour tout $f \in L^q_K$ (cette application φ peut ne pas être une isométrie et ne pas être injective si $p = 1$ et que m n'est pas σ-finie, voir l'exercice 6.53). Comme cela a déjà été dit, l'application φ est donc nécessairement injective car $\varphi_f = \varphi_h$ implique $\varphi_{f-h} = 0$ et donc $\|f - h\|_q = \|\varphi_{f-h}\|_{(L^p_K)'} = 0$, ce qui donne $f = h$ p.p.. Mais l'application φ n'est pas forcément surjective. On sait qu'elle est surjective si $p = 2$ (c'est l'objet de la section précédente). Le théorème suivant montre qu'elle

est surjective si m est σ-finie et $p \in [1, +\infty[$ (de sorte qu'on identifie souvent, dans ce cas, $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$ à $\mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$).

Théorème 6.70 (Dualité $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$**)** *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré σ-fini,* $1 \leq p < +\infty$*,* $q = \frac{p}{p-1}$ *et* $\mathrm{T} \in (\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$*. Alors, il existe un unique* $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$ *t.q.*

$$\mathrm{T}(g) = \begin{cases} \int g f \, dm & si\ \mathrm{K} = \mathbb{R}, \\ \int g \overline{f} \, dm & si\ \mathrm{K} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

c'est-à-dire telle que $\mathrm{T} = \varphi_f$ *avec* φ *donné par (6.25) (on a donc montré la surjectivité de l'application* $\varphi : \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}} \to (\mathrm{L}^p_{\mathrm{K}})'$ *définie par* $\varphi(f) = \varphi_f$ *pour* $f \in \mathrm{L}^q_{\mathrm{K}}$*).*

Remarque 6.71 (Dual de L^∞**)** Noter que le théorème précédent est, en général, faux pour $p = +\infty$. L'application $\varphi : f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25) est donc une isométrie (linéaire ou antilinéaire, selon que $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{K}}$ dans $(\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{K}})'$ mais l'image de φ est, sauf cas très particuliers, différente de $(\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{K}})'$. L'application φ ne permet donc pas d'identifier le dual de $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{K}}$ à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{K}}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME *6.70* La démonstration de ce théorème est faite dans l'exercice 6.52. Elle consiste essentiellement à se ramener directement à appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) dans un espace L^2 approprié.
Une autre démonstration, probablement plus classique, consiste à appliquer le théorème de Radon-Nikodym, qui lui-même se démontre en se ramenant au théorème de représentation de Riesz. Cette démonstration est donnée, dans le cas particulier $p = 1$, dans l'exercice 6.50. Nous verrons le théorème de Radon-Nikodym dans la section suivante, voir les théorèmes 6.78 et 6.79.
Enfin, on propose dans l'exercice 6.51 une autre démonstration de ce théorème dans le cas $p < 2$ (utilisant toujours le théorème de représentation de Riesz). ■

Une conséquence intéressante du théorème de dualité (théorème 6.70) est le caractère réflexif des espaces L^p pour $1 < p < +\infty$ (et un espace mesuré σ-fini), ce que l'on détaille maintenant.

Soit F un espace de Banach réel (mais il est possible de traiter aussi les Banach complexes). On note F′ le dual (topologique) de F et F″ le dual (topologique) de F′. On dit aussi que F″ est le bidual de F. Pour $u \in \mathrm{F}$, on définit $\mathrm{J}_u : \mathrm{F}' \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{J}_u(\mathrm{T}) = \mathrm{T}(u) \text{ pour tout } \mathrm{T} \in \mathrm{F}'. \tag{6.28}$$

Il est facile de voir que $\mathrm{J}_u \in \mathrm{F}''$ et $\|\mathrm{J}_u\|_{\mathrm{F}''} \leq \|u\|_{\mathrm{F}}$. On peut en fait montrer que $\|\mathrm{J}_u\|_{\mathrm{F}''} = \|u\|_{\mathrm{F}}$ (c'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach, non démontré

ici). Comme l'application $J : u \mapsto J_u$ est linéaire, c'est donc une isométrie linéaire de F dans F″. Il est alors immédiat que J est injective. Par contre, J n'est pas toujours surjective. L'application J est souvent appelée injection canonique de F dans F″, ce qui sous-entend une identification de F comme sous–espace de F″. En fait, l'injection canonique d'un ensemble A contenu dans un ensemble B est l'application qui a tout élément de A associe lui–même : c'est la restriction de l'identité à A, qui permet de voir l'inclusion en terme d'application.

Définition 6.72 (Espace réflexif) *Soit* F *un espace de Banach,* F′ *son dual (topologique) et* F″ *son bidual (c'est-à-dire le dual topologique de* F′*). Pour* $u \in F$*, on définit* $J_u \in F''$ *par (6.28). On dit que l'espace* F *est réflexif si l'application* $J : u \mapsto J_u$ *(de* F *dans* F″*) est surjective (l'application* J *est toujours injective).*

Un espace de Hilbert H est toujours réflexif car l'application J est alors simplement la composée des deux bijections de H dans H′ et de H′ dans H″ données par le théorème de représentation de Riesz (Théorème 6.56), ce qui montre que J est surjective. L'espace $L^2_R(E, T, m)$ est donc réflexif. Plus généralement, une conséquence directe du théorème 6.70 est que les espaces L^p, sont réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$ et une mesure σ-finie.

Proposition 6.73 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré σ-fini et* $1 < p < +\infty$*. Alors, l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est réflexif.*

DÉMONSTRATION – On pose $q = \frac{p}{p-1}$, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On note Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25), et on note Ψ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Psi(f) = \varphi_f$.

Comme $p \neq +\infty$ et $q \neq +\infty$, le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$ et Ψ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. On rappelle aussi que Φ et Ψ sont des isométries linéaires.

Soit $s \in (L^p)''$. Pour montrer que L^p est réflexif, il suffit de montrer qu'il existe $u \in L^p$ t.q. $J_u = s$ (où J_u est défini par 6.28), c'est-à-dire t.q. $s(T) = T(u)$ pour tout $T \in (L^p)'$.

On va montrer que $u = \Phi^{-1}(s \circ \Psi)$ convient. En effet, soit $T \in (L^p)'$. On a :

$$T(u) = \int u\Psi^{-1}(T)dm,$$

et :

$$s(T) = (s \circ \Psi)(\Psi^{-1}(T)) = \Phi(u)(\Psi^{-1}(T)) = \int u\Psi^{-1}(T)dm = T(u).$$

On a donc bien montré que l'application $J : u \mapsto J_u$ (de L^p dans $(L^p)''$) est surjective, c'est-à-dire que L^p est réflexif.

On peut aussi noter que la démonstration de cette proposition donne en fait que $J_u = \Phi(u) \circ \Psi^{-1}$ pour tout $u \in L^p$. ■

Dans la proposition 6.73, l'hypothèse "m σ-finie" est inutile (mais nous l'avons utilisée dans la preuve). Un autre moyen de montrer que l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ (ce moyen ne demande pas le caractère σ-fini de la mesure m) est de remarquer que l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est uniformément convexe [1] si $1 < p < +\infty$ et d'utiliser le fait (non démontré dans ce livre) qu'un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

6.3.3 Théorème de Radon-Nikodym

La définition 4.21 donnait la définition d'une mesure de densité. On reprend ici cette définition et on donne aussi la définition de mesure signée de densité.

Définition 6.74 (Mesure de densité) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soit* μ *une mesure sur* T. *On dit que* μ *est une mesure de densité par rapport à* m *si il existe* $f \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $\mu(A) = \int_A f dm$, *pour tout* $A \in T$. *On pose alors* $\mu = fm$ *(on dit aussi que* f *est la densité de* μ *par rapport à* m*).*
2. *Soit* μ *une mesure signée sur* T. *On dit que* μ *est une mesure signée de densité par rapport à* m *si il existe* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $\mu(A) = \int_A f dm$, *pour tout* $A \in T$. *On pose alors* $\mu = fm$ *(on dit aussi que* f *est la densité de* μ *par rapport à* m*).*

Remarque 6.75 (Sur les mesures de densité) Soient (E, T, m) un espace mesuré et μ une mesure sur T.

1. (Unicité de la densité) Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. On suppose que $\mu = fm$ et $\mu = gm$. On a alors $f = g$ m-p.p.. En effet, on doit avoir $\int_A f dm = \int_A g dm$ pour tout $A \in T$. En choisissant $A = \{f > g\}$ puis $A = \{f < g\}$, on en déduit que $\int_{\{f>g\}}(f - g) dm + \int_{\{f<g\}}(g - f) dm = 0$, ce qui donne $\int |f - g| dm = 0$ et donc $f = g$ m-p.p..
2. (Espace $\mathcal{L}^1$ pour une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $g \in \mathcal{M}$, l'exercice (corrigé) 4.26 donne alors les assertions suivantes :
   (a) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$,
   (b) $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, \mu) \Rightarrow \int g d\mu = \int fg dm$.
3. (Absolue continuité d'une mesure de densité) Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $\mu = fm$. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$. On a alors $f 1_A = 0$ m-p.p. et donc $\mu(A) = \int f 1_A dm = 0$. Selon la définition 6.76 ci-après, ceci montre que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure m. L'objectif du théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78) sera de démontrer la réciproque de ce résultat (si μ est finie et m est σ-finie).

1. un espace de Banach est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|f\| \leq 1$, $\|g\| \leq 1$ et $\|f - g\| \geq \varepsilon$ implique $\|(f + g)/2\| \leq 1 - \delta$.

Rappelons la définition d'une mesure absolument continue :

Définition 6.76 (Mesure absolument continue) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* μ *une mesure (positive ou signée) sur* T. *On dit que* μ *est absolument continue par rapport à* m*, et on note* $\mu << m$*, si :*

$$A \in T, m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Remarque 6.77 *On donne ici un exemple de mesure non absolument continue : on prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $\mu = \delta_0$ *(mesure de Dirac en* 0 *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*). Comme* $\lambda(\{0\}) = 0$ *et* $\delta_0(\{0\}) = 1$*, la mesure* δ_0 *n'est pas absolument continue par rapport à* λ.

On donne maintenant le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures (positives).

Théorème 6.78 (Radon-Nikodym) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré* σ*-fini et* μ *une mesure finie sur* T. *Alors,* μ *est absolument continue par rapport à* m *si et seulement si* μ *est une mesure de densité par rapport à* m*.*

DÉMONSTRATION – **Sens ($\Leftarrow$).** Ce sens a été montré dans le troisième item de la remarque 6.75 (et les hypothèses "μ finie" et "m σ-finie" sont inutiles. (Noter aussi que le premier item de cette même remarque donne l'unicité m-p.p. de la densité de μ par rapport à m.)

Sens ($\Rightarrow$). Pour toute mesure ν sur T et pour tout $1 \le p \le +\infty$, on note $\mathcal{L}^p(\nu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$ et $L^p(\nu) = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, \nu)$.

Pour démontrer que μ est une mesure de densité par rapport à m, on va appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\mu + m)$.

On rappelle d'abord que l'exercice (corrigé) 4.2 donne que $\mu + m$ est une mesure sur T (définie par $(\mu + m)(A) = \mu(A) + m(A)$ pour tout $A \in T$) et que les deux propriétés suivantes sont vérifiées (questions 1 et 2 de l'exercice 4.2) :

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(m),$$
$$g \in \mathcal{L}^1(\mu + m) \Rightarrow \int g d(\mu + m) = \int g d\mu + \int g dm. \qquad (6.29)$$

Il est aussi clair que $\int f d(\mu + m) = \int f d\mu + \int f dm$ pour tout $f \in \mathcal{M}_+$ (voir l'exercice 4.2). Pour $g \in \mathcal{M}$, on a donc $\int g^2 d(\mu+m) = \int g^2 d\mu + \int g^2 dm$, ce qui donne $\mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap \mathcal{L}^2(m)$.

Enfin, pour $A \in T$, on a $(\mu + m)(A) = 0$ si et seulement si $\mu(A) = m(A) = 0$. On a donc, pour $f, g : E \to \mathbb{R}$:

$$f = g \ (\mu + m)\text{-p.p.} \Leftrightarrow \begin{cases} f = g \ \mu\text{-p.p.}, \\ f = g \ m\text{-p.p.}. \end{cases}$$

On décompose maintenant la démonstration en trois étapes.

Etape 1. Utilisation du théorème de Riesz.

On pose $H = L^2(\mu+m)$ (H est donc un espace de Hilbert). On veut définir $T : H \to \mathbb{R}$ par :

$$T(g) = \int g d\mu \text{ pour tout } g \in H. \tag{6.30}$$

On montre tout d'abord que cette définition est correcte. Soit $g \in H = L^2(\mu+m)$. On choisit un représentant de g, encore noté g, de sorte que $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m) = \mathcal{L}^2(\mu) \cap L^2(m)$. Comme μ est finie, on a $\mathcal{L}^2(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$. Donc $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int g d\mu$ existe et appartient à $\mathbb{R}$. Puis, on remarque que $\int g d\mu$ ne dépend pas du représentant choisi car $g_1 = g_2$ $(\mu+m)$-p.p. implique $g_1 = g_2$ μ-p.p.. L'application T est donc bien définie de H dans $\mathbb{R}$ par (6.30).

On montre maintenant que $T \in H'$. Il est immédiat que T est linéaire. On remarque ensuite que, pour tout $g \in H$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec g et 1_E, $|T(g)| = |\int g d\mu| \le \|g\|_{L^2(\mu)}\sqrt{\mu(E)} \le \|g\|_{L^2(\mu+m)}\sqrt{\mu(E))} = \|g\|_H\sqrt{\mu(E)}$. On a donc $T \in H'$ (et $\|T\|_{H'} \le \sqrt{\mu(E)}$).

On peut maintenant appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56). Il donne qu'il existe $\varphi \in H = L^2(\mu+m)$ t.q. $T(g) = \int g\varphi d(\mu+m)$ pour tout $g \in L^2(\mu+m)$. On choisit un représentant de φ, encore noté φ. On a alors $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ et

$$\int g d\mu = \int g\varphi d(\mu+m) \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu+m). \tag{6.31}$$

Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$, on a $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu+m)$ et donc $\int g\varphi d(\mu+m) = \int g\varphi d\mu + \int g\varphi dm$ (d'après (6.29)). On déduit donc de (6.31) :

$$\int g(1-\varphi) d\mu = \int g\varphi dm, \text{ pour tout } g \in \mathcal{L}^2(\mu+m). \tag{6.32}$$

Etape 2. On cherche dans cette étape des bornes sur φ.

On montre tout d'abord que $\varphi \ge 0$ m-p.p. et μ-p.p. (ce qui est équivalent a dire que $\varphi \ge 0$ $(\mu+m)$-p.p.).

Comme m est σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{\varphi < 0\} \cap A_n \in T$. Dans (6.32), on prend $g = 1_{B_n}$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu+m)$ car $(\mu+m)(B_n) \le \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1-\varphi)1_{B_n} d\mu = \int \varphi 1_{B_n} dm.$$

Comme $(1-\varphi) > 0$ et $\varphi < 0$ sur B_n, on en déduit que $(1-\varphi)1_{B_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{B_n} = 0$ m-p.p. et donc $\mu(B_n) = m(B_n) = 0$.

Par σ-additivité d'une mesure, comme $\{\varphi < 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, on en déduit $(\mu+m)(\{\varphi < 0\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu+m)(B_n) = 0$ et donc $\varphi \ge 0$ $(\mu+m)$-p.p..

On montre maintenant que $\varphi < 1$ $(\mu+m)$-p.p..

On prend dans (6.32) $g = 1_{C_n}$, avec $C_n = \{\varphi \geq 1\} \cap A_n$ (on a bien $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ car $(\mu + m)(C_n) \leq \mu(E) + m(A_n) < \infty$). On obtient

$$\int (1-\varphi)1_{C_n} d\mu = \int \varphi 1_{C_n} dm.$$

Comme $(1-\varphi) \leq 0$ et $\varphi > 0$ sur C_n, on en déduit que $(1-\varphi)1_{C_n} = 0$ μ-p.p. et $\varphi 1_{C_n} = 0$ m-p.p. et donc $m(C_n) = 0$. Mais on ne peut en déduire $\mu(C_n) = 0$ (car on a seulement $(1-\varphi) \leq 0$ sur C_n et non $(1-\varphi) < 0$). C'est ici (et seulement ici) qu'on utilise l'hypothèse d'absolue continuité de μ par rapport à m. Comme $m(C_n) = 0$, l'hypothèse $\mu << m$ donne $\mu(C_n) = 0$. Comme $\{\varphi \geq 1\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on en déduit $(\mu + m)(\{\varphi \geq 1\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu + m)(C_n) = 0$ et donc $\varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p..

On a donc montré que $0 \leq \varphi < 1$ $(\mu + m)$-p.p.. En changeant φ sur un ensemble de mesure $(\mu + m)$ nulle, on peut donc supposer $0 \leq \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$. On a toujours $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$ et (6.32) reste vraie.

Etape 3. On montre maintenant que $\mu = f m$ avec $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$.

On montre tout d'abord que (6.32) est vraie pour tout $g \in \mathcal{M}_+$:

— On remarque d'abord que (6.32) est vraie si $g = 1_A$ avec $A \in T$ t.q. $m(A) < \infty$ car, dans ce cas, $g \in \mathcal{L}^2(\mu + m)$.

— On suppose maintenant que $A \in T$. Comme m est σ-finie, il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ t.q. $m(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On prend $g_n = 1_{B_n}$ avec $B_n = A \cap E_n$, de sorte que $g_n \uparrow 1_A$ et donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)1_A$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi 1_A$. Comme (6.32) est vraie pour $g = g_n$ (car $m(B_n) < \infty$), le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué aux mesures μ et m donne (6.32) pour $g = 1_A$.

— Si $g \in \mathcal{E}_+$, il est alors facile de montrer que (6.32) est vraie. C'est une conséquence immédiate de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$.

— On prend enfin $g \in \mathcal{M}_+$. Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $g_n \uparrow g$. On a donc $(1-\varphi)g_n \uparrow (1-\varphi)g$ et $\varphi g_n \uparrow \varphi g$. On écrit (6.32) pour g_n au lieu de g. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) appliqué aux mesures μ et m donne (6.32) pour g.

On a donc maintenant φ mesurable, $0 \leq \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$ et (6.32) pour tout $g \in \mathcal{M}_+$.

Soit $h \in \mathcal{M}_+$. On pose $g = \frac{h}{1-\varphi}$. On a $g \in \mathcal{M}_+$ (car $0 \leq \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in E$). (6.32) donne alors

$$\int h d\mu = \int h \frac{\varphi}{1-\varphi} dm. \tag{6.33}$$

En posant $f = \frac{\varphi}{1-\varphi}$, on a $f \in \mathcal{M}_+$ et (6.33) avec $h = 1_A$ donne $\mu(A) = \int f 1_A dm$ pour tout $A \in T$, c'est-à-dire $\mu = f m$. ■

Théorème 6.79 (Radon-Nikodym, mesures signées) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré et soit* μ *une mesure signée sur* T*, alors :*

$$\mu << m \Longleftrightarrow \exists f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \ \ \mu = fm.$$

La démonstration n'est pas détaillée ici, elle consiste essentiellement à se ramener au théorème 6.78 en décomposant μ sous la forme $\mu = \mu_+ - \mu_-$ comme cela est fait dans la proposition 2.33.

6.4 Convergence faible, faible-*, étroite, en loi

6.4.1 Convergence faible et faible-*

On limite ce paragraphe au cas des espaces de Banach réels. L'extension au cas des Banach complexes ne pose pas de difficulté importante.

On rappelle que si F est un espace de Banach (réel) on note F' son dual topologique (F est donc l'ensemble des applications linéaires continues de F dans $\mathbb{R}$). Si $\|\cdot\|_F$ est la norme dans F, l'ensemble F' est aussi un espace de Banach avec la norme définie par

$$\|T\|_{F'} = \sup\left\{\frac{T(u)}{\|u\|_F}, u \in F \setminus \{0\}\right\}.$$

Définition 6.80 (Convergence faible dans un espace de Banach) *Soit* F *un espace de Banach (réel) et* F' *son dual topologique. On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers u (dans* F*, quand* $n \to +\infty$*) si pour tout élément* T *de* F'*, on a :*

$$T(u_n) \to T(u) \text{ (dans } \mathbb{R}) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par le théorème 6.70, on a donc la proposition suivante sur la convergence faible dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $1 \le p < +\infty$:

Proposition 6.81 (Convergence faible dans L^p**)** *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $p \in [1, +\infty[$ *et q le conjugué de p,* $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ *et* $f \in L^p$*. Alors, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* f *si et seulement si on a,*

$$\forall g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m), \ \int f_n g dm \to \int f g dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

.

DÉMONSTRATION – On note Φ l'application de L^q dans $(L^p)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25), la démonstration de cette proposition est alors immédiate quand on remarque que le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^q dans $(L^p)'$. ■

Définition 6.82 (Convergence faible $*$ dans le dual d'un espace de Banach) *Soit* F *un espace de Banach (réel) et* F′ *son dual topologique ; soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ *et* $T \in F'$. *On dit que la suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T $*$*-faiblement dans* F′ *si pour tout élément* u *de* F *on a :* $T_n(u) \to T(u)$ *(dans* $\mathbb{R}$*) quand* $n \to +\infty$.

Remarque 6.83 (Suite bornée et convergence faible) La proposition 8.19 du chapitre 8 montre que d'une suite bornée du dual d'un espace de Banach séparable on peut extraire une sous-suite $*$-faiblement convergente. De cette proposition 8.19, on peut alors déduire que de toute suite bornée d'un espace de Hilbert, ou d'un espace de Banach réflexif, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente. Réciproquement, une conséquence du thèorème de Banach-Steinhaus (voir le livre de Brezis [**brezis**] pour ce théorème) donne qu'une suite faiblement convergente d'un espace de Hilbert, ou d'un espace de Banach réflexif, est nécessairement bornée.

Remarque 6.84 (Convergence forte, faible et faible $*$) Soit F un espace de Banach (réel).

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Les implications suivantes sont alors immédiates :

$$T_n \to T \Rightarrow T_n \to T \text{ faiblement } \Rightarrow T_n \to T \text{ } *\text{-faiblement.}$$

   La deuxième implication est une conséquence de l'injection de F dans F″ (construite avec (6.28)).

2. Pour $u \in F$, on définit $J_u \in F''$ avec (6.28). Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ et $u \in F$. On a alors :

$$u_n \to u \text{ faiblement dans F} \Leftrightarrow J_{u_n} \to J_u \text{ } *\text{-faiblement dans F}''.$$

   Mais, si F n'est pas réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$, de F dans F″, n'est pas surjective et on peut avoir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non faiblement convergente dans F alors que la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $*$-faiblement convergente dans F″. Dans ce cas, la limite $*$-faible (dans F″) de $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de F″ qui n'appartient pas à l'image de J.

Dans le cas où F est un espace de Banach réflexif, l'application $J : u \mapsto J_u$ est surjective de F dans F″ et on a alors :

1. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F'$ et $T \in F'$. Alors :

$$T_n \to T \text{ faiblement dans F}' \Leftrightarrow T_n \to T \text{ } *\text{-faiblement dans F}'.$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ F. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans F si et seulement si la suite $(J_{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est ∗-faiblement convergente dans F″.

Remarque 6.85 (Lemme de Mazur) Soit E un espace de Banach réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $u \in$ E. Il est clair que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E vers u implique la convergence faible de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u dans E. La réciproque est vraie si E est de dimension finie. La réciproque est en générale fausse si E est de dimension infinie. Elle est vraie dans quelques cas, comme, par exemple, si E est l'ensemble des séries (indexées par $\mathbb{N}$) absolument convergentes, l'espace E étant alors muni de sa norme naturelle (voir l'exercice 6.60). Il est par contre parfois intéressant de savoir que si $u_n \to u$ faiblement dans E, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

1. $v_n \to u$ dans E,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est une combinaison convexe de l'ensemble des u_p, $p \geq n$, c'est-à-dire qu'il existe $N_n \in \mathbb{N}$ et $t_{n,i} \in [0,1]$ pour $i = 0, \ldots N_n$ t.q.

$$v_n = \sum_{i=0}^{N_n} t_{n,i} u_{n+i}, \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{N_n} t_{n,i} = 1.$$

Soit $1 < p \leq \infty$, donc $1 \leq q = \frac{p}{p-1} < \infty$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $L^q = L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et Φ l'application de L^p dans $(L^q)'$ définie par $\Phi(f) = \varphi_f$, où φ_f est donnée par (6.25). Le théorème 6.70 donne que Φ est une bijection de L^p dans $(L^q)'$. On confond (ou on identifie) fréquemment $u \in L^p$ avec $\Phi(u) \in (L^q)'$. On a alors une notion de convergence faible-∗ dans L^p. Si $1 < p < \infty$ (on a alors aussi $1 < q < \infty$), les notions de convergente faible et faible-∗ dans L^p sont équivalentes. Dans le cas de L^∞, que l'on identifie fréquemment avec le dual (topologique) de L^1, les notions de convergente faible et faible-∗ sont différentes. La convergence faible est plus forte que la convergence faible-∗. On donne ci-dessous la définition de convergence faible-∗ quand on considère L^∞ comme le dual de L^1.

Définition 6.86 (Convergence faible ∗ dans L^∞) *Soient* (E,T,m) *un espace mesuré et* $L^\infty = L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ *et* $f \in L^\infty$. *On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ∗-faiblement vers* f *dans* L^∞ *si pour tout élément* g *de* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, *on a :* $\int f_n g dm \to \int f g dm$.

Si l'espace de Banach E est de dimension infinie, la convergence faible n'entraîne pas la convergence forte. Mais, dans les espaces L^p, $1 < p < +\infty$, la convergence faible de f_n vers f et la convergence de la norme de f_n vers la norme de f implique la convergence forte de f_n vers f. Ce résultat (donné dans le théorème 6.87) est essentiellement lié à la stricte convexité de l'application $s \mapsto |s|^p$ (qui est fausse pour $p = 1$).

Proposition 6.87 (Convergence faible et convergence des normes) *Soit* (X, T, m) *un espace mesuré et* $1 < p < +\infty$. *On note* L^p *l'espace* $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$ *et* $\|\cdot\|_p$ *la norme dans l'espace* L^p. *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite déléments de* L^p *et* f *un élément de* L^p. *On suppose que* f_n *converge faiblement vers* f *dans* L^p, *quand* $n \to +\infty$, *et que* $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ *quand* $n \to +\infty$. *Alors* $f_n \to f$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition est dans l'exercice 6.20. Dans cet exercice le cas $p = 1$ est également considéré. ■

On rappelle aussi que, dans l'espace L^p, si $1 \le p < +\infty$ la convergence p.p. et la convergence des normes implique la convergence dans L^p, ceci est démontré dans l'exercice 6.18 (et ce résultat est d'ailleurs utilisé dans l'exercice 6.20).

6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi

Si m est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, on note L_m l'application de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L_m(\varphi) = \int \varphi dm$ (cette application caractérise m, d'après la proposition 5.8). On a vu au chapitre 5 que $L_m \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})'$. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 1)$ et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La convergence faible-$*$ dans $(C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})'$ de L_{m_n} vers L_m, quand $n \to +\infty$, signifie donc que $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi dm_n = \int \varphi dm$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Ceci s'appelle la convergence étroite de m_n vers m.

Définition 6.88 (Convergence étroite et vague) *Soit* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de mesures finies sur les boréliens de* $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 1)$ *et* m *une mesure finie sur les boréliens de* $\mathbb{R}^d$.

1. *On dit que* $m_n \to m$ *étroitement, quand* $n \to +\infty$, *si :*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})).$$

2. *On dit que* $m_n \to m$ *vaguement, quand* $n \to +\infty$, *si :*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})).$$

La proposition suivante montre que la convergence vague de m_n vers m et la convergence des masses totales (c'est-à-dire la convergence de $m_n(\mathbb{R})$ vers $m(\mathbb{R})$) donnent la convergence étroite. Si m et les mesures m_n sont des probabilités, la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to +\infty$) est donc équivalente à la convergence vague.

Proposition 6.89 *Soit* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de mesures finies sur les boréliens de* $\mathbb{R}^d$ *(*$d \geq 1$*) et* m *une mesure finie sur les boréliens de* $\mathbb{R}^d$*. On suppose que* $m_n \to m$ *vaguement et que* $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$ *(quand* $n \to +\infty$*). On a alors* $m_n \to m$ *étroitement. (La réciproque de cette proposition est immédiate.)*

La démonstration de cette proposition est contenue dans l'exercice 5.14.

Remarque 6.90 Dans la proposition 6.89, l'hypothèse de convergence des masses totales est cruciale. Sans cette hypothèse, la convergence vague n'implique pas la convergence étroite. Un exemple simple est possible en prenant $d = 1$, $m = 0$ et $m_n = \delta_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La convergence en loi d'une suite de v.a.r. est définie par la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent pour des probabilités) des lois des v.a.r..

Définition 6.91 (Convergence en loi) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r.. On dit que* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si :*

$$\int \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P} \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

(Ceci est équivalent à dire que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n} \to \mathrm{P}_{\mathrm{X}}$ *étroitement.)*

Noter qu'il est possible de définir la convergence en loi pour une suite de v.a.r. définies sur des espaces probabilisés différents (c'est-à-dire que X_n *est définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathrm{P}_n)$ *dépendant de n, et* X *est définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*). Nous utiliserons parfois implicitement cette définition plus générale.*

Comme cela a déjà été dit ci-dessus, la proposition 6.89 donne une caractérisation intéressante de la convergence en loi en utilisant la convergence vague.

Proposition 6.92 (Caractérisation de la convergence en loi) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r.. La suite* X_n *tend vers* X *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si et seulement si :*

$$\int \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P} \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{6.34}$$

DÉMONSTRATION – La condition (6.34) est évidemment nécessaire car $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. D'après la proposition 6.89, la condition (6.34) est aussi suffisante. On redonne ici la démonstration du fait que (6.34) est suffisant pour avoir la convergence en loi de X_n vers X. On note $m_n = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ et $m = \mathrm{P}_{\mathrm{X}}$.

Etape 1. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(s) = 0 \text{ si } s \leq -p-1, \\ \varphi_p(s) = s+p+1 \text{ si } -p-1 < s < -p, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } -p \leq s \leq p, \\ \varphi_p(s) = -s+p+1 \text{ si } p < s < p+1, \\ \varphi_p(s) = 0 \text{ si } p+1 < s. \end{cases}$$

Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ simplement, quand $p \to \infty$, et que $0 \leq (1-\varphi_p) \leq 1$, le théorème de convergence dominée donne $\lim_{p\to\infty} \int (1-\varphi_p)dm = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q.

$$0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm \leq \varepsilon.$$

On remarque maintenant que, comme $\varphi_{p_0} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que m_n et m sont des probabilités, on a, quand $n \to +\infty$,

$$0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm_n = 1 - \int \varphi_{p_0} dm_n \to 1 - \int \varphi_{p_0} dm = \int (1-\varphi_{p_0})dm \leq \varepsilon.$$

Il existe n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \int (1-\varphi_{p_0})dm_n \leq 2\varepsilon. \tag{6.35}$$

Etape 2. Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p)dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.36}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi(s)|$ on a

$$|\int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int_\varphi (1-\varphi_p)dm| \leq \|\varphi\|_u \left(\int (1-\varphi_p)dm_n + \int (1-\varphi_p)dm\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'étape 1, il existe donc $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_1 \Rightarrow |\int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm_n - \int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm| \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_2 \Rightarrow |\int \varphi\varphi_{p_1} dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1} dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.36) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \geq \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m et donc la convergence en loi de X_n vers X. ■

Une autre caractérisation intéressante de la convergence en loi est donnée dans le théorème 10.22. Elle donne l'équivalence entre la convergence en loi et la convergence

simple des fonctions caractéristiques. La fonction caractéristique d'une v.a.r. est construite avec la transformation de Fourier (qui sera étudiée au chapitre 10).

Remarque 6.93 Un intérêt de la proposition 6.92 (ou du théorème 10.22) est qu'un élément de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou une fonction de la forme $s \mapsto e^{ist}$) est nécessairement uniformément continue (alors qu'une fonction appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas toujours uniformément continue). Cela permet, par exemple, de démontrer facilement que la convergence en probabilité implique la convergence en loi (voir l'exercice 6.71).

Une propriété parfois intéressante d'une suite de mesures convergeant étroitement est la tension de cette suite, notion qu'on définit maintenant.

Définition 6.94 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). On dit que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue si*

$$\lim_{a\to\infty} m_n(B_a^c) = 0, \text{ uniformément par rapport à } n,$$

avec $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$. (On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.)

Dans la proposition précédente, la propriété importante est le caractère uniforme (par rapport à n) de la convergence vers 0 de $m_n(B_a^c)$. En effet, pour tout n fixé, la continuité décroissante de la mesure m_n donne que $\lim_{a\to+\infty} m_n(B_a^c) = 0$. On montre maintenant que la convergence étroite d'une suite implique sa tension.

Proposition 6.95 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement. Alors la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.*

En particulier, soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi. La suite $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors tendue, c'est-à-dire

$$\lim_{a\to+\infty} P(\{|X_n| > a\}) = 0 \text{ uniformément par rapport à } n.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition est ici aussi essentiellement contenue dans l'exercice 5.14. En effet, soit $\varepsilon > 0$, la question 3 de l'exercice 5.14 montre qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et $\int_{\mathbb{R}^d} (1-\varphi)dm_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur B_a^c (c'est-à-dire que le support de φ est inclus dans $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$), on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(B_a^c) \leq \varepsilon$. Ce qui montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. ■

On peut maintenant donner une nouvelle caractérisation de la convergence étroite (et donc de la convergence en loi).

Proposition 6.96 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On a alors l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$,

2. $m_n \to m$ vaguement quand $n \to +\infty$ et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

DÉMONSTRATION – Le fait que la propriété 1 implique la propriété 2 a été vu dans la proposition 6.95. On montre maintenant la réciproque. Pour cela, on reprend la démonstration de la proposition 6.92.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(x) = 0 \text{ si } |x| \geq p+1, \\ \varphi_p(x) = p+1-|x| \text{ si } p < |x| < p+1, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } |x| \leq p. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p)dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.37}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s\in\mathbb{R}^d} |\varphi(s)|$ on a

$$|\int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p)dm| \leq \|\varphi\|_u \Big(\int (1-\varphi_p)dm_n + \int (1-\varphi_p)dm\Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $B_p = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq p\}$. Comme $0 \leq \int (1-\varphi_p)dm_n \leq m_n(B_p^c)$ et $0 \leq \int (1-\varphi_p)dm \leq m(B_p^c)$, l'hypothèse de tension sur la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et la continuité décroissante pour m) donne l'existence de p_1 t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1})dm_n \leq \varepsilon \text{ et } \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1})dm \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la convergence vague donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \varphi\varphi_{p_1} dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1} dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.37) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m. ■

Remarque 6.97 Voici une conséquence intéressante de la proposition 6.96 et de la proposition 8.19 du chapitre 8 (que l'on peut utiliser avec $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ qui est un espace

de Banach séparable, ce qui n'est pas le cas de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$). Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. Il existe alors une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe une probabilité m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$. Cette remarque sera détaillée dans la proposition 8.22.

On donne maintenant un lien entre convergence en loi et convergence des fonctions de répartition. En particulier, la convergence en loi donne la convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de la fonction de répartition de la v.a.r. limite.

Proposition 6.98 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r..*

1. *On suppose que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$ *(c'est-à-dire que la fonction de répartition de* X *est continue au point* a*). On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = \lim_{n\to+\infty} P(\{X_n > a\}).$$

(La même propriété est vraie en remplaçant > par <.)

2. *On suppose que* $\lim_{n\to+\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\})$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$. *On a alors* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Cette proposition se démontre en adaptant légèrement les corrigés des exercices 6.67 et 6.68. (en particulier, le premier item de la proposition 6.98 se démontre avec la première partie du corrigé de l'exercice 6.67). ■

Nous terminons ce paragraphe en comparant différentes notions de notions de convergence. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. Nous avons déjà vu que la convergence p.s. (de X_n vers X) entraîne la convergence en probabilité (exercice 3.29). L'exercice 6.71 nous montre que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi. Mais, la réciproque de ces implications est fausse. Toutefois, on peut montrer que quitte à changer d'espace probabilisé et à remplaçer X_n et X par les v.a.r. de même loi, la réciproque devient vraie. Ceci est donné dans le théorème 6.99.

Théorème 6.99 (Théorème de représentation de Skorokhod) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r. (ce sont donc des v.a.r. sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*). On suppose que* $X_n \to X$ *en loi quand* $n \to +\infty$. *Alors, il existe un nouvel espace probabilisé (par exemple* $(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$*), une suite de v.a.r.* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et une v.a.r.* Y *(ce sont des v.a.r. sur ce nouvel espace probabilisé) telles que*

1. $Y_n \sim X_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $Y \sim X$,

2. $Y_n \to Y$ *p.s. quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 6.72. ■

6.4.3 Lois des grands nombres

Dans ce paragraphe, on donne des résultats de convergence (en probabilité, p.s., en loi) pour des sommes de v.a.r. indépendantes. Nous commençons ce paragraphe par un résultat (simple) sur la variance de la somme de v.a.r. indépendantes, dont on déduit la loi faible des grands nombre qui donne non seulement un résultat de convergence (en probabilité) mais aussi des estimations précises sur cette convergence. Puis, on donne la loi forte des grands nombres et on énonce, en remarque, le théorème central limite. On reviendra sur ce théorème central limite au chapitre 10 car on utilisera, pour sa démonstration, la transformation de Fourier (et la remarque 6.97).

Proposition 6.100 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n).$$

DÉMONSTRATION – On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $E_i = E(X_i)$. On a alors, par linéarité de l'intégrale, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E_i$ et :

$$\begin{aligned} Var(S_n) = E((S_n - E(S_n))^2) = E(\sum_{i=1}^n (X_i - E_i) \sum_{i=j}^n (X_j - E_j)) \\ = \sum_{i,j=1}^n E((X_i - E_i)(X_j - E_j)). \end{aligned}$$

Pour $i \neq j$, on a, comme X_i et X_j sont indépendantes, $E((X_i - E_i)(X_j - E_j)) = E(X_i - E_i)E(X_j - E_j) = 0$. On en déduit :

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^n E((X_i - E_i)^2) = \sum_{i=1}^n Var(X_i).$$

■

Proposition 6.101 (Loi faible des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable.*

On suppose que ces v.a.r. sont de même moyenne m et de même variance σ^2. *On pose* $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *(ce sont les moyennes de Cesàro de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*), alors* Y_n *converge en probabilité vers la v.a.r. constante et égale à m, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - m| > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Plus précisément, on a pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{6.38}$$

DÉMONSTRATION – Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.57), on a :

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = P((Y_n - m)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}E((Y_n - m)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $E((Y_n - m)^2) = \frac{1}{n^2}E((S_n - nm)^2) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.100 donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$. On en déduit finalement

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

■

On donne maintenant la loi forte des grands nombres. La loi forte des grands nombres donne une convergence p.s., ce qui est plus fort qu'une convergence en probabilité (donnée par la loi faible des grands nombres). D'autre part, le deuxième item de la proposition 6.102 (loi forte) ne demande que l'intégrabilité des v.a.r., ce qui est moins fort que de demander qu'elles soient de carré intégrable (hypothèse de la loi faible). La loi forte semble donc, à double titre (hypothèse moins forte et conclusion plus forte), meilleure que la loi faible. Ceci n'est pas tout à fait exact car l'intérêt de la loi faible est de donner une estimation sur la vitesse de convergence (inégalité (6.38)) ce que ne donne pas la loi forte.

On admettra la proposition suivante, qui donne la loi forte des grands nombres (voir par exemple [**neveu**, **revuz**])

Proposition 6.102 (Loi forte des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les* X_n *sont de carré intégrable, que* $E(X_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{E(X_n^2)}{n^2} < +\infty.$$

On a alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \textit{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

2. *On suppose ici que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d. et que* $E(|X_1|) < +\infty$. *Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E(X_1) \textit{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

3. *On suppose ici simplement que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d.. Alors, pour toute fonction* φ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $E(|\varphi(X_1)| < +\infty$ *(il suffit, par exemple, que* φ *soit bornée), on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) \to E(\varphi(X_1)) \textit{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

Le troisième item de la proposition 6.102 est une conséquence immédiate du deuxième car la suite $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. et $E(|\varphi(X_1)| < +\infty$. Il montre qu'il est possible en pratique d'avoir une idée de la loi d'une v.a.r. en faisant un grand nombre d'expériences indépendantes. (La même remarque s'applique avec la loi faible des grands nombres.)

Remarque 6.103 (Mesure empirique) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d.. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on note $\mu_n(\omega)$ la probabilité sur $\mathcal{B}(R)$ définie par

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(\omega)}.$$

On note aussi μ la loi de X_1. Une conséquence du troisième item de la proposition 6.102 est que quand $n \to +\infty$

$$\mu_n \to \mu \text{ étroitement p.s..}$$

La démonstration de cette convergence peut se faire en remarquant que la convergence étroite et équivalente (pour des probabilités) à la convergence vague (proposition 6.89), le fait que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est séparable et en utilisant un procédé diagonal.

Remarque 6.104 Nous verrons au chapitre 10 (théorème 10.24) un résultat de convergence en loi lorsque que l'on s'intéresse à $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$ au lieu de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (comme dans les propositions 6.101 et 6.102). Nous énonçons ici ce résultat (connu sous le nom de théorème central limite).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables. On note $m = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1)$. On pose

$$\mathrm{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - m).$$

La suite $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors en loi vers toute v.a.r. Y dont la loi est la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (la loi normale, ou loi de Gauss, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, est définie au chapitre 4 section 4.4 dans le cas $\sigma^2 \neq 0$ et $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$).

Remarque 6.105 On donne dans cette remarque une application des lois des grands nombres à l'étude d'un caractère pour une population donnée.

On note E l'ensemble (fini) des individus et C une application de E dans $\mathbb{R}$. A titre d'exemple, $\mathrm{C}(a)$ peut être la taille de l'individu a ou indiquer le parti politique pour lequel l'individu a (électeur) a l'intention de voter (en affectant un nombre à chaque parti politique). Pour étudier C, par exemple pour déterminer le pourcentage d'individus pour lesquels $\mathrm{C} > 2$, le principe est de considérer suffisamment d'échantillons dans la population E pour en déduire ce pourcentage. La justification de ce principe peut se faire en utilisant les lois des grands nombres. C'est cette justification que l'on expose maintenant en décrivant une méthode simple (les méthodes réellement utilisées sont plus complexes).

On munit E de la tribu formée de l'ensemble de ses parties, notée $\mathcal{P}(\mathrm{E})$, et de la probabilité uniforme, notée p (on a donc $p(\mathrm{A}) = \mathrm{card}\mathrm{A}/\mathrm{card}\mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$). La fonction C est alors une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\mathrm{E}, \mathcal{P}(\mathrm{E}), p)$. Le pourcentage cherché ci dessus est donc $p(\{\mathrm{C} > 2\})$.

Pour évaluer $p(\{\mathrm{C} > 2\})$, on peut procéder ainsi : On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ où $\Omega = \mathrm{E}^{\mathbb{N}^*}$ (un élément ω de Ω est donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a_n \in \mathrm{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, la tribu $\mathcal{A}$ et la probabilité P vérifiant les trois propriétés suivantes (on peut effectivement montrer l'existence de $\mathcal{A}$ et P) :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note π_n l'application (de Ω dans E) $\omega = (a_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \mapsto a_n$. La tribu $\mathcal{A}$ contient (pour tout n) la tribu engendrée par π_n, notée $\sigma(\pi_n)$. On rappelle que $\sigma(\pi_n) = \{(\pi_n)^{-1}(\mathrm{A}); \mathrm{A} \subset \mathrm{E}\}$.
2. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}((\pi_n)^{-1}(\mathrm{A})) = p(\mathrm{A})$.
3. La famille de tribus $\sigma(\pi_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est une famille indépendante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors la v.a.r. X_n par $\mathrm{X}_n(\omega) = \mathrm{C}(a_n)$ pour tout $\omega = (a_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \in \Omega$. Faire une infinité de tirages aléatoires indépendants dans la population E pour évaluer C consiste alors à choisir un élément ω de Ω, c'est-à-dire une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E. On évalue ainsi $\mathrm{X}_n(\omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour ce choix de ω.

La propriété 2 de P signifie que chaque tirage est aléatoire. Ceci signifie, en reprenant l'exemple ci dessus, que, pour tout n, $P(\{X_n > 2\}) = p(\{C > 2\})$. Les v.a.r. X_n ont toutes la même loi (et c'est cette loi que l'on veut déterminer).

Le fait que les tirages soient indépendants vient de la propriété 3 de P. Cette propriété 3 de P donne que les v.a.r. X_n sont indépendantes (noter que $X_n = C \circ \pi_n$). L'indépendance des X_n permet d'appliquer la loi forte des grands nombres, c'est-à-dire que presque sûrement (presque sûrement pour ω dans Ω) on a, pour tout toute fonction φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$E(\varphi(X_1)) = \frac{1}{n} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k(\omega)).$$

En prenant $\varphi(a) = 1$ si $a > 2$ et $\varphi(a) = 0$ sinon, c'est-à-dire $\varphi = 1_{]2,+\infty[}$, on obtient

$$p(\{C > 2\}) = \frac{1}{n} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k(\omega)).$$

On peut noter que $\varphi(X_k(\omega)) = 1$ si $C(a_k) > 2$ et 0 sinon (avec $\omega = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$).

Bien sûr, on ne fait pas vraiment tendre n vers $+\infty$, mais on prend “beaucoup de tirages” et on obtient “presque sûrement” le résutat voulu. Pour avoir un résultat plus précis, on peut utiliser la loi faible des grands nombres qui justement quantifie les termes “beaucoup” et “presque sûrement”.

6.5 Exercices

6.5.1 Espaces L^p, $1 \le p \le \infty$

Exercice 6.1 (Egalité dans l'inégalité de Hölder) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré,* $p \in]1, \infty[$, *soit* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, *et* q *le conjugué de* p, *c'est-à-dire* $q \in]1, \infty[$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Soit* $g = f^{\frac{1}{q-1}}$ *; montrer que* $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et que*

$$\int f g \, dm = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 6.2 (Fonctions nulles p.p. sur un ensemble mesurable) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty[$ et $A \in T$. On pose $F = \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m); f = 0$ p.p. sur $A\}$. Montrer que F est fermé (dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ *et* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f_n \to f$ *dans* $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Grâce à l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1) pour $1 < p < \infty$ *ou inégalité (6.10) qui contient aussi le cas* $p = 1$*), on a, pour tout* $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *avec* $q = \frac{p}{p-1}$*,*

$$\left|\int f_n g dm - \int f g dm\right| \le \int |(f_n - f)g| dm \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

et donc

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.39}$$

On prend alors $g = (|f|)^{p-1} 1_{\{f>0\}} 1_A - (|f|)^{p-1} 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *si* $p > 1$ *et on prend* $g = 1_{\{f>0\}} 1_A - 1_{\{f<0\}} 1_A \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *si* $p = 1$.

Comme $f_n g = 0$ *p.p., on déduit de (6.39) que* $\int |f|^p 1_A dm = 0$ *et donc que* $f = 0$ *p.p. sur* A.

Un autre démonstration est possible en utilisant la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.11).

Exercice 6.3 (Fonctions positives ou nulles p.p.) Soit $p \in [1, \infty]$ et $C = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda);\ f \ge 0 \text{ p.p.}\}$. Montrer que C est d'intérieur vide pour $p < \infty$ et d'intérieur non vide pour $p = \infty$.

Corrigé – **Cas** $p < \infty$

Soit $f \in C$ *et soit* $\varepsilon > 0$*. On va construire* $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*, avec* $g \notin C$ *et* $\|f - g\|_p \le \varepsilon$*. Comme* ε *est arbitraire, ceci montrera bien que* f *ne peut pas être dans l'intérieur de* C *et donc, comme* f *est arbitraire, que* C *est d'intérieur vide.*

On choisit, comme d'habitude, un représentant de f*. On pose* $A_n = \{0 \le f \le n\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. La suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{f \ge 0\}$*. Par continuité croissante de* λ*, on a donc* $\lambda(A_n) \to \lambda(\{f \ge 0\}) = \infty$ *quand* $n \to +\infty$*. Il existe donc* $n \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $\lambda(A_n) > 0$*. On choisit cette valeur de n et on pose* $A = A_n$*.*

On prend maintenant $m > (\frac{n+1}{\varepsilon})^p$ *(ce choix sera bientôt compréhensible...) et, pour* $i \in \mathbb{Z}$*, on pose* $B_i = A \cap [\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}[$*. Comme les* B_i *sont disjoints deux à deux et que* $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} B_i = A$*, on a* $\lambda(A) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda(B_i)$*. Il existe donc* $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\lambda(B_i) > 0$*. On choisit cette valeur de* i *et on pose* $B = B_i$ *(noter que* $\lambda(B) \le 1/m$*).*

On construit maintenant g *en prenant* $g(x) = f(x)$ *si* $x \in B^c$ *et* $g(x) = -1$ *si* $x \in B$*. La fonction* g *mesurable et :*

$$\int |g|^p dm = \int_{B^c} |g|^p dm + \int_B |g|^p dm \le \int |f|^p dm + \lambda(B) < \infty.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *(et* $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *en confondant* g *avec sa classe d'équivalence). On a aussi* $g \notin C$ *car* $\lambda(B) > 0$ *et* $g < 0$ *sur* B*. Enfin* $\|f - g\|_p^p \le (n+1)^p \lambda(B) \le \frac{(n+1)^p}{m} \le \varepsilon^p$ *(par le choix de m), donc* $\|f - g\|_p \le \varepsilon$*.*

Ceci montre bien que C *est d'intérieur vide.*

Cas $p = \infty$

On prend $f = 1_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (et donc $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ en confondant f avec sa classe d'équivalence). On note $B(f,1)$ la boule (dans L^∞) de centre f et de rayon 1. Soit $g \in B(f,1)$. On a $|1-g| = |f-g| \le \|f-g\|_\infty \le 1$ p.p.. On en déduit que $g \ge 0$ p.p. et donc que $g \in C$. La fonction f appartient donc à l'intérieur de C, ce qui prouve que C est d'intérieur non vide.

Exercice 6.4 (Convergence essentiellement uniforme) Soit (E,T,m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$, si et seulement s'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On suppose que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty$ p.p. (voir, par exemple, l'exercice corrigé 4.37). Il existe donc $A_n \in T$ t.q. $m(A_n) = 0$ et $|(f_n - f)(x)| \le \|f_n - f\|_\infty$ pour tout $x \in A_n^c$.

On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a alors, par σ-additivité de m, $m(A) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in A^c} |f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty.$$

On en déduit que $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$, ce qui donne la propriété désirée.

Réciproquement, on suppose maintenant qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $x \in A^c$, $|f_n(x) - f(x)| \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)|$. Comme $m(A) = 0$, on en déduit :

$$|f_n - f| \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)| \text{ p.p.},$$

et donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \le \sup_{y\in A^c} |f_n(y) - f(y)|.$$

Comme $f_n \to f$ uniformément sur A^c, quand $n \to +\infty$, ceci donne bien $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.5 (Densité et continuité en moyenne) 1. Soit $p \in [1,\infty[$. Montrer que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, montrer que $\|f - f(\cdot + h)\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

Corrigé – **Densité de C_c dans L^p** *On reprend ici la démonstration faite pour $p = 1$ (voir le théorème 5.20)*

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. En confondant un élément de $\mathcal{L}^p$ avec sa classe d'équivalence, on a donc aussi $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (ceci est aussi vrai pour $p = \infty$). L'objectif est donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}^p$ et

tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $\|f-\varphi\|_p \le \varepsilon$. *On va raisonner en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques,* $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ *et enfin* $\mathcal{L}^p$*).*

(a) *On suppose ici que* $f = 1_A$ *avec* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda(A) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. *On prend la même fonction* φ *que pour* $p = 1$ *(démonstration du théorème 5.20). On a* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi = 1$ *sur* K, $\varphi = 0$ *sur* O^c *et* $0 \le \varphi \le 1$ *(partout). Les ensembles* K *et* O *sont t.q.* $K \subset A \subset O$ *et* $\lambda(O \setminus K) \le 2\varepsilon$. *On en déduit que* $f - \varphi = 0$ *sur* $K \cup O^c$ *et* $0 \le |f-\varphi| \le 1$, *ce qui donne*

$$\|f-\varphi\|_p^p \le \lambda(O\setminus K) \le 2\varepsilon,$$

et donc

$$\|f-\varphi\|_p \le (2\varepsilon)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme ε *est arbitrairement petit, ceci termine la première étape.*

(b) *On suppose ici que* $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^p$. *Comme* $f \in \mathcal{E}_+$, *il existe* $a_1,\ldots,a_n > 0$ *et* $A_1,\ldots,A_n \in T$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$. *Comme* $f \in \mathcal{L}^p$, *on a, pour tout i,* $a_i^p \lambda(A_i) \le \int |f|^p dm < \infty$. *Donc,* $\lambda(A_i) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, *l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de* $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $\|1_{A_i} - \varphi_i\|_p \le \varepsilon$. *On pose* $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et on obtient* $\|f-\varphi\|_p \le (\sum_{i=1}^n a_i)\varepsilon$ *(ce qui est bien arbitrairement petit).*

(c) *On suppose ici que* $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $f \in \mathcal{M}_+$, *il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *t.q.* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$. *La suite* $(f - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc dominée par* $f \in \mathcal{L}^p$. *Le théorème de convergence dominée donne alors que* $(f - f_n) \to 0$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$. *On peut donc choisir* $g = f_n \in \mathcal{E}_+$ *t.q.* $\|f-g\|_p \le \varepsilon$.

L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $\|g-\varphi\|_p \le \varepsilon$. *D'où l'on déduit* $\|f-\varphi\|_p \le 2\varepsilon$, *ce qui termine l'étape 3.*

(d) *On suppose enfin que* $f \in \mathcal{L}^p$.

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^p$, *l'étape 3 donne qu'il existe* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *t.q.* $\|f^+ - \varphi_1\|_p \le \varepsilon$ *et* $\|f^- - \varphi_2\|_p \le \varepsilon$. *On pose alors* $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. *On a* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $\|f-\varphi\|_p \le 2\varepsilon$, *ce qui prouve bien la densité de* $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* L^p.

Continuité en moyenne

On raisonne ici en 2 étapes :

(a) *Soit* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *La fonction* φ *est donc uniformément continue, ce qui donne*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Soit $a > 0$ *t.q.* $\varphi = 0$ *sur* $[-a,a]^c$. *Pour* $h \in \mathbb{R}$ *t.q.* $|h| \le 1$, *on a donc, comme* $\varphi(x+h) - \varphi(x) = 0$ *si* $x \notin [-a-1, a+1]$,

$$\int |\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p dx \le (2a+2) \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

On en déduit que $\|\varphi(\cdot+h) - \varphi\|_p \to 0$ *quand* $h \to 0$.

(b) *Soit $f \in L^p$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne que $f(\cdot+h) \in L^p$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On veut maintenant montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.*

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la densité de C_c dans L^p, il existe $\varphi \in C_c$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \le \varepsilon$. L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue donne $\|f(\cdot+h)-\varphi(\cdot+h)\|_p = \|f-\varphi\|_p$. On a donc, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\|f(\cdot+h)-f\|_p \le 2\|f-\varphi\|_p + \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p \le 2\varepsilon + \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p.$$

D'après la première étape, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$|h| \le \eta \Rightarrow \|\varphi(\cdot+h)-\varphi\|_p \le \varepsilon.$$

Donc,

$$|h| \le \eta \Rightarrow \|f(\cdot+h)-f\|_p \le 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $f(\cdot+h) \to f$ dans L^p, quand $h \to 0$.

2. Les assertions précédentes sont-elles vraies pour $p = \infty$?

Corrigé – *Les assertions précédentes sont fausses pour $p = \infty$, comme cela est montré dans l'exercice 8.4.*

(a) *On a bien $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ mais le résultat de densité est faux. On prend, par exemple, $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f-\varphi\|_\infty \ge \frac{1}{2}$, pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

(b) *On prend ici aussi $f = 1_{]0,1[}$. Il est facile de voir que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$ pour tout $h \neq 0$.*

Exercice 6.6 (Sur la séparabilité des espaces de fonctions continues) On munit $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est séparable et que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Remarque : la séparabilité de l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $p \in [1,\infty[$ fait l'objet de l'exercice 8.5 et la non séparabilité de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est traitée à l'exercice 8.6.

Exercice 6.7 Soient (E,T,m) un espace mesuré, et f, g, h des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soient $p,q,r \in \,]1,+\infty[$, tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$, montrer que :

$$\int |fgh| dm \le (\int |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q dm)^{\frac{1}{q}} (\int |h|^r dm)^{\frac{1}{r}}.$$

(En convenant que $0 \times (+\infty) = 0$.)

Exercice 6.8 (Produit $L^p - L^q$) Soient (E,T,m) un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et q le conjugué de p (*i.e.* $q = \frac{p}{p-1}$). Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$, $f \in L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $g \in L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g_n \to g$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Montrer que $\int f_n g_n dm \to \int fg dm$ lorsque $n \to +\infty$.

Corrigé – *On remarque d'abord que le lemme 6.5 (ou la proposition 6.26 pour avoir aussi le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$) donne que $fg \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, on utilise l'inégalité de Hölder (lemme 6.5 et proposition 6.26) pour obtenir*

$$|\int f_n g_n dm - \int fg dm| \le |\int (f_n - f)g_n dm| + |\int f(g_n - g)dm|$$
$$\le \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g - g_n\|_q \to 0, \text{ quand } n \to +\infty,$$

car $\|f_n - f\|_p \to 0$, $\|g - g_n\|_q \to 0$ (quand $n \to +\infty$) et la suite $(\|g_n\|_q)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans L^q.

Exercice 6.9 (Caractérisation de $\mathcal{L}^p$) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $p \in [1, \infty]$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $r \in [1, \infty]$).

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On suppose que $fg \in \mathcal{L}^1$ pour tout $g \in \mathcal{L}^q$. Le but de l'exercice est de montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

1. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$.
2. On suppose, dans cette question, que $p = \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$, on raisonne par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^\infty$.
   (a) Soit $\alpha \ge 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $m(\{\alpha \le |f| < \beta\} > 0$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n \ge n$ et $m(A_n) > 0$ avec $A_n = \{\alpha_n \le |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^1$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.
   (c) Conclure.
3. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que $m(E) < \infty$. Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^p$, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde en supposant que $f \notin \mathcal{L}^p$.
   (a) Soit $\alpha \ge 0$. Montrer qu'il existe $\beta > \alpha$ t.q. $1 \le \int_A |f|^p dm < \infty$ avec $A = \{\alpha \le |f| < \beta\}$. En déduire qu'il existe une suite croissante $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\alpha_0 = 0$ et $1 \le \int_{A_n} |f|^p dm < \infty$ avec $A_n = \{\alpha_n \le |f| < \alpha_{n+1}\}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. On pose $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n |f|^{p-1} 1_{A_n}$ (les A_n étant définis à la question précédente). Montrer qu'un choix convenable de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $g \in \mathcal{L}^q$ et $fg \notin \mathcal{L}^1$.
   (c) Conclure.
4. On suppose, dans cette question, que $p \in]1, \infty[$ et que m est σ-finie. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.

Exercice 6.10 (Une fonction L^p est "mieux" que L^p ?) Soit (X, T, m) un mesure mesuré, $1 \le p < +\infty$ et $f \in L^p$ (avec $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$). L'exercice consiste à montrer qu'il existe $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s)/s = +\infty$ et $\varphi(|f|) \in L^p$.

1. (Question préliminaire) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres positifs t.q. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Montrer qu'il existe $\psi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante t.q. $\lim_{s\to+\infty} \psi(s) = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi(n) a_n < +\infty$.
2. Montrer qu'il existe $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ t.q. $\lim_{s\to+\infty} \varphi(s)/s = +\infty$ et $\varphi(|f|) \in L^p$.

Exercice 6.11 (Convergence de $\|\cdot\|_p$ quand $p \to +\infty$) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue à support compact. Montrer que $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ lorsque $p \to +\infty$.

Exercice 6.12 (Convergence de l'intégrale du produit de fonctions)

Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. On suppose que $g_n \to g$ dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $f_n g_n \to f g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *Cette question a été faite dans l'exercice 6.8.*

2. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p.. Montrer par un contre–exemple qu'on peut ne pas avoir $f_n g_n \to f g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *On prend* $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *On prend* $f = g = 0$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$f_n = g_n = \sqrt{n} 1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$
   On a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(comme d'habitude, on confond un élément de* $\mathcal{L}^p$ *avec sa classe d'équivalence).*

   On a aussi $f_n \to 0$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(car* $\|f_n\|_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$*),* $g_n \to 0$ *p.p. et* $f_n g_n \not\to 0$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *car* $\|f_n g_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. On suppose maintenant que $g_n \to g$ p.p. et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $\|g_n\|_\infty \le M$. Montrer qu'on a alors $f_n g_n \to f g$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

   Corrigé – *On remarque d'abord que* $f g \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *et* $f_n g_n \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(voir la proposition 6.26). Puis, on écrit*
   $$|\int f_n g_n dm - \int f g dm| \le \int |f_n - f||g_n| dm + \int |f||g_n - g| dm. \tag{6.40}$$
   Le premier terme du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 *car il est majoré par* $M\|f_n - f\|_1$ *qui tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$.

   Pour montrer que le deuxième terme de cette inégalité tend aussi vers 0, *on pose* $h_n = |f||g_n - g|$. *On a* $h_n \to 0$ *p.p. car* $g_n \to g$ *p.p., quand* $n \to +\infty$. *On a aussi* $0 \le h_n \le 2M|f| \in L^1_R(E, T, m)$ *(en effet, comme* $g_n \to g$ *p.p. et* $|g_n| \le M$ *p.p., on a*

aussi $|g| \leq \mathrm{M}$ *p.p.). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que* $\int h_n dm \to 0$*. On en déduit que le deuxième terme de (6.40) tend vers* 0 *quand* $n \to +\infty$ *et donc que* $f_n g_n \to fg$ *dans* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *quand* $n \to +\infty$*.*

Exercice 6.13 (Mesure de densité) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et μ une mesure de densité $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à m, montrer que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \displaystyle\int g d\mu = \int f g dm, \forall g \in \mathcal{M}_+ \\ (ii) & \text{Soit } g \in \mathcal{M}, \text{ alors } g \in \mathrm{L}^1(\mu) \Leftrightarrow fg \in \mathrm{L}^1(m), \\ & \text{et si } g \in \mathrm{L}^1(\mu), \text{ alors } \displaystyle\int g d\mu = \int f g dm \end{array}$$

Exercice 6.14 (Opérateur à noyau) Soit $\mathrm{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable (on a donc $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)))$. On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\int \mathrm{K}(x,t)dt \leq \mathrm{M}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int \mathrm{K}(t,y)dt \leq \mathrm{M}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{K}(x, \cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1$, $\mathrm{T}(f)(x) = \int \mathrm{K}(x,t)f(t)dt$.

Soit $1 \leq p \leq \infty$. [On conseille de considérer séparément les cas $p = 1$, $p = \infty$ et $1 < p < \infty$.]

1. Soit $f \in \mathrm{L}^p$ (on identifie f, comme d'habitude, avec l'un de ses représentants, on a donc $f \in \mathcal{L}^p$). Montrer que $\mathrm{T}(f)(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{L}^p$ (au sens "il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $\mathrm{T}(f) = g$ p.p.").
2. Montrer que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p.

Exercice 6.15 (Inégalité de Hardy) Soit $p \in]1, \infty[$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[), \lambda)$ (λ est donc ici la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,\infty[$).

Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $x \in]0,\infty[$, on pose $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^p$ et $\|\mathrm{F}\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathrm{C}_c(]0,\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0,\infty[$).

(a) Montrer $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$. Montrer que $x\mathrm{F}'(x) = -\mathrm{F}(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

Corrigé – *On pose* $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ *pour* $x \in]0,\infty[$. *Comme* f *est continue, la fonction* g *est de classe* C^1 *sur* $]0,\infty[$ *(et* $G' = f$*). On en déduit que* F *est aussi de classe* C^1 *sur* $]0,\infty[$.

Comme f *est à support compact dans* $]0,\infty[$, *il existe* $a, A \in]0,\infty[$, $a \le A$, *t.q.* $f(x) = 0$ *si* $x < a$ *ou* $x > A$. *La fonction* f *est bornée (car continue sur le compact* $[a,A]$ *et nulle en dehors de ce compact), on note* $M = \sup\{|f(x)|;\, x \in [a,A]\}$. *On a alors* $|F(x)| \le \frac{M(A-a)}{x} 1_{[a,\infty[}(x)$ *pour tout* $x \in]0,\infty[$. *On en déduit que* $F \in \mathcal{L}^p$ *car* $p > 1$ *(et on aussi* $F \in \mathcal{L}^\infty$*).*

Comme $xF(x) = G(x)$, *on a bien* $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in]0,\infty[$.

(b) On suppose, dans cette question, que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$.

Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x)dx$. [On pourra utiliser une intégration par parties.]

Montrer que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *En intégrant par parties (entre* F^p *et* 1*) sur* $]0,n[$, *on obtient :*

$$\int_0^n F^p(x)dx = -\int_0^n pF^{p-1}F'(x)xdx + F^p(n)n$$
$$= \int_0^n pF^p(x)dx - \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx + F^p(n)n,$$

et donc :

$$(p-1)\int_0^n F^p(x)dx = \int_0^n pF^{p-1}f(x)dx - F^p(n)n.$$

Comme $0 \le F^p(n)n \le \frac{1}{n^{p-1}}M(A-a) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *(où* a, A, M *sont définis à la question précédente) et que* $F, f \in \mathcal{L}^p$, *on en déduit :*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder (entre $f \in \mathcal{L}^p$ *et* $F^{p-1} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}$*) on déduit de la précédente inégalité :*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p\Big(\int_0^\infty F^p(x)dx\Big)^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc (comme $F \in \mathcal{L}^p$*)* $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

(c) Monter que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ (on ne suppose plus que $f(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$).

Corrigé – *Il suffit de considérer* $H(x) = \frac{1}{x}\int |f| 1_{]0,x[} d\lambda$ *pour* $x > 0$. *La question précédente donne que* $H \in \mathcal{L}^p$ *et* $\|H\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$. *Comme* $|F(x)| \le H(x)$ *pour tout* $x > 0$, *on a donc* $\|F\|_p \le \|H\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

2. On ne suppose plus que $f \in C_c(]0,\infty[)$.

(a) Montrer qu'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, exercice 6.5.]

Corrigé – *On définit g par $g = f$ sur $]0,\infty[$ et $g = 0$ sur $]-\infty, 0]$. On a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. il existe donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $g_n \to g$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ quand $n \to +\infty$. On note $\overline{g}_n$ la restriction de la fonction g_n à $]0,\infty[$. La suite $(\overline{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers f dans $\mathcal{L}^p$, mais les fonctions $\overline{g}_n$ ne sont pas nécessairement à support compact dans $]0,\infty[$. Il faut donc les modifier légèrement.*

On se donne une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\varphi = 0$ sur $]-1,1[$ et $\varphi = 1$ sur $]-2,2[^c$. On pose $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Le théorème de convergence dominée donne alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_m \overline{g}_n \to \overline{g}_n$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ quand $m \to \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir $m_n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|\varphi_{m_n}\overline{g}_n - \overline{g}_n\|_p \le \frac{1}{n+1}$. On pose $f_n = \varphi_{m_n}\overline{g}_n$, on a bien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ et $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$.

(b) Montrer que $F \in C(]0,\infty[) \cap \mathcal{L}^p$ et que $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Corrigé – *On pose $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$ pour $x \in]0,\infty[$. On remarque que $G \in C(]0,\infty[)$ car si $0 < x < y < \infty$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|G(x) - G(y)| \le \int |f| 1_{]x,y[} d\lambda \le \|f\|_p (y-x)^{1-\frac{1}{p}}$. On a donc aussi $F \in C(]0,\infty[)$.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(]0,\infty[)$ t.q. $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$. On a donc $F_n \in \mathcal{L}^p$ et

$$\|F_n\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p. \tag{6.41}$$

Pour $x \in]0,\infty[$, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder) $|F_n(x) - F(x)| \le \frac{1}{x}\|f_n - f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$. On en déduit que $F_n \to F$ p.p.. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou à la suite $(|F_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ pour déduire de (6.41) que $F \in \mathcal{L}^p$ et $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

3. Montrer que $\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}$ (dans cette formule, F est donné comme précédemment à partir de f). [On pourra considérer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$.]

Corrigé – *Soit $n \ge 2$ et f_n définie par $f_n(t) = t^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,n[}(t)$ pour $t \in]0,\infty[$. On a $f_n \in \mathcal{L}^p$ et $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$.*

On pose $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[} d\lambda$ et on cherche maintenant à minorer $\|F_n\|_p$. On remarque que $F_n(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$ et :

$$F_n(x) = \frac{p}{p-1}\frac{1}{x}(x^{\frac{p-1}{p}} - 1), \text{ pour } x \in [1,n]. \tag{6.42}$$

Soit $\eta > 0$. *Il existe* $A > 1$ *t.q. :*

$$x > A \Rightarrow x^{\frac{p-1}{p}} - 1 \geq (1-\eta)x^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc, en utilisant (6.42), on obtient :

$$n > A \Rightarrow \|F_n\|_p \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\int_A^n \frac{1}{x}dx)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}(1-\eta)(\log n - \log A)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p = (\log n)^{\frac{1}{p}}$, *on en déduit que* $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}(1-\eta)$. *Comme* $\eta > 0$ *est arbitrairement petit, on a donc* $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|F_n\|_p}{\|f_n\|_p} \geq \frac{p}{p-1}$, *ce qui donne :*

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \neq 0\} \geq \frac{p}{p-1}.$$

La majoration donnée à la question 3 permet de conclure :

$$\sup\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p}, f \in \mathcal{L}^p, \|f\|_p \neq 0\} = \frac{p}{p-1}.$$

Exercice 6.16 (Continuité d'une application de L^p dans L^q) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini, $p, q \in [1, \infty[$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^*\,;\ |g(s)| \leq C|s|^{\frac{p}{q}} + C,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{6.43}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *Cet exercice est très voisin de l'exercice 4.40 correspondant au cas* $p = q = 1$, *le corrigé des 3 premières questions va donc suivre essentiellement le corrigé de l'exercice 4.40.*

La fonction u *est mesurable de* E *(muni de la tribu* T*) dans* $\mathbb{R}$ *(muni de la tribu* $\mathcal{B}(R)$*) et* g *est borélienne (c'est-à-dire mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, muni de la tribu* $\mathcal{B}(R)$*). On en déduit, par composition, que* $g \circ u$ *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*).*

Pour $s \in [-1, 1]$, *on a* $|g(s)| \leq 2C$ *et donc* $|g(s)|^q \leq 2^q C^q$. *Pour* $s \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, *on a* $|g(s)| \leq 2C|s|^{\frac{p}{q}}$ *et donc* $|g(s)|^q \leq 2^q C^q |s|^p$. *On a donc, pour tout* $s \in \mathbb{R}$, $|g(s)|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |s|^p$. *On en déduit que, pour tout* $x \in E$, $|g \circ u(x)|^q = |g(u(x))|^q \leq 2^q C^q + 2^q C^q |u(x)|^p$, *et donc :*

$$\int |g \circ u|^q dm \leq 2^q C^q \|u\|_p^p + 2^q C^q m(E),$$

ce qui donne $g \circ u \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

On pose $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, pour $r = p$ et $r = q$. Pour $u \in L^p$, on pose $G(u) = \{h \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{R}}(E, T, m); h = g \circ v \text{ p.p.}\}$, avec $v \in u$. On a donc $G(u) \in L^q$ et cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que $G(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.

Corrigé – *La démonstration du fait que cette définition a bien un sens est essentiellement identique à celle du cas* $p = q = 1$ *(exercice 4.40). Elle n'est pas demandée ici.*

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$. On suppose que $u_n \to u$ p.p., quand $n \to +\infty$, et qu'il existe $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ t.q. $|u_n| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ dans L^q.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore notée u_n. On choisit aussi des représentants de u et F, notés toujours u et F. Comme $u_n \to u$ p.p. quand $n \to +\infty$ et que g est continu, il est facile de voir que $g \circ u_n \to g \circ u$ p.p.. On a donc $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ p.p..*

On remarque aussi que $|g \circ u_n| \le \mathrm{C}|u_n|^{\frac{p}{q}} + \mathrm{C} \le \mathrm{C}|\mathrm{F}|^{\frac{p}{q}} + \mathrm{C}$ p.p. et donc $|\mathrm{G}(u_n)| \le \mathrm{C}|\mathrm{F}|^{\frac{p}{q}} + \mathrm{C}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\mathrm{F} \in \mathrm{F}^p$, on a $|\mathrm{F}|^{\frac{p}{q}} \in \mathrm{L}^q$. Les fonctions constantes sont aussi dans L^q (car $m(\mathrm{E}) < \infty$). On a donc $\mathrm{C}|\mathrm{F}|^{\frac{p}{q}} + \mathrm{C} \in \mathrm{L}^q$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée dans L^q (théorème 6.9), il donne que $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que G est continue de L^p dans L^q.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas continue de L^p dans L^q. Il existe donc $u \in \mathrm{L}^p$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^p$ t.q. $u_n \to u$ dans L^p et $\mathrm{G}(u_n) \not\to \mathrm{G}(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*

Comme $\mathrm{G}(u_n) \not\to \mathrm{G}(u)$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et :

$$\|\mathrm{G}(u_{\varphi(n)}) - \mathrm{G}(u)\|_q \ge \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{6.44}$$

(La suite $(\mathrm{G}(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(\mathrm{G}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

Comme $u_{\varphi(n)} \to u$ dans L^p, on peut appliquer le théorème 6.11 (réciproque partielle de la convergence dominée dans L^q). Il donne l'existence de $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et de $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ t.q. $\psi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$, $u_{\varphi\circ\psi(n)} \to u$ p.p. et $|u_{\varphi\circ\psi(n)}| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. (La suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$).

On peut maintenant appliquer la question 2 à la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle donne que $\mathrm{G}(u_{\varphi\circ\psi(n)}) \to \mathrm{G}(u)$ dans L^q quand $n \to +\infty$, ce qui est en contradiction avec (6.44).

4. On considère ici $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = ([0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on prend $p = q = 1$. On suppose que g ne vérifie pas (6.43). On va construire $u \in \mathrm{L}^1$ t.q. $\mathrm{G}(u) \notin \mathrm{L}^1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que : $|g(\alpha_n)| \ge n|\alpha_n|$ et $|\alpha_n| \ge n$.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose que $|g(s)| < n|s|$ pour tout s t.q. $|s| \ge n$. On pose $\mathrm{M} = \max\{|g(s)|, s \in [-n, n]\}$. On a $\mathrm{M} < \infty$ car g est continue sur le compact $[-n, n]$ (noter que n est fixé). en posant $\mathrm{C} = \max\{n, \mathrm{M}\}$, on a donc :*

$$|g(s)| \le \mathrm{C}|s| + \mathrm{C}, \text{ pour tout } s \in \mathbb{R},$$

en contradiction avec l'hypothèse que g ne vérifie pas (6.43).

Il existe donc s, t.q. $|s| \ge n$ et $|g(s)| \ge n|s|$. Ceci prouve l'existence de α_n.

(b) On choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions données à la question précédente. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{|\alpha_n| n^2} = 1.$$

Corrigé – *Comme $\alpha_n \geq n$, on a $\frac{1}{|\alpha_n|n^2} \leq \frac{1}{n^3}$ et donc :*

$$0 < \beta = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{|\alpha_n| n^2} < \infty.$$

On choisit alors $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - \dfrac{\alpha}{|\alpha_n|n^2}$ (où α_n et α sont définies dans les 2 questions précédentes). On pose $u = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n 1_{[a_{n+1},a_n[}$. Montrer que $u \in L^1$ et $G(u) \notin L^1$.

Corrigé – *Pour $n \geq 2$, on a $a_n = 1 - \sum_{p=1}^{n-1} \dfrac{\alpha}{|\alpha_p|p^2}$.*

Grâce au choix de α, on a donc $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_n \downarrow 0$, quand $n \to +\infty$.

La fonction u est bien mesurable et, par le théorème de convergence monotone (plus précisément, on utilise sa première conséquence, le corollaire 4.18) :

$$\int |u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\alpha_n|(a_n - a_{n+1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n^2} < \infty.$$

Donc, $u \in \mathcal{L}^1$ et aussi $u \in L^1$ en confondant, comme d'habitude, u avec sa classe.

on remarque ensuite que $g \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} g(\alpha_n) 1_{[a_{n+1},a_n[}$. On a donc :

$$\int |g\circ u| d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} |g(\alpha_n)|(a_n - a_{n+1}) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha}{n} = \infty.$$

ceci montre que $g \circ u \notin \mathcal{L}^1$ et donc $G(u) \notin L^1$.

Exercice 6.17 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Egorov) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de L^p et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$. [Traiter séparément le cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.]

Corrigé – *On suppose que $\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p < \infty$ (sinon, l'inégalité à démontrer est immédiate). Comme d'habitude, on choisit des représentants de f_n et de f (qui sont donc dans $\mathcal{L}^p$).*

Pour $p < \infty$, on utilise le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $g_n = |f_n|^p$. Comme $g_n \to |f|^p$ p.p., Il donne :

$$\int |f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\|f\|_p \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$.

Pour $p = \infty$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A^c) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in T$ t.q. $m(A_n^c) = 0$ et $f_n(x) \le \|f_n\|_\infty$ pour tout $x \in A_n$. On pose $B = A \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$, de sorte que $B \in T$ et $m(B^c) = 0$. Pour $x \in B$, on a :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \le \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$.

2. En prenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ (où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$), donner un exemple pour lequel la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\|f\|_p < \lim_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. [On pourra aussi traiter séparément les cas $1 \le p < \infty$ et $p = \infty$.]

Corrigé – *Pour $p < \infty$, on peut prendre $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).*

Pour $p = \infty$, on peut prendre $f_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (et $f = 0$ p.p.).

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.

(a) On suppose que $m(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. On choisit aussi un représentant de f, encore noté f. Soit $A \in T$ et $\varepsilon > 0$. On suppose que $f_n \to f$ uniformément sur A^c. Montrer qu'il existe n_0 t.q. :

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \varepsilon + \int_A |f| dm.$$

Corrigé – *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\begin{aligned}\int_A |f_n| dm &= \int_A |f| dm + \int_A (|f_n| - |f|) dm \\ &= \int_A |f| dm + \|f_n\|_1 - \|f\|_1 + \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm.\end{aligned} \tag{6.45}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c (qui est de mesure finie car $m(E) < \infty$), il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c} (|f| - |f_n|) dm \le \int_{A^c} |f_n - f| dm \le \varepsilon.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, quand $n \to +\infty$, il existe n_2 t.q. $n \ge n_2 \Rightarrow \|f_n\|_1 - \|f\|_1 \le \varepsilon$. Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a donc :

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \int_A |f| dm + 2\varepsilon.$$

ce qui donne le résultat demandé.

(b) On suppose que $m(E) < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 4.50 page 194, il existe $\delta > 0$ t.q.*

$$(A \in T,\ m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon.$$

Le théorème d'Egorov (théorème 3.39) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c} |f_n - f| dm + \int_A |f_n| dm + \int_A |f| dm.$$

On a $\int_A |f| dm \le \varepsilon$. Par la question précédente, il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_A |f_n| dm \le \int_A |f| dm + 2\varepsilon \le 3\varepsilon.$$

Par convergence uniforme de f_n vers f sur A^c, il existe n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c} |f_n - f| dm \le m(E) \sup_{A^c} |f_n - f| \le \varepsilon.$$

On a donc finalement :

$$n \ge \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f| dm \le 5\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

(c) On suppose que $m(E) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. :

$$m(C) < \infty \text{ et } \int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon.$$

Corrigé – *Cette question est résolue dans la proposition 4.50 page 194.*

(d) On suppose que $m(E) = \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. La question précédente donne l'existence de $C \in T$ t.q. $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f| dm \le \varepsilon$.*

La proposition 4.50 donne ici aussi l'existence de $\delta > 0$ t.q. $(A \in T,\ m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f| dm \le \varepsilon$.

Le théorème d'Egorov (appliqué à la mesure définie par $m_C(B) = m(B \cap C)$ pour $B \in T$, qui est bien une mesure finie sur T) donne l'existence de $A \in T$ t.q. $m(A \cap C) \le \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur A^c. On a donc :

$$\int |f_n - f| dm \le \int_{A^c \cap C} |f_n - f| dm + \int_{A \cup C^c} |f_n| dm + \int_{A \cup C^c} |f| dm.$$

Par le choix de A *et de* C*, on a* $\int_{A\cup C^c}|f|dm = \int_{(A\cap C)\cup C^c}|f|dm \le \int_{A\cap C}|f|dm + \int_{C^c}|f|dm \le 2\varepsilon$.

En reprenant la question 3a, on remarque que l'hypothèse $m(E) < \infty$ *n'a été utilisée que pour dire que* $m(A^c) < \infty$*. Ici, comme* $m(A^c \cap C) < \infty$*, la même démonstration donne donc qu'il il existe* n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A\cup C^c}|f_n|dm \le \int_{A\cup C^c}|f|dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

Enfin, par convergence uniforme de f_n *vers* f *sur* A^c*, il existe* n_1 *t.q.*

$$n \ge n_1 \Rightarrow \int_{A^c\cap C}|f_n - f|dm \le m(C)\sup_{A^c}|f_n - f| \le \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \ge \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f|dm \le 7\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ *dans* L^1*, quand* $n \to +\infty$.

4. Dans cette question, on suppose que $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p, quand $n \to +\infty$. [S'inspirer de la méthode suggérée pour le cas $p = 1$.]

Corrigé – *On traite directement le cas général (c'est-à-dire* $m(E) \le \infty$*). Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $|f|^p \in L^1$*, La proposition 4.50 donne l'existence de* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < \infty$ *et* $\int_{C^c}|f|^p dm \le \varepsilon$*. Elle donne ici aussi l'existence de* $\delta > 0$ *t.q.* $(A \in T, m(A) \le \delta) \Rightarrow \int_A |f|^p dm \le \varepsilon$.

On applique maintenant le théorème d'Egorov avec la mesure m_C *(comme à la question précédente) et pour les suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$*. On obtient (en prenant l'union des ensembles donnés par le théorème pour ces deux suites) l'existence de* $A \in T$ *t.q.* $m(A \cap C) \le \delta$*,* $f_n \to f$ *uniformément sur* A^c *et* $|f_n|^p \to |f|^p$ *uniformément sur* A^c *. On a :*

$$\int |f_n - f|^p dm \le \int_{A^c\cap C}|f_n - f|^p dm + 2^p\int_{A\cup C^c}|f_n|^p dm + 2^p\int_{A\cup C^c}|f|^p dm.$$

Par le choix de A *et de* C*, on a* $\int_{A\cup C^c}|f|^p dm = \int_{(A\cap C)\cup C^c}|f|^p dm \le \int_{A\cap C}|f|^p dm + \int_{C^c}|f|^p dm \le 2\varepsilon$.

Comme à la question précédente, en reprenant la question 3a, on obtient qu'il existe n_0 *t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{A\cup C^c}|f_n|^p dm \le \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + 2\varepsilon \le 4\varepsilon.$$

En fait, pour montrer cette inégalité avec la question 3a, on remplace (6.45) par :

$$\begin{aligned}\int_{A\cup C^c}|f_n|^p dm &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \int_{A\cup C^c}(|f_n|^p - |f|^p)dm\\ &= \int_{A\cup C^c}|f|^p dm + \|f_n\|_p^p - \|f\|_p^p + \int_{A^c\cap C}(|f|^p - |f_n|^p)dm,\end{aligned}$$

et on utilise la convergence de $\|f_n\|_p^p$ *vers* $\|f\|_p^p$*, la convergence uniforme de* $|f_n|^p$ *vers* $|f|^p$ *et le fait que* $m(\mathrm{C}) < \infty$.

Enfin, par convergence uniforme de f_n *vers* f *sur* A^c*, il existe* n_1 *t.q.*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \int_{\mathrm{A}^c \cap \mathrm{C}} |f_n - f|^p \, dm \leq m(\mathrm{C}) \sup_{\mathrm{A}^c} |f_n - f|^p \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow \int |f_n - f|^p \, dm \leq 2^p (7\varepsilon).$$

Ce qui prouve que $f_n \to f$ *dans* L^p*, quand* $n \to +\infty$.

5. Dans cette question, on suppose que $p = \infty$ et que $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour* $n \geq 2$*, on pose* $f = 1_{]\frac{1}{2},1[}$ *et on définit* f_n *ainsi :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ n(x - \frac{1}{2}) \text{ si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a bien, quand $n \to +\infty$, $f_n \to f$ *p.p.,* $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ *et* $f_n \not\to f$ *dans* L^∞ *(car* $\|f_n - f\|_\infty = 1$ *pour tout* $n \geq 2$*).*

Exercice 6.18 (Convergence presque partout et convergence des normes, par Fatou) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $f \in \mathrm{L}^p$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose que $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ (en ayant choisi des représentants de f_n et f). Montrer que $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ dans L^1.

Corrigé – *Comme* $|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$*, on a bien* $g_n \geq 0$. *Comme* g_n *tend p.p. vers* $2|f|$*, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*

$$\int 2|f| \, dm \leq \liminf_{n \to +\infty} \int g_n \, dm.$$

Comme $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$*, on a* $\liminf_{n\to+\infty} \int g_n \, dm = 2\int |f| \, dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n| \, dm$. *On a donc :*

$$\int 2|f| \, dm \leq 2 \int |f| \, dm - \limsup_{n \to +\infty} \int |f - f_n| \, dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n| \, dm \leq 0$*, et donc que* $f_n \to f$ *dans* L^1.

2. On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

Corrigé – *On prend maintenant $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$. Comme $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2\max\{|f_n|, |f|\}$, on a $|f - f_n|^p \leq 2^p \max\{|f_n|, |f|\}^p \leq 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p$. On a donc $g_n \geq 0$. Comme g_n tend p.p. vers $2^{p+1}|f|^p$, le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne :*

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On a donc

$$\int 2^{p+1}|f|^p dm \leq 2^{p+1} \int |f|^p dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm.$$

On en déduit que $\limsup_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm \leq 0$, et donc que $f_n \to f$ dans L^p.

Exercice 6.19 (Généralisation de l'exercice 6.18) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Soit p une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < p(x) \leq q$ pour tout $x \in E$.

1. (Question liminaire) Pour $(a, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$\psi(a, p) = a^p = \begin{cases} e^{p\ln(a)} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Montrer que ψ est continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $(a, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ et (a_n, p_n) une suite de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ telle que $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$. Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n, p_n) = \psi(a, p)$, on distingue deux cas :*

Premier cas

On suppose $a \neq 0$. On peut alors supposer que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = p \ln a$ et on en déduit la continuité de ψ au point (a, p).

Second cas

On suppose $a = 0$. Pour tout n tel que $a_n = 0$, on a $\psi(a_n, p_n) = \psi(a, p) = 0$. On peut donc se restreindre au cas $a_n > 0$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = -\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n, p_n) = 0 = \psi(a, p)$. ce qui donne la continuité de ψ au point (a, p) et termine cete question.

2. Montrer que l'application $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}_+$).

Corrigé – *Comme f est mesurable, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Comme p est mesurable positive, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telle que $\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = p(x)$ pour tout $x \in E$. On peut même supposer que $p_n(x) > 0$ pour tout n et tout x (il suffit, par exemple, de remplacer la fonction p_n par la fonction $p_n + 1/n$).*
On pose $h_n(x) = |f_n(x)|^{p_n(x)} = \psi(|f_n(x)|, p_n(x))$.
La fonction h_n est étagée (et donc mesurable). La continuité de ψ nous donne $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = |f(x)|^{p(x)}$ pour tout $x \in E$. On en déduit que la fonction $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable.

On suppose maintenant que

- $\int |f(x)|^{p(x)} dm(x) < +\infty$,
- $\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, quand $n \to +\infty$,
- $f_n \to f$ p.p..

3. Montrer que $\int |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

[On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = M(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ en choisissant convenablement M dans $\mathbb{R}$.]

Corrigé – *On choisit $M = 2^q$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on pose donc*
$$g_n(x) = 2^q|f_n(x)|^{p(x)} + 2^q|f(x)|^{p(x)} - |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}.$$
Comme $|f(x) - f_n(x)| \le |f(x)| + |f_n(x)| \le 2\max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}$, on a
$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^{p(x)} \max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}^{p(x)} \le 2^{p(x)}|f_n(x)|^{p(x)} + 2^{p(x)}|f(x)|^{p(x)}.$$
Comme $p(x) \le q$, on en déduit
$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^q|f_n(x)|^{p(x)} + 2^q|f(x)|^{p(x)}.$$
On a donc $g_n(x) \ge 0$.
La question précédente donne que g_n est mesurable et comme $f_n \to f$ p.p., on a $g_n \to 2^{q+1}|f|^p$ p.p.. Le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne alors :
$$\int 2^{q+1}|f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$
Comme $\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, on a
$$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$
On a donc
$$\int 2^{q+1}|f(x)|^{p(x)} dm(x) \le 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$
On en déduit que $\int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.20 (Convergence faible et convergence des normes)

On rappelle la définition de la convergence faible

Définition 6.106 *Soit* E *un espace vectoriel normé réel,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite déléments de* E *et* f *un élément de* E. *On dit que* f_n *converge faiblement vers* f *dans* E *si* $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{T}(f_n) = \mathrm{T}(f)$ *pour tout* $\mathrm{T} \in \mathrm{E}'$. *On rappelle que* E' *désigne l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{R}$. *On rappelle aussi qu'une application linéaire* T *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est continue si et seulement si il existe* $\mathrm{C} > 0$ *tel que, pour tout* $f \in \mathrm{E}$, $|\mathrm{T}(f)| \le \mathrm{C}\|f\|_{\mathrm{E}}$.

Soit $(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $1 \le r \le +\infty$. On note L^r l'espace $\mathrm{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}, m)$ et $\|\cdot\|_r$ la norme dans l'espace L^r.

Soient $1 \le p < +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite déléments de L^p et f un élément de L^p.

On suppose que f_n converge faiblement vers f dans L^p.

On pose $q = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $q = +\infty$ si $p = 1$.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n g\,dm = \int f g\,dm$ pour tout $g \in \mathrm{L}^q$.
2. On suppose dans cette question que $p = 2$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$.
   Montrer que $f_n \to f$ dans L^2 quand $n \to +\infty$.

On suppose maintenant que $1 < p < +\infty$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

3. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|b|^p - |a|^p = p|a|^{p-2}a(b-a) + \int_0^1 p(p-1)(1-t)|a + t(b-a)|^{p-2}(b-a)^2\,dt.$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathrm{X}$,

$$\begin{aligned}|f_n(x)|^p - |f(x)|^p &= p|f(x)|^{p-2}f(x)(f_n(x) - f(x)) \\ &+ \int_0^1 p(p-1)(1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2\,dt.\end{aligned}$$

4. Montrer que

$$\int_{\mathrm{X}} \Big(\int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2\,dt\Big)\,dm(x) \to 0$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathrm{X}$ on pose $g_n(x) = \int_0^1 (1-t)|f(x) + t(f_n(x) - f(x))|^{p-2}(f_n(x) - f(x))^2\,dt$.

5. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite, encore notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour ne pas alourdir les notations), telle que $g_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$.
6. Soit $x \in X$ tel que $g_n(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$). Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
7. Si $f_n \to f$ p.p. et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, montrer que $f_n \to f$ dans L^p.
   [On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite $g_n = 2^p|f_n|^p + 2^p|f|^p - |f_n - f|^p$.]
8. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p (sans extraction de sous suite).

On suppose maintenant que $p = 1$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

9. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, strictement convexe, de classe C^2, sous-linéaire (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ telle que $\varphi'(s) \le \alpha$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui permet de montrer que $\varphi(g) \in L^1$ pour tout $g \in L^1$) et $\liminf_{s\to+\infty} s^2\varphi''(s) > 0$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi(f_n)dm = \int \varphi(f)dm$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 quand $n \to +\infty$.
   [On pourra reprendre la méthode utilisée pour $p > 1$ en remplaçant la fonction $s \mapsto |s|^p$ par φ.]
10. (Contre exemple)
    En prenant $(X, T, m) = (]0, 1[, B(]0, 1[), \lambda)$, donner un exemple pour lequel $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ et $f_n \not\to f$ dans L^1 (toujours avec l'hypothèse $f_n \to f$ faiblement dans L^1).

Exercice 6.21 ("Compacité" $L^p - L^q$) Dans cet exercice, on montre que, dans le cas d'une mesure finie, si une suite de fonctions converge presque partout et est bornée dans L^p, alors elle converge dans L^q pour $1 \le q < p$. Noter que ce résultat n'est donc vrai que si $p > 1$.

Dans toute la suite, (E, T, m) est un espace mesuré, et pour tout $1 \le r \le \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

1. Soit $r > 1$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^r. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que :

   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q.
   $$\text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } A \in T \text{avec } m(A) \le \delta \text{ alors } \int_A |g_n| dm \le \varepsilon.$$

   [Utiliser l'inégalité de Hölder.]

Corrigé – *En utilisant l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) entre $r \in]1,\infty]$ et son conjugué et les fonctions g_n et 1_A, on obtient, pour tout $A \in T$ de mesure finie :*

$$\int_A |g_n| dm \leq \|g_n\|_r m(A)^{1-\frac{1}{r}}.$$

Si C est un majorant de $\{\|g_n\|_r,\ n \in \mathbb{N}\}$, il suffit donc de prendre $\delta > 0$ t.q. $C\delta^{1-\frac{1}{r}} \leq \varepsilon$ (ce qui est possible car $r > 1$) pour avoir le résultat demandé.

Soit $1 \leq q < p \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p. On suppose dans toute la suite que $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$.

2. *Compacité* $L^p - L^q$*, mesure finie* On suppose que $m(E) < \infty$.

(a) Montrer que $f \in L^p$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^p$ t.q. $f = g$ p.p.).

Corrigé – *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. Il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A^c$. On pose $g(x) = f(x)$ pour $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ pour $x \in A$, de sorte que $g = f$ p.p. et $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$.*

Si $p < \infty$, on applique le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne :

$$\int |g|^p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int |f_n|^p dm \leq C^p,$$

où C est un majorant de $\{\|f_n\|_p,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc $g \in \mathcal{L}^p$ et donc $f \in L^p$ (au sens demandé).

Si $p = \infty$, comme $|f_n| \leq \|f_n\|_\infty$ p.p., on déduit de $g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n 1_{A^c}(x)$ pour tout $x \in E$ le fait que $\|g\|_\infty \leq C$ p.p., où C est un majorant de $\{\|f_n\|_\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$. On a donc, ici aussi, $g \in \mathcal{L}^\infty$ et donc $f \in L^\infty$ (au sens demandé).

(b) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1 avec $g_n = |f_n - f|^q$ et un théorème du cours.]

Corrigé – *La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r, avec $r = \frac{p}{q} > 1$. Elle est donc équi-intégrable (par la question 1). Comme elle converge p.p. vers 0 et que $m(E) < \infty$, le théorème de Vitali (théorème 4.51) donne que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans L^1 et donc que $f_n \to f$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*

3. *Cas d'une mesure infinie, contre exemple* On suppose que $m(E) = +\infty$.

(a) Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. Montrer que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^q quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On définit la mesure m_B sur T en posant $m(A) = m(A \cap B)$ pour tout $A \in T$. La mesure m_B est finie. On peut donc appliquer la question 2 avec cette mesure. On obtient que $f_n \to f$, quand $n \to +\infty$, dans l'espace $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m_B)$. Ceci qui donne que $f_n 1_B \to f 1_B$ dans L^q quand $n \to +\infty$ (car, $\int |f_n - f|^q 1_B dm = \int |f_n - f|^q dm_B$).*

(b) On prend ici $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $p = 2$, $q = 1$, $f = 0$. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f_n \not\to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans L^2, $f_n \to 0$ p.p. quand $n \to +\infty$).

Corrigé – *On peut prendre, par exemple,* $f_n = 1_{]n,n+1[}$.

Exercice 6.22 (Convergence "dominée en norme", mesure non finie) Pour tout $s \in [1, \infty]$, on note L^s l'espace $L^s_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $r, p, q \in \overline{\mathbb{R}}$ t.q. $1 \le r < p < q \le +\infty$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f vérifient les trois conditions suivantes :

— $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$,

— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^r et dans L^q,

— $f_n(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$, uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f \in L^r \cap L^q$ (distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$).
2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N},\ \lambda(A) \le \delta \Rightarrow \int_A |f_n|^p d\lambda \le \varepsilon.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda(C) < +\infty$ et

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{C^c} |f_n|^p d\lambda \le \varepsilon.$$

4. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p. [Utiliser le théorème de Vitali, donné dans le cours.]
5. On suppose de plus que $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ t.q. $|x| \ge 1$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^s pour tout $s \in [1, q[$ et donner un exemple pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^q (distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$).

Exercice 6.23 (Sur les suites convergentes en mesure et bornées dans $\mathcal{L}^p$) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $p \in]1, +\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathcal{L}^p$ (c'est-à-dire $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$) et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$. [On rappelle que, comme $f_n \to f$ en mesure, il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge p.p. vers f.]

Corrigé – *On note* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$. *Il existe une sous-suite de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge p.p. vers* f. *On note* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *(avec* φ *strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$*) une telle sous-suite.*

Si $p < +\infty$, on applique alors le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_{\varphi(n)}|^p$. Comme $g_n \to |f|^p$ p.p., on en déduit que

$$\int |f|^p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm \leq \mathrm{M}^p < +\infty.$$

Ce qui prouve que $f \in \mathcal{L}^p$. (Ce résultat est aussi vrai si $p = 1$.)
Si $p = \infty$, comme $|f_{\varphi(n)}| \leq \mathrm{M}$ p.p., on en déduit que $|f| \leq \mathrm{M}$ p.p. et donc que $f \in \mathcal{L}^\infty$.

2. Soit $q \in [1, p[$. Montrer que $\|f_n - f\|_q \to 0$ quand $n \to +\infty$. [Pour $\varepsilon > 0$, on pourra utiliser, avec $\mathrm{A}_{n,\varepsilon} = \{|f_n - f| \leq \varepsilon\}$, l'égalité suivante : $\int |f_n - f|^q dm = \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm + \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c} |f_n - f|^q dm$.]

Corrigé – *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int |f_n - f|^q dm = \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}} |f_n - f|^q dm + \int_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c} |f_n - f|^q dm \leq \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + \int |f_n - f|^q 1_{\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c} dm. \tag{6.46}$$

On suppose tout d'abord $p < +\infty$. En appliquant l'inégalité de Hölder à la dernière intégrale (avec l'exposant p/q et son conjugué), on obtient

$$\int |f_n - f|^q dm \leq \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + \Big(\int |f_n - f|^p dm\Big)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c)^{1-\frac{q}{p}}.$$

Comme $\|f_n\|_p \leq \mathrm{M}$ et $\|f\|_p \leq \mathrm{M}$, on en déduit

$$\int |f_n - f|^q dm \leq \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + (2^{p+1}\mathrm{M}^p)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c)^{1-\frac{q}{p}}.$$

Soit maintenant $\eta > 0$. On choisit tout d'abord $\varepsilon > 0$ t.q. $\varepsilon^q m(\mathrm{E}) \leq \eta$. Puis, comme $f_n \to f$ en mesure, on a $\lim_{n\to+\infty} m(\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c) = 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow (2^{p+1}\mathrm{M}^p)^{\frac{q}{p}} m(\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c)^{1-\frac{q}{p}} \leq \eta$$

et donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int |f_n - f|^q dm \leq 2\eta.$$

Ce qui montre bien que $\|f_n - f\|_q \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On suppose maintenant que $p = \infty$. Comme $|f_n| \leq \mathrm{M}$ p.p. et $|f| \leq \mathrm{M}$ p.p., l'inégalité 6.46 donne

$$\int |f_n - f|^q dm \leq \varepsilon^q m(\mathrm{E}) + 2^q \mathrm{M}^q m(\mathrm{A}_{n,\varepsilon}^c).$$

On conclut alors, comme dans le cas $p < +\infty$, que $\|f_n - f\|_q \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3. (Question plus difficile.) Donner un exemple pour lequel $\|f_n - f\|_p \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour cet exemple, on prend $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et $p = 2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n par*

$$f_n(x) = \sqrt{n} \text{ si } 0 < x < \frac{1}{n} \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{1}{n} < x < 1.$$

Avec ce choix, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathcal{L}^2$, elle converge en mesure vers la fonction nulle mais $\|f_n\|_2 \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.24 (Caractérisation de $\mathcal{L}^\infty$) Soit (X, T, m) un espace mesuré. Pour $p \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $f_n \in \mathcal{L}^\infty$ et $g_n \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = f_n + g_n$, $\|f_n\|_\infty \leq 1$ et $\|g_n\|_1 \leq \frac{1}{n}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq 1$.

Corrigé – *On remarque d'abord que f est mesurable car f_1 et g_1 sont mesurables. Puis, pour montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty$, on peut, par exemple, procéder de la manière suivante.*

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $|f_n| \leq 1$ p.p., on a $|f| \leq 1 + |g_n|$ p.p. et donc

$$m(\{|f| \geq 1 + \varepsilon\}) \leq m(\{|g_n| \geq \varepsilon\}).$$

Puis, comme $m(\{|g_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int |g_n| dm \leq \frac{1}{n\varepsilon}$, on en déduit (quand $n \to +\infty$) $m(\{|f| \geq 1 + \varepsilon\}) = 0$.

Finalement, comme $\{|f| > 1\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{|f| \geq 1 + \frac{1}{n}\}$, la σ-additivité de m donne $m(\{|f| > 1\}) = 0$ et donc $|f| \leq 1$ p.p.. Ceci donne bien $f \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f\|_\infty \leq 1$.

N.B. Une autre méthode consiste à utiliser le théorème 6.11. Il donne que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a $g_n \to 0$ p.p. (quand $n \to +\infty$). On a donc $f_n \to f$ p.p.. De $\|f_n\|_\infty \leq 1$, on déduit alors $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 6.25 (Convergence en mesure et domination) Cet exercice généralise au cas $p > 1$ l'exercice 4.36. Soit (E, T, m) un espace mesuré et $1 \leq p < +\infty$. On note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.
- Il existe $g \in \mathcal{L}^p$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $\varepsilon > 0$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}).$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \varepsilon\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que $f \in \mathcal{L}^p$.
3. On suppose, dans cette question, que $m(E) < +\infty$.
   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f|^p dm \leq \eta m(E) + \int_{\{|f_n - f|^p > \eta\}} 2^p g^p dm.$$

   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|^p dm = 0$.
   [On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |h| dm \leq \varepsilon.]$$

4. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int |f_n - f|^p dm = 0$. [On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |h| dm \le \varepsilon$.]

Exercice 6.26 (Espace $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^\infty$**)**

Pour $1 \le p \le +\infty$, on note $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans $\mathcal{L}^p$ ou L^p.

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ somme d'un élément de $\mathcal{L}^1$ et d'un élément de $\mathcal{L}^\infty$, c'est-à-dire que $f \in \mathrm{E}$ si il existe $g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty$ t.q. $f = g + h$.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{L}^\infty$ et $f = g + h$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer que $\|f 1_{\mathrm{K}}\|_1 \le \|g\|_1 + \lambda(\mathrm{K})\|h\|_\infty$.

   Pour $f \in \mathrm{E}$, on pose $\mathrm{N}(f) = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty$, avec g et h t.q. $f = g + h$, $g \in \mathcal{L}^1$ et $h \in \mathcal{L}^\infty\}$.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$ t.q. $\mathrm{N}(f) = 0$. Montrer que $f 1_{\mathrm{K}} = 0$ p.p. pour tout compact K de $\mathbb{R}$.

   En déduire que $f = 0$ p.p..
4. Soit $f_1, f_2 \in \mathrm{E}$ t.q. $f_1 = f_2$ p.p.. Montrer que $\mathrm{N}(f_1) = \mathrm{N}(f_2)$

   On note maintenant $\tilde{\mathrm{E}}$ l'ensemble E quotienté par la relation d'équivalence "= p.p.". (Cet espace est souvent noté $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^\infty$.)

   Un élément de $\tilde{\mathrm{E}}$ est donc un ensemble d'éléments de E (deux à deux égaux p.p.).
5. montrer que $\tilde{\mathrm{E}}$ a une structure d'espace vectoriel induite par celle de E.

   Pour $\mathrm{F} \in \tilde{\mathrm{E}}$, on pose $\mathrm{N}(\mathrm{F}) = \mathrm{N}(f)$ où f est un élément de F. (Cette définition est cohérente grâce à la question précédente.)
6. Montrer que N est une norme sur $\tilde{\mathrm{E}}$.
7. Montrer que $\tilde{\mathrm{E}}$ muni de la norme N est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).
8. Soit $1 \le p \le +\infty$. Montrer que L^p s'injecte continûment dans $\tilde{\mathrm{E}}$ (c'est-à-dire que l'application $f \mapsto f$ est linéaire continue de L^p dans $\tilde{\mathrm{E}}$).

   [On pourra commencer par les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.]

Exercice 6.27 (Comparaison des espaces l^p**)** On rappelle que l^p désigne l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < +\infty$. On montre dans cet exercice que si $1 \le p < q$, on a de $l^p \subset l^q$ et que l'injection de l^p in l^q est continue (on munit ici les espaces l^p et l^q de leur norme naturelle). On notera que cette injection est dans le sens contraire de l'injection de L^p dans L^q lorsque la mesure est finie (voir proposition

6.25). On s'intéresse ensuite à l'application de ce résultat aux fonctions constantes par morceaux. On étudie alors le lien entre l^p et L^p pour une mesure bien choisie, et enfin, on donne une condition générale sur une mesure m pour que l'injection de $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ dans $L^q_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ soit vraie si $p \le q$.

Soit $1 \le p < q < +\infty$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q \le 1$.

   Corrigé – *On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|^p \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$ et donc $|a_n| \le 1$. On en déduit que $|a_n|^q \le |a_n|^p$ (car $q > p$) et donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$.*

2. On suppose dans cette question que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < +\infty$.
   Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q < +\infty$ et que $(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q)^{1/q} \le (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p}$. [On pourra commencer par le cas où $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$.]

   Corrigé – *On distingue trois cas.*
   Cas 1. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1$, la première question donne $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q \le 1$.*
   Cas 2. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = \alpha > 0$, On a*

   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\frac{|a_n|}{\alpha^{1/p}}\Big)^p = \frac{1}{\alpha}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 1,$$

   et donc, grâce au premier cas,

   $$\frac{1}{\alpha^{q/p}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\frac{|a_n|}{\alpha^{1/p}}\Big)^q \le 1.$$

   Ce qui donne $(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q)^{1/q} \le \alpha^{1/p} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p}$.
   Cas 3. *Il reste le cas $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p = 0$. Ce cas est facile car il donne $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^q)^{1/q} = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p} = 0$.*

3. On note $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \lambda)$. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est constante sur les intervalles $]i, i+1[$, $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^p$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^q$ et $\|f\|_q \le \|f\|_p$. Cette propriété est-elle encore vraie si $q = +\infty$?

   Corrigé – *On note a_n la valeur de f sur l'intervalle $]n, n+1[$ de sorte que $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 1_{]n,n+1[}$ p.p. et $|f|^r = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^r 1_{]n,n+1[}$ p.p. (pour $r \in [1, +\infty[$). On a donc (par le corollaire 4.18 du théorème de convergence monotone)*

   $$\int |f|^r d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^r \text{ pour } r = p, q.$$

   Le fait que $\|f\|_q \le \|f\|_p$ est alors une conséquence de la deuxième question.
   Cette propriété est encore vraie si $q = +\infty$. En effet, on remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p} = \|f\|_p$ et donc $\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \le \|f\|_p$.

4. On note m la mesure du comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (c'est-à-dire $m(A) = \mathrm{card}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, il existe un isomorphisme (c'est-à-dire une bijection linéaire conservant la norme) entre l^p et $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.
5. Soit (E, T, m) un espace mesuré et, pour $p \in [1, +\infty[$, $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. On suppose que la mesure m satisfait la propriété suivante :

$$\exists \delta > 0 \ : \forall A \in T, \ m(A) \leq \delta \Longrightarrow m(A) = 0. \tag{6.47}$$

   (a) Montrer que si $f \in L^1$ et $\|f\|_1 = 1$, alors $|f| \leq \dfrac{1}{\delta}$ p.p.. *(On pourra introduire l'ensemble* $A = \{|f| > \dfrac{1}{\delta}\}$.*)*
   (b) Soient $p, q \in]1, +\infty[$, $p < q$, montrer que $L^p \subset L^q$ et que l'injection est continue. *(On conseille de procéder ici encore par homogénéité.)*
   (c) Montrer que la mesure de comptage satisfait l'hypothèse (6.47).

Exercice 6.28 (Exemples de v.a. appartenant à L^q**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Soit* $q \in [1, \infty[$*, on a :*
   $$\int_\Omega |X|^q dP = \int_{\mathbb{R}} |x|^q dP_X(x) = \int_0^\infty x^q \lambda \exp(-\lambda x) dx < \infty,$$
   car la fonction $x \mapsto |x|^q \lambda \exp(-\lambda x)$ *est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^+$*. On a donc* $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$*.*

   Soit maintenant $q = \infty$*. Pour tout* $a > 0$*, on a, avec* $A =]a, \infty[$ *:*
   $$P[X > a] = \int_\Omega 1_A(X) dP = \int_{\mathbb{R}} 1_A(x) dP_X(x) = \int_a^\infty \lambda \exp(-\lambda x) dx > 0,$$
   car $\lambda \exp(-\lambda x) > 0$ *pour tout* $x > a$*. Donc* $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$*.*

2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).

   Corrigé – *Il suffit ici de considérer le cas* $q = 1$*. On a :*
   $$\int_\Omega |X| dP = \int_{\mathbb{R}} |x| dP_X(x) \geq \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + c^2} dx \geq \frac{c}{\pi} \int_c^\infty \frac{1}{2x} dx = \infty.$$
   On a donc $X \notin L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, ce qui donne aussi* $X \notin L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pour tout* $q \in [1, \infty]$ *(car* $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P) \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pour* $q > 1$*).*

3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

Corrigé – *On note* $A_k = \{X = k\} = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = k\}$ *et* $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. *Par* σ*-additivité de* P, *on a* $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = 1$. *On a donc* $P(A^c) = 0$.

Soit $q \in [1, \infty[$, *on a :*

$$\int_{\Omega} |X|^q dP = \int_{A} |X|^q dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |X|^q dP = \sum_{k=1}^{\infty} k^q p(1-p)^{k-1} < \infty,$$

car la série de terme général $k^q p(1-p)^{k-1}$ *est convergente (pour le voir, il suffit, par exemple, de remarquer que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q p(1-p)^k}{k^q p(1-p)^{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^q (1-p)}{k^q} = 1-p < 1.$$

On a donc $X \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit maintenant $q = \infty$. *Pour tout* $a > 0$, *on a* $P[X > a] \geq P(A_k) > 0$ *si* $k > a$. *On a donc* $X \notin L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

6.5.2 Espaces de Hilbert, Espace L^2

Exercice 6.29 (Norme et produit scalaire) Soit H un espace vectoriel réel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que si cette norme est induite par un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, alors

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2),\ \forall (u,v) \in H^2.$$

2. Montrer que la norme est induite par un produit scalaire si et seulement si l'identité du parallèlogramme est satisfaite.

Exercice 6.30 (L^p n'est pas un espace de Hilbert si $p \neq 2$) Montrer que $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa norme usuelle) n'est pas un espace de Hilbert si $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$. [Pour $p \neq 2$, chercher des fonctions f et g mettant en défaut l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire l'identité (6.13) page 317.]

Corrigé – *On prend* $f = 1_{]0,1[}$ *et* $g = 1_{]1,2[}$, *de sorte que* $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *(avec la confusion habituelle entre une classe et l'un de ses représentants) et que :*

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,\ \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p \neq 2$, *on a donc* $\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2(2^{\frac{2}{p}}) \neq 4 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$.

L'identité du parallélogramme, c'est-à-dire l'identité (6.13) page 317, n'est donc pas satisfaite (pour $p \neq 2$*), ce qui prouve que, pour* $p \neq 2$, *la norme* $\|\cdot\|_p$ *(sur* $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*) n'est pas induite par un produit scalaire.*

Exercice 6.31 (Séries orthogonales dans L^2**)** Soit H un espace de Hilbert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H deux à deux orthogonaux. Un exemple important est $H = L^2_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ ou (E,T,m) est un espace mesuré. On note $\|\cdot|_H$ la norme dans H.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans H) si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

   Corrigé – *Comme* H *est un espace complet, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est convergente dans* H *si et seulement si la suite des sommes partielles, $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$, est de Cauchy (dans* H*). Cette suite des sommes partielles est de Cauchy si et seulement si elle vérifie :*

   $$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \text{ t.q. } m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_H^2 \leq \varepsilon. \tag{6.48}$$

   Le fait que les f_n soient deux à deux orthogonaux nous donne (théorème de Pythagore) que

   $$\|\sum_{k=n}^{m} f_k\|_H^2 = \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_H^2.$$

   L'assertion 6.48 est donc équivalente à dire que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_H^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), ce qui est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

2. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans H). On note f la somme de cette série. Soit φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f (dans H). (La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est donc commutativement convergente, voir la définition 6.64.)

   Corrigé – *Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge (dans* H*), la question 1 donne que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ est convergente (dans $\mathbb{R}$). On va en déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f dans* H.

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\geq N} \|f_n\|_H^2 \leq \varepsilon$.
   Pour $i \in \{0,\ldots,N\}$, soit $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n_i) = i$. On a alors

   $$n \geq \max\{n_0,\ldots,n_N\} \Rightarrow \|\sum_{p=0}^{n} f_{\varphi(p)} - \sum_{p=0}^{n} f_p\|_H^2 \leq \sum_{p=N}^{\infty} \|f_p\|_H^2 \leq \varepsilon.$$

   Mail il existe aussi m tel que

   $$n \geq m \Rightarrow \|f - \sum_{p=0}^{n} f_p\|_H^2 \leq \varepsilon.$$

   On a donc

   $$n \geq \{m, n_0,\ldots,n_N\} \Rightarrow \|\sum_{p=0}^{n} f_{\varphi(p)} - f\|_H^2 \leq 4\varepsilon.$$

   Ce qui prouve bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\varphi(n)}$ converge aussi vers f dans H.

Exercice 6.32 (Caractérisation des espaces de Hilbert séparables) Soit E un espace de Hilbert (réel) de dimension infinie. Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une base hilbertienne dénombrable de E [l'une des implications a déjà été vue].

Exercice 6.33 (projection sur le cône positif de L^2) Soit (X, T, m) un espace mesuré et $E = L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. On pose $C = \{f \in E, f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.

> **Corrigé** – L^2 *est un e.v., et* $tf + (1-t)g \geq 0$ *p.p.. On a donc* $tf + (1-t)g \in C$, *ce qui prouve que* C *est convexe.*
>
> *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ *t.q.* $f_n \to f$ *dans* L^2 *quand* $n \to +\infty$. *On veut montrer que* $f \in C$ *(pour en déduire que* C *est fermée).*
>
> *Pour tout* $\varphi \in L^2$, *on a* $\int f_n \varphi dm \to \int f\varphi dm$ *(car* $|\int f_n\varphi dm - \int f\varphi dm| \leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\|_2$*).*
>
> *On choisit* $\varphi = f^- \in L^2$. *Comme* $f_n f^- \geq 0$ *p.p., on en déduit* $-\int (f^-)^2 dm = \int f f^- dm \geq 0$, *ce qui prouve que* $f^- = 0$ *p.p. et donc que* $f \geq 0$ *p.p.. On a donc montré que* $f \in C$ *et donc que* C *est fermée.*
>
> *Pour montrer que* C *est fermée, il est aussi possible d'utiliser la réciproque partielle du théorème de convergence dominée (théorème 6.11).*

2. Soit $f \in E$. Montrer que $P_C f = f^+$.

> **Corrigé** – *On a* $f^+ \in C$. *Pour montrer que* $P_C f = f^+$, *on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.49).*
>
> *Soit* $g \in C$, *on a* $(f - f^+ \mid f^+ - g)_2 = -(f^- \mid f^+ - g)_2 = \int f^- g dm \geq 0$ *(on a utilisé ici le fait que* $f^- f^+ = 0$ *p.p.). La proposition 6.49 donne alors* $P_C f = f^+$.

Exercice 6.34 (Exemple de non existence de la projection) Dans cet exercice, construit un espace de Banach réel E, un sous espace vectoriel fermé F de E, $g \in E \setminus F$ (et donc $d(g, F) = \inf\{\|g - f\|_E, f \in F\} > 0\ldots$) tels qu'il n'existe pas d'élément $f \in E$ t.q. $d(g, F) = \|g - f\|_E$.

On prend $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on munit E de la norme habituelle, $\|f\|_E = \max\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$. On pose $F = \{f \in E;\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Enfin, on prend $g \in E$ défini par $g(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$.

1. Montrer que E est un espace de Banach (réel).

> **Corrigé** – *Il est clair que* E *est un e.v. sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\|\cdot\|_E$ *est une norme sur* E, *c'est la norme associée à la convergence uniforme. On montre maintenant que* E *est complet.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe donc* $n(\varepsilon)$ *t.q. :*

$$x \in [0,1],\ n,m \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{6.49}$$

De (6.49) on déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, *la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Il existe donc* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$ *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $x \in [0,1]$. *Pour montrer que la convergence de* f_n *vers* f *est uniforme, il suffit de reprendre (6.49) avec un* x *fixé et un* n *fixé* ($n \geq n(\varepsilon)$) *et de faire tendre* m *verts* ∞, *on obtient :*

$$x \in [0,1],\ n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{6.50}$$

ce qui donne bien la convergence uniforme de f_n *vers* f. *Comme les* f_n *sont continues, on en déduit que* f *est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), c'est-à-dire* $f \in$ E. *Enfin, (6.50) donne* $\|f_n - f\|_{\mathrm{E}} \leq \varepsilon$ *si* $n \geq n(\varepsilon)$ *et donc* $f_n \to f$ *dans* E, *quand* $n \to +\infty$, *ce qui prouve que* E *est complet.*

2. Montrer que F est un sous espace vectoriel fermé de E.

Corrigé – *On note* T *et* S *les applications de* E *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $\mathrm{T}(f) = f(0)$ *et* $\mathrm{S}(f) = \int_0^1 f(x)dx$. *Il s'agit donc d'applications linéaires de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Elles sont également continues car* $|\mathrm{T}(f)| \leq \|f\|_{\mathrm{E}}$ *et* $|\mathrm{S}(f)| \leq \|f\|_{\mathrm{E}}$ *pour tout* $f \in$ E.

On en déduit que F *est un s.e.v. fermé de* E *en remarquant que* $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}\mathrm{T} \cap \mathrm{Ker}\mathrm{S}$.

3. Soit $f \in$ F. Montrer que $\|g - f\|_{\mathrm{E}} \geq 1/2$. [On pourra remarquer que $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \geq \int_0^1 (g-f)(x)dx = 1/2$.]

Corrigé – *Comme* $(g-f)(x) \leq |(g-f)(x)|$ *pour tout* $x \in [0,1]$, *on a bien*

$$\int_0^1 (g-f)(x)dx \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

On remarque ensuite que, puisque $f \in$ F, *on a* $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. *Et donc :*

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 |(g-f)(x)|dx.$$

Puis, comme $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx \leq \|g-f\|_{\mathrm{E}}$, *on en déduit que* $\|g-f\|_{\mathrm{E}} \geq 1/2$.

4. Montrer qu'il n'existe pas d'élément $f \in$ F t.q. $\|g - f\|_{\mathrm{E}} = 1/2$.

Corrigé – *Dans le raisonnement de la question précédente, on remarque que les* $\|g-f\|_{\mathrm{E}} > 1/2$ *sauf si* $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_{\mathrm{E}}$ *et* $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$.

Soit $f \in$ F *t.q.* $\|g-f\|_{\mathrm{E}} = 1/2$. *On a donc* $\int_0^1 (g-f)(x)dx = \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ *et* $\int_0^1 |(g-f)(x)|dx = \|g-f\|_{\mathrm{E}}$. *On en déduit que* $(g-f)(x) = |(g-f)(x)| = \|g-f\|_{\mathrm{E}} = 1/2$ *pour tout* $x \in [0,1]$. *En effet, s'il existe, par exemple,* $x_0 \in [0,1]$ *t.q.* $(g-f)(x_0) < |(g-f)(x_0)|$, *on peut alors trouver (par continuité de* $g - f$*) un intervalle ouvert non*

vide sur lequel $(g-f) < |(g-f)|$ *et on en déduit* $\int_0^1 (g-f)(x)dx < \int_0^1 |(g-f)(x)|dx$ *(un raisonnement analogue donne* $|(g-f)(x)| = \|g-f\|_E$ *pour tout* $x \in [0,1]$*).*

On a donc montré que $f(x) = g(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ *pour tout* $x \in [0,1]$ *ce qui est en contradiction avec* $f(0) = 0$.

5. Montrer que $d(g, F) = 1/2$. [On pourra, par exemple, montrer que $\|g - f_n\|_E \to 1/2$, avec f_n défini par $f_n(x) = -\beta_n x$, pour $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x - 1/n) - \beta_n/n$, pour $x \in [1/n, 1]$, et β_n choisi pour que $f_n \in F$.]

   Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *définie par* $f_n(x) = -\beta_n x$, *pour* $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = (x-1/n) - \beta_n/n$, *pour* $x \in [1/n, 1]$.

   En prenant $\beta_n = (n-1)^2/(2n-1)$ *on a* $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ *et donc* $f_n \in F$. *On remarque ensuite que* $\|f_n - g\|_E = 1/n - \beta_n/n \to 1/2$ *quand* $n \to +\infty$. *On en déduit que* $d(g, F) = 1/2$.

Exercice 6.35 (Lemme de Lax–Milgram) Soit E est un espace de Hilbert réel et a une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$. On note $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire dans E et $\|\cdot\|$ la norme dans E. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ t.q. :

$$|a(u,v)| \le C\|u\|\|v\|, \ \forall u, v \in E \text{ (continuité de } a\text{)},$$

$$a(u,u) \ge \alpha\|u\|^2, \ \forall u \in E \text{ (coercivité de } a\text{)}.$$

Soit $T \in E'$. On va montrer, dans cet exercice, qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$ (ceci est le lemme de Lax-Milgram).

1. On suppose, dans cette question, que a est symétrique. On définit une application bilinéaire, notée $(\cdot \mid \cdot)_a$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $(u \mid v)_a = a(u,v)$. Montrer que $(\cdot \mid \cdot)_a$ est un produit scalaire sur E et que la norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. En déduire qu'il existe un et un seul $u \in E$ t.q. $T(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in E$. [Utiliser le théorème de représentation de Riesz.]

   Corrigé – *L'application* $(\cdot \mid \cdot)_a : E \times E \to \mathbb{R}$ *est symétrique, linéaire par rapport à son premier argument, et* $(u \mid u)_a > 0$ *pour* $u \in E \setminus \{0\}$ *(grâce à la coercivité de a). C'est donc un produit scalaire sur* E.

   La norme induite par ce produit scalaire est équivalente à la norme sur E, *notée* $\|\cdot\|$. *En effet, les hypothèses de continuité et coercivité de a donnent*

   $$\sqrt{\alpha}\|u\| \le \|u\|_a \le \sqrt{C}\|u\|, \forall u \in E.$$

   Comme T *est dans* E′, *c'est-à-dire linéaire et continu pour la norme* $\|\cdot\|$, T *est aussi linéaire et continu pour la norme* $\|\cdot\|_a$. *Or,* E *muni de la norme* $\|\cdot\|_a$ *est un espace de*

Hilbert car la norme $\|\cdot\|_a$ *est induite par un produit scalaire et* E *est complet avec cette norme car il est complet avec la norme* $\|\cdot\|$ *qui est équivalente. On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) avec* E *muni de la norme* $\|\cdot\|_a$. *Il donne qu'il existe un et seul* $u \in \mathrm{E}$ *t.q.* $\mathrm{T}(v) = (u \mid v)_a$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$, *c'est-à-dire qu'il existe un et un seul* $u \in \mathrm{E}$ *t.q. :*

$$\mathrm{T}(v) = a(u,v) \text{ pour tout } v \in \mathrm{E}.$$

2. On ne suppose plus que a est symétrique.

(a) Soit $u \in \mathrm{E}$, Montrer que l'application $v \mapsto a(u,v)$ est un élément de E'. En déduire qu'il existe un et un seul élément de E, notée $\mathrm{A}u$, t.q. $(\mathrm{A}u \mid v) = a(u,v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$.

Corrigé – *L'application* $\psi_u : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, *définie par* $\psi_u(v) = a(u,v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$, *est bien linéaire de* E *dans* $\mathbb{R}$. *Elle est aussi continue car* $|\psi_u(v)| = |a(u,v)| \leq \mathrm{C}\|u\|\|v\|$ *pour tout* v *dans* E. *On a donc* $\psi_u \in \mathrm{E}'$ *(et* $\|\psi_u\|_{\mathrm{E}'} \leq \mathrm{C}\|u\|$*).*

Comme $\psi_u \in \mathrm{E}'$, *le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne qu'il existe un élément de* E, *noté* Au *t.q.* $(\mathrm{A}u \mid v) = \psi_u(v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$, *c'est-à-dire :*

$$(\mathrm{A}u \mid v) = a(u,v) \text{ pour tout } v \in \mathrm{E}.$$

On note, dans la suite A l'application qui à $u \in \mathrm{E}$ associe $\mathrm{A}u \in \mathrm{E}$.

(b) Montrer que A est linéaire continue de E dans E.

Corrigé – *Soit* $u_1, u_2 \in \mathrm{E}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. *On note* $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. *Comme a est linéaire par rapport à son premier argument, on a :*

$$a(w,v) = \alpha_1 a(u_1,v) + \alpha_2 a(u_2,v) \text{ pour tout } v \in \mathrm{E},$$

et donc $(\mathrm{A}w \mid v) = \alpha_1(\mathrm{A}u_1 \mid v) + \alpha_2(\mathrm{A}u_2 \mid v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$, *ou encore*

$$(\mathrm{A}w - \alpha_1 \mathrm{A}u_1 - \alpha_2 \mathrm{A}u_2 \mid v) = 0 \text{ pour tout } v \in \mathrm{E}.$$

On en déduit que $\mathrm{A}w = \alpha_1 \mathrm{A}u_1 - \alpha_2 \mathrm{A}u_2$ *(il suffit de prendre* $v = \mathrm{A}w - \alpha_1 \mathrm{A}u_1 - \alpha_2 \mathrm{A}u_2$ *dans l'égalité précédente) et donc que* A *est une application linéaire de* E *dans* E.

Pour montrer la continuité de A, *on remarque que (pour tout* $u \in \mathrm{E}$*)* $|(\mathrm{A}u \mid v)| = |a(u,v)| \leq \mathrm{C}\|u\|\|v\|$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$. *D'où l'on déduit, en prenant* $v = \mathrm{A}u$, *que* $\|\mathrm{A}u\| \leq \mathrm{C}\|u\|$.

L'application A *est donc linéaire continue de* E *dans* E.

Il est important, pour la suite, de remarquer que la coercivité de a donne :

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (\mathrm{A}u \mid u) \leq \|\mathrm{A}u\|\|u\|, \text{ pour tout } u \in \mathrm{E},$$

et donc :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\mathrm{A}u\|, \text{ pour tout } u \in \mathrm{E}. \tag{6.51}$$

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ est fermé.

Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ *et* $f \in \mathrm{E}$ *t.q.* $f_n \to f$ *dans* E *quand* $n \to +\infty$. *On veut montrer que* $f \in \mathrm{Im}(\mathrm{A})$.

Comme $f_n \in \mathrm{Im}(\mathrm{A})$, *il existe, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathrm{E}$ *t.q.* $\mathrm{A}u_n = f_n$. *L'inégalité (6.51) donne alors, pour tout* $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|f_n - f_m\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant de Cauchy (car convergente), on en déduit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et donc convergente (car* E *est complet).*

Il existe donc $u \in \mathrm{E}$ *t.q.* $u_n \to u$ *(dans* E*) quand* $n \to +\infty$. *D'où l'on déduit, comme* A *est continue, que* $f_n = \mathrm{A}u_n \to \mathrm{A}u$ *(dans* E*) quand* $n \to +\infty$. *On a donc* $f = \mathrm{A}u$, *ce qui prouve que* $f \in \mathrm{Im}(\mathrm{A})$ *et donc que* $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ *est fermé.*

(d) Montrer que $(\mathrm{Im}(\mathrm{A}))^{\perp} = \{0\}$.

Corrigé – *Soit* $u \in (\mathrm{Im}(\mathrm{A}))^{\perp}$. *On a donc* $(\mathrm{A}v \mid u) = 0$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$. *On prend* $v = u$, *on obtient, grâce à la coercivité de a :*

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = (\mathrm{A}u \mid u) = 0,$$

et donc $u = 0$. *Ceci prouve bien que* $(\mathrm{Im}(\mathrm{A}))^{\perp} = \{0\}$.

(e) Montrer que A est bijective et en déduire qu'il existe un et un seul $u \in \mathrm{E}$ t.q. $\mathrm{T}(v) = a(u,v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$.

Corrigé – *L'inégalité (6.51) donne l'injectivité de* A. *Pour montrer la surjectivité de* A, *on remarque que* $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ *est un s.e.v. fermé de* E, *on a donc* $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(\mathrm{A}) \oplus (\mathrm{Im}(\mathrm{A}))^{\perp}$ *(cf. théorème 6.53). Comme* $(\mathrm{Im}(\mathrm{A}))^{\perp} = \{0\}$, *on a donc* $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(\mathrm{A})$, *c'est-à-dire* A *surjective.*

On a bien bien montré que A *est bijective.*

Le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne l'existence d'un et un seul $z \in \mathrm{E}$ *t.q.*

$$\mathrm{T}(v) = (z \mid v),\ \forall v \in \mathrm{E}.$$

D'autre part, la définition de A *donne :*

$$a(u,v) = (\mathrm{A}u \mid v),\ \forall v \in \mathrm{E}.$$

Pour $u \in \mathrm{E}$, *on a donc :*

$$(\mathrm{T}(v) = a(u,v),\ \forall v \in \mathrm{E}) \Leftrightarrow (z = \mathrm{A}u).$$

La bijectivité de A *donne l'existence d'un et d'un seul* $u \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{A}u = z$. *On a donc un et un seul* $u \in \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{T}(v) = a(u,v)$ *pour tout* $v \in \mathrm{E}$.

Exercice 6.36 (Exemple de projection dans L^2**)** On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, par L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathrm{B}(]0,1[),\lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathrm{B}(]0,1[),\lambda)$.

Soit $g \in \mathrm{L}^2$.

1. Soit $v \in \mathrm{L}^2$ et $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ (on rappelle que $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ signifie que ϕ est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, et qu'il existe $\mathrm{K} \subset]0,1[$, K compact, t.q. $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1[\setminus \mathrm{K})$. Montrer que $vg\phi' \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *Comme d'habitude, on va confondre un élément de* L^p *avec l'un de ses représentants.*

Comme $g, v \in \mathrm{L}^2$, *on a* $vg \in \mathrm{L}^1$ *(d'après le lemme 6.5).*
Puis, comme $\phi' \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, *on a* $\phi' \in \mathrm{L}^\infty$ *et donc (par la proposition 6.26)* $vg\phi' \in \mathrm{L}^1$.

On pose $\mathcal{C} = \{v \in \mathrm{L}^2\,;\, v \le 1$ p.p., $\int vg\phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda$, pour tout $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0\}$. (On rappelle que $\phi \ge 0$ signifie $\phi(x) \ge 0$ pour tout $x \in]0,1[$.)

2. Montrer que $\mathcal{C}$ est un convexe fermé non vide de L^2.

Corrigé – — $\mathcal{C} \ne \emptyset$ *car* $0 \in \mathcal{C}$.

— *On montre la convexité de* $\mathcal{C}$. *Soient* $v, w \in \mathcal{C}$ *et* $t \in [0,1]$. *On a* $tv + (1-t)w \in \mathrm{L}^2$ *(car* L^2 *est un e.v.). Du fait que* $v \le 1$ *p.p. et* $w \le 1$ *p.p., on déduit immédiatement (comme* $t \ge 0$ *et* $(1-t) \ge 0$*) que* $tv + (1-t)w \le t + (1-t) = 1$ *p.p.. Enfin, soit* $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0$. *Comme* $t \ge 0$ *et* $(1-t) \ge 0$, *on remarque que*

$$t\int vg\phi' d\lambda \le t\int \phi d\lambda,$$
$$(1-t)\int wg\phi' d\lambda \le (1-t)\int \phi d\lambda.$$

Ce qui donne, en additionnant,

$$\int (tv + (1-t)w)g\phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda.$$

On en déduit que $(tv + (1-t)w) \in \mathcal{C}$ *et donc que* $\mathcal{C}$ *est convexe.*

— *On montre enfin que* $\mathcal{C}$ *est fermée. Soient* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ *et* $v \in \mathrm{L}^2$ *t.q.* $v_n \to v$ *dans* L^2 *quand* $n \to +\infty$. *On veut montrer que* $v \in \mathcal{C}$.

On remarque tout d'abord que, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (inégalité (6.11)), on a :

$$\int v_n w d\lambda \to \int vw d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty, \forall w \in \mathrm{L}^2. \tag{6.52}$$

On prend $w = v1_{v>1} \in \mathrm{L}^2$ *dans (6.52). Comme* $v_n w \le w$ *p.p., on a* $\int v_n w d\lambda \le \int w d\lambda$. *On déduit alors de (6.52) que* $\int vw d\lambda \le \int w d\lambda$ *et donc que* $\int (v-1)v1_{v>1} d\lambda \le 0$. *Comme* $v(v-1)1_{v>1} \ge 0$ *p.p., on a donc nécessairement* $v(v-1)1_{v>1} = 0$ *p.p. et donc* $\lambda(\{v > 1\}) = 0$, *c'est-à-dire* $v \le 1$ *p.p..*

Soit maintenant $\phi \in \mathrm{C}_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \ge 0$. *Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Hölder, on a :*

$$\int v_n g\phi' d\lambda \to \int vg\phi' d\lambda, \text{ quand } n \to +\infty.$$

En effet,

$$\begin{aligned}|\int v_n g\phi' d\lambda - \int vg\phi' d\lambda| &\le \|\phi'\|_\infty \int |v_n - v||g| d\lambda \\ &\le \|\phi'\|_\infty \|v_n - v\|_2 \|g\|_2 \to 0,\end{aligned}$$

quand $n \to +\infty$.

Du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int v_n g \phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda$, on obtient donc, passant à limite quand $n \to +\infty$, que $\int v g \phi' d\lambda \le \int \phi d\lambda$, ce qui montre bien que $v \in \mathcal{C}$.

On a bien montré que $\mathcal{C}$ est fermée.

3. On désigne par $\mathbf{1}$ la fonction constante et égale à 1 sur $]0,1[$. Soit $u \in \mathcal{C}$. Montrer que :
$(\|u-\mathbf{1}\|_2 \le \|v-\mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\int (\mathbf{1}-u)(u-v)d\lambda \ge 0$ pour tout $v \in \mathcal{C})$.

Corrigé – *On remarque d'abord que*

$$(\|u-\mathbf{1}\|_2 \le \|v-\mathbf{1}\|_2 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}.$$

On utilise maintenant la première caractérisation de la projection (proposition 6.49), elle donne que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow ((\mathbf{1}-u \mid u-v)_2 \ge 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}),$$

et donc que

$$u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1} \Leftrightarrow (\int (\mathbf{1}-u)(u-v)d\lambda \ge 0 \text{ pour tout } v \in \mathcal{C}). \tag{6.53}$$

4. Soit $u \in \mathcal{C}$ t.q. $\|u-\mathbf{1}\|_2 \le \|v-\mathbf{1}\|_2$ pour tout $v \in \mathcal{C}$. On suppose que $u, g \in C^1(]0,1[, \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $(ug)'(x) \ge -1$ pour tout $x \in]0,1[$.

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $(ug)'(c) < -1$. Par continuité de $(ug)'$ en c, il existe donc a, b t.q. $0 < a < c < b < 1$ et $(ug)'(x) < -1$ pour tout $x \in]a,b[$.*

On peut construire $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ t.q. $\varphi \ge 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a,b[^c$. une telle fonction φ est obtenue, par exemple, en prenant :

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{2y-(a+b)}{b-a}\right),\ x \in]0,1[, \tag{6.54}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = \exp \tfrac{1}{x^2-1},\ x \in]-1,1[,\\ &\varphi_0(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus]-1,1[. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Comme $u \in \mathcal{C}$, on a, d'après la définition de $\mathcal{C}$ (car φ est un choix possible pour ϕ) :

$$\int_a^b u(x)g(x)\varphi'(x)dx = \int ug\varphi' d\lambda \le \int \phi d\lambda = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Comme ug est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut intégrer par parties sur $[a,b]$ pour obtenir (noter que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$) $\int_a^b -(ug)'(x)\varphi(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$, ou encore :

$$\int_a^b ((ug)'(x)+1)\varphi(x)dx \ge 0.$$

Ce qui impossible car $((ug)'+1)\varphi$ est une fonction continue négative, non identiquement nulle sur $[a,b]$ (car non nulle au point c).

(b) Soit $x \in]0,1[$ t.q. $u(x) < 1$. Montrer que $(ug)'(x) = -1$.

Corrigé – *On raisonne encore par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $c \in]0,1[$ t.q. $u(c) < 1$ et $(ug)'(c) \neq -1$. Comme on sait déjà que $(ug)'(x) \geq -1$ pour tout $x \in]0,1[$, on a donc $(ug)'(c) > -1$.*

Par continuité de u et $(ug)'$ en c, il existe donc a, b, avec $0 < a < c < b < 1$, et $\delta > 0$ t.q. $u(x) \leq 1 - \delta$ et $(ug)'(x) > -1 + \delta$ pour tout $x \in]a,b[$.

On utilise la même fonction φ qu'à la question précédente, c'est-à-dire donnée, par exemple, par (6.54) et (6.55). La propriété importante est que $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ soit t.q. $\varphi \geq 0$, $\varphi(c) > 0$ et $\varphi = 0$ sur $]a,b[^c$.

On va montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$.

On remarque d'abord que $u + \varepsilon\varphi \in L^2$ (pour tout $\varepsilon > 0$). Puis, en prenant $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \frac{\delta}{\|\varphi\|_\infty}$, on a $u + \varepsilon\varphi \leq 1$ p.p.. Enfin, soit $\phi \in C_c^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$, $\phi \geq 0\}$. On a, en utilisant une intégration par parties sur un intervalle compact de $]0,1[$ contenant le support de ϕ :

$$\int ((u + \varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda = -\int (ug)'\phi d\lambda - \varepsilon \int (\varphi g)'\phi d\lambda.$$

En utilisant le fait que $(ug)' \geq -1$ (partout) et $(ug)' > -1 + \delta$ sur $]a,b[$, on en déduit

$$\int ((u + \varepsilon\varphi)g)\phi' d\lambda \leq \int \phi d\lambda - \delta \int_a^b \phi(x)dx - \varepsilon \int_a^b (\varphi g)'\phi d\lambda \leq \int \phi d\lambda,$$

si $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{M}$, avec $M = \max_{x\in[a,b]} |(\varphi g)'(x)| < \infty$ car $(\varphi g)'$ est continue sur $[a,b]$.

En prenant $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, on obtient donc $u + \varepsilon\varphi \in \mathcal{C}$. Comme $u = P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on peut maintenant prendre $v = u + \varepsilon\varphi$ dans la caractérisation de $P_{\mathcal{C}}\mathbf{1}$, on obtient, comme $\varepsilon > 0$:

$$\int_a^b (1 - u(x))\varphi(x)dx = \int (1 - u)\varphi d\lambda \leq 0.$$

Ce qui est impossible car $(1 - u)\varphi$ est une fonction continue positive, non identiquement nulle sur $]a,b[$ (car non nulle en c).

(c) Montrer que u est solution du problème suivant :

$(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0,1[$,

$u(x) \leq 1$, pour tout $x \in]0,1[$,

$(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$.

Corrigé – *On a déjà vu que $(ug)'(x) \geq -1$, pour tout $x \in]0,1[$. Comme $u \in \mathcal{C}$, on a $u \leq 1$ p.p.. Mais, comme u est continue sur $]0,1[$, l'ensemble $\{u > 1\}$ est un ouvert, cet ensemble est donc vide (car un ouvert de mesure de Lebesgue nulle est toujours vide). On a donc $u \leq 1$ partout. Enfin, le fait que $(1 + (ug)'(x))(u(x) - 1) = 0$, pour tout $x \in]0,1[$, découle de la question précédente qui montre justement que $(1 + (ug)'(x)) = 0$ si $u(x) < 1$.*

Exercice 6.37 (Approximation dans L^2) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

Pour $f \in L^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_k f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$T_k f(x) = k \int_{\frac{n(x)}{k}}^{\frac{n(x)+1}{k}} f(t)dt, \tag{6.56}$$

où $n(x)$ est l'entier de $\mathbb{Z}$ tel que $\frac{n(x)}{k} \leq x < \frac{n(x)+1}{k}$ (l'entier n dépend donc de x).

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \in L^2$ (plus précisément, $T_k f \in \mathcal{L}^2$ et on confond alors, comme d'habitude, $T_k f$ avec $\{g \in \mathcal{L}^2,\ g = T_k f \text{ p.p.}\}$) et que $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Corrigé – *Comme* $f\mathbf{1}_{]\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[} \in L^1$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $T_k(x)$ *est bien définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $c_n = k\int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f(t)dt$, *pour* $n \in \mathbb{Z}$, *de sorte que* $T_k(x) = c_n$ *pour tout* $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$.

   $T_k f$ *est mesurable car* $(T_k f)^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}, c_n \in A} [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[\in B(\mathbb{R})$, *pour tout* $A \subset \mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in [\frac{n}{k}, \frac{n+1}{k}[$, *on a (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

   $$(T_k(x))^2 = c_n^2 \leq k \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt.$$

   On en déduit (on utilise ici le premier corollaire du théorème de convergence monotone, corollaire 4.18) :

   $$\int (T_k f)^2 d\lambda = \sum_{n\in Z} \frac{1}{k} c_n^2 \leq \sum_{n\in Z} \int_{\frac{n}{k}}^{\frac{n+1}{k}} f^2(t)dt = \int f^2 d\lambda.$$

   On a donc $T_k f \in L^2$ *et* $\|T_k f\|_2 \leq \|f\|_2$.

2. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*i.e.* f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.

   Corrigé – *Soit* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *sur* $[-a, a]^c$. *Comme* f *est uniformément continue, on a* $T_k f \to f$ *uniformément (sur* $\mathbb{R}$*) quand* $k \to \infty$. *En remarquant que* $T_k f = 0$ *sur* $[-a-1, a+1]^c$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *on en déduit*

   $$\|T_k f - f\|_2^2 = \int (T_k f - f)^2 d\lambda \leq 2(a+1)\|T_k f - f\|_\infty^2 \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $T_k f \to f$ dans L^2 quand $k \to \infty$.
[On pourra utiliser la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, exercice 6.5.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^2, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_2 \le \varepsilon$. Comme T_k est un opérateur linéaire, on a, en utilisant la question 1 :*

$$\|T_k f - f\|_2 \le \|T_k f - T_k\varphi\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2 \le 2\|\varphi - f\|_2 + \|T_k\varphi - \varphi\|_2. \quad (6.57)$$

La question 2 donne l'existence de $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. le dernier terme de (6.57) soit inférieur à ε pour $k \ge k_0$. On a donc $\|T_k f - f\|_2 \le 3\varepsilon$ pour $k \ge k_0$, ce qui prouve que $T_k f \to f$, dans L^2, quand $k \to \infty$.

Exercice 6.38 (Projections orthogonales)

On pose $H = L^2_{\mathbb{R}}(]-1,+1[,\mathcal{B}(]-1,+1[),\lambda)$. (On rappelle que $\mathcal{B}(]-1,+1[)$ est la tribu borélienne de $]-1,1[$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]-1,+1[)$.) Soit $F = \{f \in H$ t.q. $\int_{]-1,+1[} f\,d\lambda = 0\}$. Soit $G = \{f \in H$ t.q. $\int_{]-1,0[} f\,d\lambda = \int_{]0,1[} f\,d\lambda\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Déterminer les sous-espaces $F^\perp$, $G^\perp$ et $F \cap G$.

Corrigé – *Pour $f \in H$, on pose $T(f) = \displaystyle\int_{]-1,+1[} f\,d\lambda$ et $S(f) = \displaystyle\int_{]-1,0[} f\,d\lambda - \int_{]0,1[} f\,d\lambda$.*

L'inégalité de Cauchy–Schwarz entre f et $1_{]-1,+1[}$, pour T, et f et $(1_{]-1,0[} - 1_{]0,1[})$, pour S, montre que $T(f)$ et $S(f)$ sont bien définis pour tout $f \in H$ et que, pour tout $f \in H$:

$$|T(f)| \le \sqrt{2}\|f\|_2,\ |S(f)| \le \sqrt{2}\|f\|_2.$$

On en déduit que T et S sont des éléments de H' et donc que $F = \mathrm{Ker}T$ et $G = \mathrm{Ker}S$ sont des s.e.v. fermés de H.

De plus, comme $T \ne 0$ et $S \ne 0$, on a $\dim(F^\perp) = \dim(G^\perp) = 1$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $v \in F^\perp$, $v \ne 0$ (un tel v existe car $T \ne 0$ et $H = F \oplus F^\perp$). Pour tout $w \in F^\perp$, on a alors $w = w - \frac{T(w)}{T(v)}v + \frac{T(w)}{T(v)}v$. On en déduit que $(w - \frac{T(w)}{T(v)}v) \in F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc que $w \in \mathbb{R}v = vect\{v\}$, ce qui donne $F^\perp = \mathbb{R}v$ et donc $\dim(F^\perp) = 1$. Un raisonnement semblable donne $\dim(G^\perp) = 1$.

Soit f l'élément de H t.q. $f = 1$ p.p.. On a clairement $f \in F^\perp$ (car $(f \mid h)_2 = T(h) = 0$ pour tout $h \in F$) et donc, comme $\dim F^\perp = 1$, $F^\perp = \mathbb{R}f$.

Soit g l'élément de H t.q. $g = 1$ p.p. sur $]-1,0[$ et $g = -1$ sur $]0,1[$. On a clairement $g \in G^\perp$ (car $(g \mid h)_2 = S(h) = 0$ pour tout $h \in G$) et donc, comme $\dim G^\perp = 1$, $G^\perp = \mathbb{R}g$.

Il reste à déterminer $F \cap G$. *Soit* $h \in F \cap G$. *On a donc* $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda$, *car* $h \in G$, *et donc, comme* $h \in F$, $0 = \int_{]-1,+1[} f\, d\lambda = 2\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = 2\int_{]0,1[} h\, d\lambda$, *ce qui donne* $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0$.

Réciproquement, si $h \in H$ *est t.q.* $\int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0$, *on a bien* $S(h) = T(h) = 0$ *et donc* $h \in F \cap G$. *On a donc :*

$$F \cap G = \{h \in H;\ \int_{]-1,0[} h\, d\lambda = \int_{]0,1[} h\, d\lambda = 0\}.$$

2. Calculer, pour $g \in H$, les projections orthogonales $P_F(g)$ et $P_G(g)$ de g sur F et G.

Corrigé – *Soit* $h \in H$. *Comme* $h - P_F h \in F^\perp$, *il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *t.q.* $h - P_F h = \alpha$ *p.p.. Comme* $P_F h \in F$, *on a* $T(P_F h) = 0$. *On en déduit que* $2\alpha = \int_{-1}^{1} h(t)dt$ *et donc*

$$P_F h = h - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(t)dt \text{ p.p..}$$

Comme $h - P_G h \in G^\perp$, *il existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *t.q.* $h - P_G h = \beta$ *p.p. sur* $]-1,0[$ *et* $h - P_G h = -\beta$ *p.p. sur* $]0,1[$. *Comme* $P_G h \in G$, *on a* $S(P_G h) = 0$. *On en déduit que* $2\beta = \int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt$ *et donc*

$$P_G h = h - \tfrac{1}{2}\Big(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt\Big) \text{ p.p. sur }]-1,0[,$$
$$P_G h = h + \tfrac{1}{2}\Big(\int_{-1}^{0} h(t)dt - \int_{0}^{1} h(t)dt\Big) \text{ p.p. sur }]1,0[.$$

Exercice 6.39 (Projection orthogonale dans L^2) On pose $L^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (muni de sa structure hilbertienne habituelle) et, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés, $\alpha < \beta$, $\mathcal{C} = \{f \in L^2;\ \alpha \le f \le \beta \text{ p.p.}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est vide si et seulement si $\alpha\beta > 0$.

Corrigé –
— *Si* $\alpha\beta > 0$ *(c'est-à-dire* α *et* β *non nuls et de même signe), on a alors pour tout* $f \in \mathcal{C}$, $f \ge \gamma = \min(|\alpha|, |\beta|) > 0$ *p.p.. Donc,* $\int f^2 d\lambda \ge \gamma^2 \lambda(\mathbb{R}) = \infty$, *en contradiction avec* $f \in L^2$. *On a donc* $\mathcal{C} = \emptyset$.
— *On suppose maintenant* $\alpha\beta \le 0$. *On a alors* $\alpha \le 0 \le \beta$ *et donc* $0 \in \mathcal{C}$, *ce qui prouve que* $\mathcal{C} \ne \emptyset$.

2. On suppose maintenant que $\alpha\beta \le 0$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une partie convexe fermée non vide de L^2. Soit $f \in L^2$, montrer que $P_{\mathcal{C}} f(x) = \max\{\min\{f(x), \beta\}, \alpha\}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. ($P_{\mathcal{C}} f$ désigne la projection de f sur $\mathcal{C}$.)

Corrigé – *(a) On sait déjà que* $\mathcal{C} \ne \emptyset$. *On montre maintenant que* $\mathcal{C}$ *est convexe. Soient* $f, g \in \mathcal{C}$ *et* $t \in [0,1]$. *On a* $tf + (1-t)g \in L^2$ *car* L^2 *est un e.v.. Puis, du fait que* $\alpha \le f \le \beta$ *p.p. et* $\alpha \le g \le \beta$ *p.p., on déduit immédiatement que* $\alpha \le tf + (1-t)g \le \beta$ *p.p.. Donc,* $tf + (1-t)g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $\mathcal{C}$ est fermée, soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ et $f \in \mathrm{L}^2$ t.q. $f_n \to f$ dans L^2, quand $n \to +\infty$. On peut montrer que $\alpha \le f \le \beta$ p.p. comme dans le corrigé 6.36 (question 2) ou (pour changer de méthode...) de la manière suivante :

D'après le théorème 6.11 (réciproque partielle de la convergence dominée), il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers f, c'est-à-dire il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $\varphi(n) \to \infty$ quand $n \to +\infty$ et $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$. Comme $\alpha \le f_{\varphi(n)} \le \beta$ p.p., on en déduit $\alpha \le f \le \beta$ p.p., et donc que $f \in \mathcal{C}$, ce qui prouve que $\mathcal{C}$ est fermée.

(b) *On montre maintenant que $\mathrm{P}_{\mathcal{C}} f = \max\{\min\{f,\beta\},\alpha\}$.*

On confond comme d'habitude f avec l'un de ses représentants, et on définit g par

$$g = \max\{\min\{f,\beta\},\alpha\} = \alpha 1_{\{f<\alpha\}} + f 1_{\{\alpha\le f\le\beta\}} + \beta 1_{\{f>\beta\}}.$$

g est donc une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Puis, comme $|g| \le |f|$ p.p., on a bien $g \in \mathcal{L}^2$ (et donc $g \in \mathrm{L}^2$ avec la confusion habituelle). Enfin, il est immédiat que $\alpha \le g \le \beta$ p.p.. Donc, $g \in \mathcal{C}$.

Pour montrer que $g = \mathrm{P}_{\mathcal{C}} f$, on utilise la première caractérisation de la projection (proposition 6.49). Soit $h \in \mathcal{C}$, on a :

$$\begin{aligned}(f-g \mid g-h)_2 &= \int (f-g)(g-h)\,d\lambda \\ &= \int (f-\alpha)(\alpha-h)1_{\{f<\alpha\}}\,d\lambda + \int (f-\beta)(\beta-h)1_{\{f>\beta\}}\,d\lambda \ge 0,\end{aligned}$$

car $\alpha \le h \le \beta$ p.p.. On en déduit que $g = \mathrm{P}_{\mathcal{C}} f$.

Exercice 6.40 (L^p n'est toujours pas un Hilbert...) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$.

1. On suppose ici qu'il existe A et B $\in$ T t.q. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, et $0 < m(\mathrm{B}) < +\infty$, $0 < m(\mathrm{A}) < +\infty$. Montrer que L^p est un Hilbert si et seulement si $p = 2$. [On pourra utiliser l'identité du parallélogramme avec des fonctions de L^p bien choisies.]

Corrigé – *On sait déjà que L^2 est un espace de Hilbert.*

On suppose maintenant que $p \ne 2$ (et $p \in [1,\infty]$) et on va montrer que L^p n'est pas un espace de Hilbert. Pour cela, On pose $f = 1_{\mathrm{A}}$ et $g = 1_{\mathrm{B}}$. On a bien $f, g \in \mathrm{L}^p$. On va montrer que l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée pour ces deux fonctions. On distingue les cas $p < \infty$ et $p = \infty$.

Premier cas : *$p < \infty$. On pose $a = m(\mathrm{A})$ et $b = m(\mathrm{B})$ (noter que $a, b \in]0,\infty[$). On a :*

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = (a+b)^{\frac{2}{p}},\ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = a^{\frac{2}{p}} + b^{\frac{2}{p}}.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = (a+b)^{\alpha}(1-h_a(t))$ avec $\alpha = \frac{2}{p}$ et $h_\alpha(t) = t^\alpha + (1-t)^\alpha$, $t = \frac{a}{a+b} \in]0,1[$.

Un étude de la fonction h_α montre que :

- *Si $\alpha \in]0,1[$, on a $h_\alpha(t) > 1$ pour tout $t \in]0,1[$,*
- *Si $\alpha \in]1,\infty[$, on a $h_\alpha(t) < 1$ pour tout $t \in]0,1[$.*

L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

Deuxième cas : *$p = \infty$. Dans ce cas, on a :*

$$\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) = 1, \ \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = 2.$$

On en déduit $\frac{1}{2}(\|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2) - \|f\|_p^2 + \|g\|_p^2 = -1 \neq 0$. L'identité du parallèlogramme n'est donc pas vérifiée pour ces fonctions f et g, ce qui prouve que la norme de L^p n'est pas induite pas un produit scalaire.

2. Montrer que pour $m = \delta_0$ (mesure de Dirac en 0), $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ est un Hilbert pour tout $p \in [1, +\infty]$.

 Corrigé – *Soit $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. On a $\|f\|_p = |f(0)|$ (noter que tous les représentants de f ont la même valeur en 0 car $m(\{0\}) > 0$).*

 Il est facile de voir que la norme de L^p est induite pas un produit scalaire, notée $(\cdot \mid \cdot)$, ce produit scalaire est défini par :

$$(f \mid g) = f(0)g(0), \text{ pour } f, g \in L^p.$$

 L'espace L^p est donc un espace de Hilbert.

Exercice 6.41 (Espace l^2) On note m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $m(A) = \mathrm{card}(A)$ si A est fini et $m(A) = \infty$ si A n'est pas fini.

On note $l^2 = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

1. Montrer que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$.

 Corrigé – *(Noter d'abord que m est bien une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.)*
 Soient $f, g \in \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ t.q. $f = g$ p.p.. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = g(n)$ car $m(\{n\}) = 1 > 0$. On en déduit que $f = g$. Ceci montre bien que chaque élément de l^2 ne contient qu'un seul élément de l'espace $\mathcal{L}^2$.

2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l^2 donne :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2$$

 pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$.

 Corrigé – *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ t.q. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty$ (on peut aussi prendre $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{R}_+$).*

 On définit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ par $f(n) = a_n$ et $g(n) = b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f et g sont mesurables (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$) et on a bien $f, g \in \mathcal{L}^2$ car :

$$\int f^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty \text{ et } \int g^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2 < \infty. \tag{6.58}$$

En effet, pour montrer (6.58), il suffit, par exemple, de remarquer que

$$f^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 1_{\{n\}} \text{ et } g^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^2 1_{\{n\}}$$

et d'utiliser le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors que $fg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$*, c'est-à-dire :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n b_n| < \infty,$$

et que $(f \mid g)_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$*. On en déduit :*

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^2.$$

3. Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, bijective. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. [On pourra commencer par montrer que $\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On peut ordonner l'ensemble des* $\varphi(p)$*,* $p \in \{1,\ldots,n\}$*, selon l'ordre croissant, c'est-à-dire :* $\{\varphi(p),\ p \in \{1,\ldots,n\}\} = \{p_1,\ldots,p_n\}$ *avec* $p_i < p_{i+1}$ *pour tout* $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ *(on utilise ici l'injectivité de* φ*). Comme* φ *prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}^*$*, on a* $p_1 \geq 1$*. On en déduit (par récurrence finie sur* i*) que* $p_i \geq i$*, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$*, et donc :*

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}. \qquad (6.59)$$

On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la question précédente avec $a_p = \frac{\sqrt{\varphi(p)}}{p}$*,* $b_p = \frac{1}{\sqrt{\varphi(p)}}$ *pour* $p = 1,\ldots,n$ *et* $a_p = b_p = 0$ *pour* $p > n$*, on obtient :*

$$(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p})^2 = (\sum_{p=1}^n a_p b_p)^2 \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\varphi(p)}.$$

En utilisant (6.59), on en déduit :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2},$$

et donc $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{\varphi(p)}{p^2} \geq \lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = \infty$.

(Noter que cette démonstration reste vraie lorsque φ *est seulement injective.)*

Exercice 6.42 (Isométrie d'un espace de Hilbert avec l^2) Soit H un espace de Hilbert réel, de dimension infinie et séparable. Soit $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H (une telle base existe, cf. proposition 6.62).

Pour $u \in$ H, on définit $a_u \in l^2$ (l^2 est défini à l'exercice 6.41) par $a_u(n) = (u \mid e_n)_{\mathrm{H}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On montrera tout d'abord que a_u est bien un élément de l^2.)

Montrer que l'application $A : u \mapsto a_u$ (est linéaire et) est une isométrie de H dans l^2, c'est-à-dire que $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$ pour tout $u \in H$.

Montrer que A est bijective (il faut donc montrer que, pour tout $a \in l^2$, il existe $u \in H$ t.q. $a = a_u$).

Corrigé – *La fonction a_u est mesurable de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable car la tribu choisie sur $\mathbb{N}$ est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). En notant m la mesure du dénombrement sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (voir l'exercice 6.41), on a $\int a_u^2 dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u \mid e_n)_H^2$. L'égalité de Bessel (voir la proposition 6.63) donne alors que $a_u \in l^2$ et $\|a_u\|_{l^2} = \|u\|_H$.*

Il est immédiat de voir que l'application $A : u \mapsto a_u$ est linéaire, l'application A est donc une isométrie de H dans l^2 (ceci donne, en particulier, que A est injective). Il reste à montrer que A est surjective.

Soit $a \in l^2$. On note $a_n = a(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2 < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \sum_{p=1}^n a_p e_p$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H car, pour $m > n$, $\|f_m - f_n\|_H^2 = \sum_{p=n+1}^m a_p^2 \le \sum_{p=n+1}^\infty a_p^2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc $u \in H$ t.q. $f_n \to u$, dans H, quand $n \to +\infty$. Le troisième item de la proposition 6.63 page 330 donne alors que $a = a_u$. Ceci montre bien que A est surjective.

Exercice 6.43 (Intégration par parties dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) Soit $u, v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose, dans cette question, que u et u' sont des fonctions de carré intégrable pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. [On pourra commencer par montrer que $u^2(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$, puis montrer que cette limite est nécessairement nulle.]

   Corrigé – *La fonction u est de classe C^1, la fonction u^2 est donc aussi de classe C^1 et sa dérivée est la fonction $2uu'$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

   $$u^2(x) = u^2(0) + \int_0^x 2u(t)u'(t)dt.$$

   Comme $|2uu'| \le u^2 + (u')^2$, la fonction $2uu'$ est intégrable (sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue). l'égalité précédente montre alors que $u^2(x)$ a des limites dans $\mathbb{R}$ quand $x \to \pm\infty$. Plus précisément, on a $\lim_{x\to+\infty} u^2(x) = l$ et $\lim_{x\to-\infty} u^2(x) = m$ avec

   $$l = u^2(0) + \int 2uu' 1_{\mathbb{R}_+} d\lambda \text{ et } m = u^2(0) - \int 2uu' 1_{\mathbb{R}_-} d\lambda.$$

   On montre maintenant que $l = 0$ (un raisonnement analogue donne $m = 0$). Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $l \neq 0$, Comme $\lim_{x\to+\infty} u^2(x) = l$, il existe $A \in \mathbb{R}$ t.q.

   $$x > A \Rightarrow u^2(x) > \frac{|l|}{2}.$$

   On a donc $\int u^2 d\lambda \ge \int_{]A,+\infty[} u^2 d\lambda \ge \int_{]A,+\infty[} \frac{|l|}{2} d\lambda = +\infty$, en contradiction avec le fait u est de carré intégrable. On a donc bien montré que $l = 0$.

2. On suppose, dans cette question, que u, v, u' et v' sont des fonctions de carré intégrable (pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$). Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme u et v sont de classe C^1, une intégration par parties sur l'intervalle $[-n,n]$ donne*

$$\int_{-n}^{n} u(x)v'(x)dx + \int_{-n}^{n} u'(x)v(x)dx = u(n)v(n) - u(-n)v(-n).$$

On peut passer à la limite dans cette égalité quand $n \to +\infty$. On utilise pour cela le théorème de convergence dominée pour les termes du membre de gauche (les fonctions uv' et $u'v$ sont des fonctions intégrables car $|uv'| \le u^2 + (v')^2$ et $|u'v| \le (u')^2 + v^2$) et la première question pour le membre de droite. On obtient bien $\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx$.

3. Donner un exemple pour lequel uv' et $v'u$ sont intégrables (pour le mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$) et

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx \neq -\int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx.$$

Corrigé – *Un exemple possible est donné par $v(x) = 1$ et $u(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien $u, v \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Les fonctions uv' et vu' sont intégrables (uv' est nulle et $v(x)u'(x) = 1/(1+x^2)$) et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} v(x)u'(x)dx = \pi.$$

Exercice 6.44 (Tribu et partition, suite et fin) Cet exercice est la suite de l'exercice 3.37. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et a une partition de Ω. On note $\mathcal{T}(a)$ la tribu engendrée par a (voir l'exercice 3.37). On suppose que la partition a est mesurable, c'est-à-dire que ses atomes sont des éléments de $\mathcal{A}$ (on a donc $\mathcal{T}(a) \subset \mathcal{A}$).

Donner une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{T}(a), \mathrm{P})$ construite à partir des atomes de a.

En déduire l'expression de la projection orthogonale d'une variable aléatoire X appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sur le sous espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{T}(a), \mathrm{P})$.

Exercice 6.45 (Convergence presque sûre et borne L^2 donne convergence L^1) Cet exercice reprend l'exercice 6.21 (pour $q = 2$ et $p = 1$) avec les termes probabilistes et une méthode légèrement différente. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.. On suppose

— $\mathrm{X}_n \to 0$ p.s., quand $n \to +\infty$.

— $E(X_n^2) \le 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $E(|X_n|) \le \varepsilon + \sqrt{P(|X_n| > \varepsilon)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé – *On obtient, avec Cauchy–Schwarz,*

$$E(|X_n|) = \int_{|X_n|\le\varepsilon} |X_n| dP + \int_{|X_n|>\varepsilon} |X_n| dP \le \varepsilon + \sqrt{E(X_n^2)}\sqrt{P(|X_n| > \varepsilon)}.$$

2. Montrer que $X_n \to 0$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$, la convergence p.s. implique la convergence en probabilité. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.*

$$n \ge n_0 \Rightarrow P(|X_n| > \varepsilon) \le \varepsilon^2.$$

Avec la question 1, on a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow E(|X_n|) \le 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $X_n \to 0$ dans L^1.

3. Montrer, en donnant un exemple, que les hypothèses données au début de l'exercice n'entraînent pas les hypothèses du théorème de convergence dominée.

Corrigé – *On peut prendre $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (]0, 1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $X_n = n1_{]1/(n+1),1/n[}$ pour $n \ge 1$.*

Exercice 6.46 (Orthogonalité et v.a.r. indépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes. On suppose que X_n est de carré intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(X_n \mid X_m)_2 = 0$ si $n \ne m$ (On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et $(\cdot \mid \cdot)_2$ le produit scalaire dans L^2). On suppose enfin que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe au plus un entier $n \ge 0$ t.q. $E(X_n) \ne 0$.

Corrigé – *Soit $n \ne m$. Comme X_n et X_m sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables, la proposition 4.59 (deuxième item) donne que X_nX_m est intégrable et*

$$E(X_nX_m) = E(X_n)E(X_m).$$

Comme $E(X_nX_m) = \int_\Omega X_nX_m dP = (X_n \mid X_m)_2 = 0$, on en déduit qu'il est impossible que $E(X_n)$ et $E(X_m)$ soient tous les deux non nuls. On en déduit bien qu'il existe au plus un entier $n \ge 0$ t.q. $E(X_n) \ne 0$.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ est convergente dans L^2.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Var(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf éventuellement un seul, on a donc*

$$Var(X_n) = E(X_n^2) = \int_\Omega X_n^2 dP = \|X_n\|_2^2.$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \|X_n\|_2^2$ est donc convergente. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ est convergente dans L^2, comme cela est démontré dans l'exercice 6.31.

Exercice 6.47 (Identités de Wald)

Cet exercice est la suite de l'exercice 4.53. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$).

1. On suppose, dans cette question, que les v.a.r. $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{\omega \in \Omega,\ N(w) = n\}$ (on note, en général, $A_n = \{N = n\}$) et $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1_{A_n} et Y_n sont des v.a.r. indépendantes.

Corrigé – *Cette question est corrigée dans l'exercice 4.53.*

(b) On suppose aussi que N et X_1 sont de carré intégrable. Montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant les variances et les espérances de N et X_1.

Corrigé – *On sait déjà, par l'exercice 4.53, que* S_N *est intégrable et que* $E(S_N) = E(N)E(X_1)$. *On calcule maintenant* $E(S_N^2)$.

Comme $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_n$ *et que les* A_n *sont disjoints deux à deux, on a* $S_N^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_n^2$ *et donc*

$$E(S_N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{A_n} Y_n^2).$$

Comme 1_{A_n} *et* Y_n *sont des v.a.r. indépendantes, on a donc*

$$E(S_N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{A_n})E(Y_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)E(Y_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} p(\{N = n\})E(Y_n^2).$$

On utilise maintenant l'indépendance des X_k *et le fait que* $E(X_k^2) = E(X_1^2)$ *et* $E(X_k) = E(X_1)$ *(pour tout k), cela donne*

$$E(Y_n^2) = E((\sum_{p=1}^{n} X_p)^2) = E(\sum_{p,q=1}^{n} X_p X_q) = nE(X_1^2) + n(n-1)E(X_1)^2.$$

On en déduit

$$E(S_N^2) = \sum_{n=1}^{\infty} np(\{N = n\})E(X_1^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)p(\{N = n\})E(X_1)^2.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} np(\{N = n\}) = E(N)$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(\{N = n\}) = E(N^2)$, *on obtient*

$$E(S_N^2) = E(N)E(X_1^2) + E(N^2)E(X_1)^2 - E(N)E(X_1)^2.$$

Comme $E(S_N) = E(N)E(X_1)$, *on a, finalement,*

$$\begin{aligned} Var(S_N) = E(S_N^2) - E(S_N)^2 = {} & E(N)E(X_1^2) + E(N^2)E(X_1)^2 \\ & - E(N)E(X_1)^2 - E(N)^2 E(X_1)^2, \end{aligned}$$

et donc

$$Var(S_N) = E(N)Var(X_1) + E(X_1)^2 Var(N).$$

2. On suppose maintenant que $\{N = n\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (on rappelle que $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$). On suppose aussi que N et X_1 sont de carré intégrable et que $E(X_1) = 0$. Montrer que S_N est de carré intégrable et calculer sa variance en utilisant la variance X_1 et l'espérance de N. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 1_{\{N\geq n\}} X_n$ et utiliser l'exercice 6.31.]

Corrigé – *On pose* $V_n = 1_{\{N\geq n\}} X_n$ *de sorte que* $S_N = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} V_n$ *(pour chaque* $\omega \in \Omega$ *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} V_n(\omega)$ *ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls). Pour montrer que* S_N *est de carré intégrable, il suffit de montrer (grâce à l'exercice 6.31) que* $E(V_n V_m) = 0$ *si* $n \neq m$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} E(V_n^2) < +\infty$.

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n \neq m$. *On peut supposer* $n < m$, *on a alors* $1_{\{N\geq n\}} 1_{\{N\geq m\}} = 1_{\{N\geq m\}}$ *et donc*

$$E(V_n V_m) = E(1_{\{N\geq n\}} X_n 1_{\{N\geq m\}} X_m) = E(X_n 1_{\{N\geq m\}} X_m).$$

La première hypothèse de cette question donne que

$$\{N = k\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_k) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_{m-1})$$

pour $1 \leq k < m$. *La v.a.r.* $1_{\{N<m\}}$ *est donc* $\sigma(X_1, \ldots, X_{m-1})$*-mesurable. Comme* $1_{\{N\geq m\}} = 1 - 1_{\{N<m\}}$, *la v.a.r.* $1_{\{N\geq m\}}$ *est donc* $\sigma(X_1, \ldots, X_{m-1})$*-mesurable, ainsi que la v.a.r.* X_n *(car* $n < m$*). Comme la tribu* $\sigma(X_1, \ldots, X_{m-1})$ *est indépendante de la tribu* $\sigma(X_m)$ *(on utilise ici l'indépendance de* $X_1, \ldots, X_m$ *et la proposition 2.60), les v.a.r.* $X_n 1_{\{N\geq m\}}$ *et* X_m *sont indépendantes. Ceci donne (comme* $E(X_m) = E(X_1) = 0$*)*

$$E(X_n 1_{\{N\geq m\}} X_m) = E(X_n 1_{\{N\geq m\}}) E(X_m) = 0.$$

On a donc bien $E(V_n V_m) = 0$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

On sait déjà que la v.a.r. $1_{\{N\geq n\}}$ *est* $\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})$*-mesurable. Les v.a.r.* $1_{\{N\geq n\}}$ *et* X_n *sont donc indépendantes, ce qui donne*

$$E(V_n^2) = E(1_{\{N\geq n\}} X_n^2) = E(1_{\{N\geq n\}}) E(X_n^2) = P(\{N \geq n\}) E(X_n^2) = P(\{N \geq n\}) E(X_1^2).$$

On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E(V_N^2) = E(X_1^2) \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{N \geq n\}) = E(X_1^2) \sum_{n=1}^{+\infty} n P(\{N = n\}) = E(X_1^2) E(N).$$

L'exercice 6.31 donne alors que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ *converge dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *On en déduit que* S_N *est de carré intégrable et que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} V_n$ *converge dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *vers* S_N. *On a donc aussi (comme* $E(V_n V_m) = 0$ *si* $n \neq m$*)*

$$E(S_N^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} E(V_n^2) = E(X_1^2) E(N) = E(N) \mathit{Var}(X_1).$$

N.B. : Le cas $E(X_1) \neq 0$ peut aussi être traité. Il se ramène au cas $E(X_1) = 0$ en considérant $Y_n = X_n - E(X_n)$.

6.5.3 Théorème de Radon-Nikodym et dualité dans L^p

Exercice 6.48 (Fonctions absolument continues) Soit $-\infty < a < b < +\infty$. On admet les 2 résultats suivants :

— Toute fonction monotone définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en presque tout point de $]a,b[$.

— Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x[} d\lambda$. La fonction F est alors dérivable en presque tout point de $]a,b[$ et on a $F' = f$ p.p..

1. (Fonctions monotones.) Soit f une fonction monotone croissante définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et que

$$\int f' 1_{]a,b[} d\lambda \le f(b) - f(a).$$

[On pourra poser $f(x) = f(b)$ pour $x > b$, considérer $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ et remarquer que $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$.]

Corrigé – *On remarque tout d'abord que f est mesurable (de $]a,b[$, muni de la tribu borélienne, dans $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne) car l'image réciproque par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $]a,b[$). Comme $|f|$ est bornée (par $\max(|f(b)|,|f(a)|)$), on a aussi $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$.*

On pose $f(x) = f(b)$ pour $x > b$ (de sorte que f est maintenant monotone croissante, et donc mesurable, de $]a,\infty[$ dans $\mathbb{R}$), et on définit pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction f_n par $f_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ pour $x \in]a,b[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est donc mesurable (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$) positive et (en notant que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ et $f(\cdot+\frac{1}{n}) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$) on a :

$$\int_{]a,b[} f_n d\lambda = f(b) - n\int_{]a,a+\frac{1}{n}[} f d\lambda \le f(b) - f(a) \tag{6.60}$$

Comme f est dérivable p.p., on a $f_n \to f'$ p.p. sur $]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ t.q. $\lambda(]a,b[\setminus A) = 0$ et $f_n(x) \to f'(x)$ pour tout $x \in A$. On pose $g(x) = f'(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ sinon. Le lemme de Fatou appliqué à la suite f_n donne (par (6.60)) que g est mesurable positive (de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$) et

$$\int_{]a,b[} g d\lambda \le f(b) - f(a).$$

On a donc $f' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$ (au sens où l'on confond f' et la classe de g car $f' = g$ p.p.) et

$$\int_{]a,b[} f' d\lambda \le f(b) - f(a).$$

(b) Donner un exemple pour lequel l'inégalité de la question précédente est stricte. (Les courageux pourront chercher un exemple pour lequel f est continue...)

Corrigé – *Un exemple facile est obtenu en prenant $f(x) = 0$ si $x \in [a,\frac{a+b}{2}]$ et $f(x) = 1$ si $x \in]\frac{a+b}{2},b]$. On a alors $f' = 0$ p.p. et $f(b) - f(a) = 1$.*

On peut obtenir un exemple avec f continue en construisant f à partir de l'ensemble de Cantor (f est prise constante sur chacun des intervalles ouverts formant le complémentaire de l'ensemble de Cantor, on a ainsi $f' = 0$ p.p.).

2. (Fonctions absolument continues.)
Une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ, on a $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

(a) Montrer que l'absolue continuité implique l'uniforme continuité.

Corrigé – *Il suffit de prendre $n = 1$, on remarque alors que :*

$$a \le a_1 < b_1 \le b,\ b_1 - a_1 \le \delta \Rightarrow |f(b_1) - f(a_1)| < \varepsilon.$$

Ce qui donne l'uniforme continuité de f.

(b) Montrer que l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme un espace vectoriel.

Corrigé – *Soit f,g deux fonction absolument continues. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ [resp. $\delta_2 > 0$] t.q. pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à δ_1 [resp. δ_2], on a $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ [resp. $\sum_{k=1}^{n} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$]. On en déduit que pour toute famille finie d'intervalles deux à deux disjoints $(]a_k, b_k[)_{1\le k\le n}$ dont la somme des longueurs est inférieure à $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} |(f+g)(b_k) - (f+g)(a_k)| < 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $f + g$ est absolument continue.

Il est facile de voir que αf est absolument continue si f est absolument continue et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ forme donc un espace vectoriel.

3. (Fonctions absolument continues et fonctions monotones.) Une fonction f définie sur $[a,b]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est dite *à variation bornée* s'il existe C t.q. pour toute subdivision du segment $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, on ait $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le C$. Pour une fonction f à variation bornée, on peut définir, pour $a < x \le b$, $V_a^x[f]$ par :

$$V_a^x[f] = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|,\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x,\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

On pose aussi $V_a^a[f] = 0$.

(a) Montrer que toute fonction absolument continue est à variation bornée.

(b) Montrer pour toute fonction f (définie sur $[a,b]$ et) absolument continue, la fonction $x \mapsto V_a^x[f]$ est absolument continue sur $[a,b]$. En déduire que toute fonction absolument continue (définie sur $[a,b]$) est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes (et est donc dérivable en presque tout point de $]a,b[$).

Corrigé – *La question 3 est admise.*

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]a,b[,\mathcal{B}(]a,b[),\lambda)$. Pour $x \in [a,b]$, on pose $F(x) = \int f 1_{]a,x]} d\lambda$. Montrer que F absolument continue.

Corrigé – *Cette question est une conséquence de la proposition 4.50 du cours. Soit* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$(A \in \mathcal{B}(]a,b[),\ \lambda(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

Si $(]a_k,b_k[)_{1\leq k\leq n}$ *est une famille finie d'intervalles deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est inférieure à* δ, *on pose* $A = \bigcup_{k=1}^n]a_k,b_k[$. *On a* $\lambda(A) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \leq \delta$ *et donc* $\int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon$. *On en déduit le résultat désiré car :*

$$\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_{k=1}^n \Big| \int_{]a_k,b_k[} f d\lambda \Big| \leq \sum_{k=1}^n \int_{]a_k,b_k[} |f| d\lambda = \int_A |f| d\lambda \leq \varepsilon.$$

5. Soit F une fonction absolument continue et monotone croissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On prolonge cette fonction sur $\mathbb{R}$ en posant $F(x) = F(a)$ si $x < a$ et $F(x) = F(b)$ si $x > b$. Une version étendue du théorème de Carathéodory (cette version étendue est donnée par le théorème de Lebesgue-Stieltjes, théorème 2.63, pour ce résultat il suffit de F continue croissante) donne l'existence d'une (et une seule) mesure m_F sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $m_F(]\alpha,\beta[) = F(\beta) - F(\alpha)$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

(a) Montrer que m_F est absolument continue par rapport à λ. [Utiliser la régularité de λ et l'absolue continuité de F.]

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda(A) = 0$. *On veut montrer que* $m_F(A) = 0$ *(ceci donnera bien que* m_F *est absolument continue par rapport à* λ*).*

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* F *est absolument continue sur* $[a,b]$, *il existe* $\delta > 0$ *t.q. pour toute famille finie d'intervalles (de* $[a,b]$*) deux à deux disjoints* $(]a_k,b_k[)_{1\leq k\leq n}$ *dont la somme des longueurs est inférieure à* δ, *on a* $\sum_{k=1}^n |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. *Comme* F *est constante et égale à* $F(a)$ *sur* $]-\infty,a]$ *et constante et égale à* $F(b)$ *sur* $[b,+\infty[$, *cette propriété est aussi vrai si les intervalles sont des intervalles de* $\mathbb{R}$ *non nécessairement inclus dans* $[a,b]$.

Par la régularité de λ, *il existe un ouvert* $O \supset A$ *t.q.* $\lambda(O) \leq \delta$. *Cet ouvert* O *peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints*

deux à deux, $O = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ *(avec éventuellement* $a_k = b_k$ *pour certaines valeurs de k). Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \le \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \lambda(O) \le \delta$ *et donc :*

$$m_F(\bigcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k[) = \sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k)) \le \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers l'infini, la continuité croissante de m_F *donne :*

$$m_F(O) = \lim_{n\to+\infty} m_F(\bigcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k[) \le \varepsilon,$$

et donc $m_F(A) \le \varepsilon$ *(car* $A \subset O$*). Comme* $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit, on en déduit bien* $m_F(A) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe $g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $F(\beta) - F(\alpha) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Montrer que $g = F'$ p.p. sur $]a, b[$.

Corrigé – *Comme* m_F *est absolument continue par rapport à* λ*, le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78)*
donne l'existence de $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q.* $m_F = g\lambda$*. On a donc, pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, avec* $\alpha < \beta$ *:*

$$F(\beta) - F(\alpha) = m_F(]\alpha, \beta[) = \int g 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda.$$

En faisant tendre α *vers* $-\infty$ *et* β *vers* $+\infty$*, on en déduit* $\int g d\lambda = F(b) - F(a) < \infty$ *et donc* $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ *(au sens de la confusion habituelle, c'est-à-dire où il existe* $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), d\lambda)$ *t.q.* $g = h$ *p.p.).*

Pour tout $x \in [a, b]$*, on a* $F(x) = F(a) + \int g 1_{]a,x[} d\lambda$*. Le deuxième résultat admis donné au début de l'énoncé donne donc que* F *est dérivable p.p. sur* $]a, b[$ *et* $F' = g$ *p.p. sur* $]a, b[$.

6. Soit F une fonction absolument continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que F est dérivable en presque tout point de $]a, b[$, que $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ et que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Corrigé – *D'après la question 3-(b), la fonction* F *est la différence de deux fonctions absolument continues monotones croissantes, notées* F_1 *et* F_2*. On peut alors appliquer la question 5-(b) à* F_1 *et* F_2*, elle donne que* F_1 *et* F_2 *sont dérivables p.p. sur* $]a, b[$*, que* $F_1', F_2' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ *et que, pour tout* $x \in [a, b]$ *:*

$$F_1(x) - F_1(a) = \int F_1' 1_{]a,x[} d\lambda, \; F_2(x) - F_2(a) = \int F_2' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Comme $F = F_1 - F_2$*, on en déduit que* F *est dérivable p.p. sur* $]a, b[$*, que* $F' \in L^1_{\mathbb{R}}(]a, b[, \mathcal{B}(]a, b[), \lambda)$ *et que, pour tout* $x \in [a, b]$ *:*

$$F(x) - F(a) = \int F' 1_{]a,x[} d\lambda.$$

Exercice 6.49 (Décomposition d'une mesure) Soit $d > 1$ et m une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m(\mathbb{R}^d) < +\infty$. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On pose

$$\alpha = \sup\{m(\mathrm{C}), \mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } \lambda_d(\mathrm{C}) = 0\},$$

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ et $\alpha = m(\mathrm{C})$.

   Corrigé – *Soit* $(\mathrm{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *t.q.* $\lambda_d(\mathrm{C}_n) = 0$ *pour tout n et*
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{C}_n) = \alpha.$$
   On pose $\mathrm{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_n$. *On a donc* $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ *(par σ-sous additivité de* λ_d*) et* $m(\mathrm{C}) = \alpha$ *(par monotonie de m et définition de α).*

Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ et $\alpha = m(\mathrm{C})$.

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\nu(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ et $\mu(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c)$.

2. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et que ν est étrangère à λ_d.

   Corrigé – *Comme* $m(\emptyset) = 0$, *on a aussi* $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. *La σ-additivité de m donne la σ-additivité de ν et μ. Ceci prouve que μ et ν sont des mesures.*

   Comme $\lambda_d(\mathrm{C}) = 0$ *et* $\nu(\mathrm{C}^c) = m(\mathrm{C} \cap \mathrm{C}^c) = 0$, *les mesures ν et* λ_d *sont étrangères.*

3. Montrer que μ est absolument continue par rapport a λ_d. En déduire qu'il existe une fonction f borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $m = f\lambda_d + \nu$.

   Corrigé – *Soit* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *t.q.* $\lambda_d(\mathrm{B}) = 0$. *On pose* $\mathrm{D} = \mathrm{C} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}^c)$. *On a donc* $0 \le \lambda_d(\mathrm{D}) \le \lambda_d(\mathrm{C}) + \lambda_d(\mathrm{B}) = 0$ *et donc* $\alpha = m(\mathrm{C}) \le m(\mathrm{D}) \le \alpha$, *ce qui prouve que* $m(\mathrm{D}) = \alpha$. *Comme* $m(\mathrm{D}) = m(\mathrm{C}) + m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}^c) = \alpha + m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}^c)$, *on a donc* $m(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}^c) = 0$, *c'est-à-dire* $\mu(\mathrm{B}) = 0$ *(on a utilisé ici que fait que* $\alpha < +\infty$, *ce qui est dû au fait que m est une mesure finie). On a ainsi montré que* $\mu << \lambda_d$. *On peut maintenant appliquer le théorème de Radon–Nikodym (théorème 6.78), il donne l'existence d'une fonction f borélienne de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *t.q.* $\mu = f\lambda_d$.

   Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, *on a* $m(\mathrm{A}) = m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + m(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}^c) = \nu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{A})$. *On a donc* $m = \mu + \nu = f\lambda_d + \nu$.

   N.B. Dans ce corrigé, on a essentiellement repris la démonstration de la proposition 2.30 (qui considère un cas plus général) et utilisé pour conclure le théorème de Radon-Nikodym.

Exercice 6.50 (Dualité L^1-L^∞ par Radon-Nikodym) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini et $\mathrm{T} \in (\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))'$. On suppose que T est positive, c'est-à-dire que, pour $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, $f \ge 0$ p.p. implique $\mathrm{T}(f) \ge 0$.

1. Pour $A \in T$, on pose $\mu(A) = T(1_A)$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une mesure finie sur T.

   Attention, il y a toujours cette confusion malheureuse de notations, la même lettre T désigne la tribu sur E et un élément de $(L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m))'$.

   On note $L^r = L^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (pour $r = 1$ et $r = \infty$).

   Corrigé – *Soit* $A \in T$ *(tribu sur* E*), comme* m *est une mesure finie, on a* $1_A \in \mathcal{L}^1$ *(et donc* $1_A \in L^1$ *en confondant un élément de* $\mathcal{L}^1$ *avec sa classe dans* L^1*). On peut définir* $\mu(A)$ *par* $T(1_A)$.

   Pour montrer que μ *est une mesure sur* T, *on remarque tout d'abord que* $\mu(\emptyset) = T(1_\emptyset) = T(0) = 0$. *Puis, soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *t.q.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$. *On pose* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *En utilisant le théorème de convergence dominée, on remarque que* $\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n} \to 1_A$ *dans* L^1 *quand* $N \to \infty$ *(en effet, on a bien une convergence p.p. et une domination par* 1_E *qui est intégrable). Comme* $T \in (L^1)'$, *on a donc* $\sum_{n=0}^{N} T(1_{A_n}) = T(\sum_{n=0}^{N} 1_{A_n}) \to T(1_A)$ *quand* $N \to \infty$. *Avec la définition de* μ, *on en déduit :*

   $$\sum_{n=0}^{N} \mu(A_n) \to \mu(A) \text{ quand } N \to \infty.$$

   Ce qui montre bien que μ *est une mesure sur* T.

   Pour montrer que μ *est finie, il suffit de remarquer que* $\mu(E) = T(1_E) \in \mathbb{R}$ *(noter que* $1_E \in \mathcal{L}^1$*).*

2. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $T(1_A) = \int g 1_A dm$ pour tout $A \in T$.

   Corrigé – *Soit* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$. *On a donc* $1_A = 0$ *p.p.. On en déduit que* $\mu(A) = T(1_A) = 0$ *(la fonction* 1_A *est un élément de la classe de* 0 *dans* L^p*).*

   La mesure μ *est donc absolument continue par rapport à la mesure* m. *On peut appliquer le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78), il donne l'existence de* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q. :*

   $$T(1_A) = \mu(A) = \int g 1_A dm \text{ pour tout } A \in T. \tag{6.61}$$

3. Montrer que $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ (plus précisément, il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ t.q. $h = g$ p.p.). [On pourra montrer que $\|g\|_\infty \leq \|T\|_{(L^1)'}$ en choisissant bien A dans la formule trouvée à la question précédente.]

   Corrigé – *On prend* $A = \{g > \|T\|_{(L^1)'}\}$. *Si* $m(A) > 0$, *on a, avec (6.61), en remarquant que* $\|1_A\|_1 = m(A)$ *:*

   $$\|T\|_{(L^1)'} m(A) < \int g 1_A dm = T(1_A) \leq \|T\|_{(L^1)'} m(A),$$

ce qui est impossible. On a donc $m(A) = 0$, ce qui prouve que $g = h$ p.p. avec h définie par $h = g$ sur A^c et $h = 0$ sur A. Comme $h \in \mathcal{L}^\infty$, on a donc $g \in L^\infty$ (au sens où il existe $h \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $h = g$ p.p.).

On a aussi montré que $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$.

4. Montrer que $T(f) = \int gf\,dm$ pour tout $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Corrigé – *Grâce à (6.61), on a, pour tout $f = 1_A$ avec $A \in T$:*

$$T(f) = \int gf\,dm. \tag{6.62}$$

Par linéarité de T (sur L^1) et par linéarité de l'intégrale, on en déduit que (6.62) est encore vraie si $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1$ (on confond encore f et sa classe).

Puis, si $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. Comme $f \in \mathcal{L}^1$ et $gf \in \mathcal{L}^1$, le théorème de convergence dominée donne $f_n \to f$ dans L^1 et $gf_n \to gf$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (noter que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par f et $(gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par gf). En écrivant (6.62) avec $f = f_n$ et en faisant $n \to +\infty$, on en déduit (6.62). L'égalité (6.62) est donc vraie pour tout $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit enfin $f \in L^1$ (on confond f avec l'un de ses représentants). On écrit alors (6.62) pour $f = f^+ \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$ et $f = f^- \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$. En faisant la différence on en déduit (6.62).

L'égalité (6.62) est donc vraie pour tout $f \in L^1$.

Exercice 6.51 (Dualité L^p-L^q pour $p < 2$) L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème de dualité 6.70 dans le cas $p < 2$.. Soit $(E, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré $\sigma-$fini et $1 \le p < 2$. On pose $q = p/(p-1)$ et on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ (pour $r = p$, $r = q$ et $r = 2$). Soit $T \in (L^p)'$.

1. On considère d'abord le cas où $m(E) < +\infty$.

(a) Montrer que $L^2 \subset L^p$ et que l'injection canonique [1] de L^2 dans L^p est continue.

Corrigé – *Cette question est faite dans la proposition 6.25 page 310. En particulier, l'inégalité (6.9) donne $\|f\|_p \le C\|f\|_2$ pour tout $f \in L^2$ avec C ne dépendant que de p et $m(E)$. En fait, si $m(E) > 0$, le plus petit C possible dans cette inégalité est $C = (m(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ (voir la remarque 6.27).*

(b) Montrer qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int fg\,dm$ pour tout $f \in L^2$.

1. On rappelle que l'injection canonique d'un ensemble G contenu dans un ensemble F est la restriction de l'application identité à G. Pour montrer la continuité de l'injection d'un espace vectoriel G muni d'une norme $\|\cdot\|_G$ inclus dans un espace vectoriel normé F muni d'une norme $\|\cdot\|_F$, il suffit donc de montrer qu'il existe $C \ge 0$ tel que $\|u\|_F \le C\|u\|_G$ pour tout $u \in G$.

Corrigé – *On appelle* S *la restriction de* T *a* L^2. *La question précédente montre que* S *est bien défini est que* $S \in (L^2)'$. *Comme* L^2 *est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz (théorème 6.56) donne l'existence (et l'unicité) de* $g \in L^2$ *t.q.* $S(f) = (f \mid g)_2 = \int f g dm$ *pour tout* $f \in L^2$. *Comme* $S = T$ *sur* L^2, *on a donc bien :*

$$T(f) = \int f g dm \text{ pour tout } f \in L^2. \tag{6.63}$$

(c) Montrer que la fonction g, trouvée à la question précédente, appartient à L^q [distinguer les cas $p > 1$ et $p = 1$. Dans le cas $p > 1$, on pourra considérer les fonctions $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}}$. Dans le cas $p = 1$, prendre $f = sgn(g) 1_A$ où $A = \{|g| > \|T\|_{(L^p)'}\}$.]

Corrigé – *Dans toute la suite, on posera aussi* $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^r_{\mathbb{R}}(E, \mathcal{T}, m)$ *(pour* $r = p$, $r = q$ *et* $r = 2$*).*

Cas $p > 1$**.** *Dans ce cas, on a* $2 < q < \infty$. *On confond, comme d'habitude,* g *avec l'un de ses représentants, de sorte que* $g \in \mathcal{L}^2$. *On pose alors* $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g| \le n\}}$. *La fonction* f_n *est mesurable (comme produit de fonctions mesurables et bornée, on a donc* $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^p$.

On peut donc prendre $f = f_n$ *dans (6.63), on obtient* $\int f_n g dm = T(f_n)$ *et donc, en notant* $B_n = \{|g| \le n\}$ *:*

$$\int_{B_n} |g|^q dm = T(f_n) \le \|T\|_{(L^p)'} \|f_n\|_p.$$

Comme $\|f_n\|_p^p = \int_{B_n} |g|^{p(q-1)} dm = \int_{B_n} |g|^q dm$, *on en déduit :*

$$\left(\int_{B_n} |g|^q dm\right)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|_{(L^p)'}. \tag{6.64}$$

On remarque maintenant que $|g|^q 1_{B_n} \uparrow |g|^q$ *quand* $n \to +\infty$. *On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite* $(|g|^q 1_{B_n})_{n \in \mathbb{N}}$, *l'inégalité (6.64) donne alors :*

$$\left(\int |g|^q dm\right)^{\frac{1}{q}} \le \|T\|_{(L^p)'}.$$

On a donc $g \in \mathcal{L}^q$ *(et* $g \in L^q$ *en confondant* g *avec sa classe d'équivalence dans* L^q*) et* $\|g\|_q \le \|T\|_{(L^p)'}$.

Cas $p = 1$**.** *Dans ce cas, on a* $q = \infty$. *On confond aussi* g *avec l'un de ses représentants, de sorte que* $g \in \mathcal{L}^2$. *On pose maintenant* $A = \{|g| > \|T\|_{(L^1)'}\}$ *et* $f = sgn(g) 1_A$. *La fonction* f *est donc étagée et on a* $f \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$.

On obtient alors, avec (6.63) :

$$\int_A |g| dm = \int f g dm = T(f) \le \|T\|_{(L^1)'} \|f\|_1 = \|T\|_{(L^1)'} (m(A)). \tag{6.65}$$

Or, si $m(A) > 0$, *on a (par la définition de* A*),* $\int_A |g| dm > \|T\|_{(L^1)'} m(A)$, *en contradiction avec (6.65). On a donc* $m(A) = 0$, *ce qui donne* $g \in \mathcal{L}^\infty$ *(et* $g \in L^\infty$ *en confondant* g *avec sa classe d'équivalence dans* L^∞*) et* $\|g\|_\infty \le \|T\|_{(L^1)'}$.

(d) Si $f \in L^p$, montrer que $f_n = f 1_{\{|f|\le n\}} \in L^2$. En déduire que il existe $g \in L^q$ t.q. $T(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in L^p$.

Corrigé – *La fonction g recherchée est, bien sûr, celle trouvée dans les questions précédentes.*

Soit $f \in L^p$. On confond f avec l'un de ses représentants, de sorte que $f \in \mathcal{L}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{\{|f|\le n\}}$. La fonction f_n est donc mesurable (comme produit de fonctions mesurables) et bornée, donc $f_n \in \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^2$. On peut donc prendre $f = f_n$ dans (6.63), on obtient :

$$T(f_n) = \int f_n g dm \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (6.66)$$

Le théorème de convergence dominée dans L^p (théorème 6.9) donne que $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien p.p. vers f et est dominée par $|f| \in L^p$). Comme $T \in (L^p)'$, on a donc $T(f_n) \to T(f)$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, comme $g \in L^q$, on a $\int f_n g dm \to \int f g dm$ quand $n \to +\infty$ (en effet, l'inégalité de Hölder donne $|\int f_n g dm - \int f g dm| \le \|f_n - f\|_p \|g\|_q$). On déduit donc de (6.66), quand $n \to +\infty$, que $T(f) = \int f g dm$.

2. On considère maintenant le cas où $m(E) = +\infty$. Comme m est σ-finie, on peut écrire $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, avec $An \subset A_{n+1}$, $A_n \in \mathcal{T}$ et $m(A_n) < +\infty$. On note $\mathcal{T}_n = \{A \in \mathcal{T}, A \subset A_n\}$, $m_n = m_{|\mathcal{T}_n}$ et $L^r(m_n) = L^r_{\mathbb{R}}(A_n, \mathcal{T}_n, m_n)$ ($r = p$ ou q).

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $f \in L^p(m_n)$, on pose $T_n(f) = T(\tilde{f})$ avec $\tilde{f} = f$ p.p. sur A_n et $\tilde{f} = 0$ p.p. sur $(A_n)^c$. Montrer que $T_n \in (L^p(m_n))'$ et qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n, \ \forall f \in L^p(m_n).$$

Corrigé – *On a déjà vu que $\mathcal{T}_n$ est une tribu sur A_n (tribu trace) et que m_n est une mesure sur $\mathcal{T}_n$ (mesure trace, voir l'exercice 2.17 par exemple).*

La définition de T_n est cohérente car, si $f \in L^p(m_n)$, on confond f avec l'un de ses représentants et la fonction $\tilde{f}$ est alors p.p. égale à f prolongée par 0 hors de A_n, qui est bien un élément de $\mathcal{L}^p$. On a donc $\tilde{f} \in L^p$ (avec la confusion habituelle) et $T(\tilde{f})$ est bien défini (il ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de f).

On remarque aussi que T_n est linéaire et que, pour $f \in L^p(m_n)$,

$$|T_n(f)| = |T(\tilde{f})| \le \|T\|_{(L^p)'} \|\tilde{f}\|_{L^p} = \|T\|_{(L^p)'} \|f\|_{L^p(m_n)}.$$

Donc, $T_n \in (L^p(m_n))'$ et $\|T_n\|_{(L^p(m_n))'} \le \|T\|_{(L^p)'}$. Comme $m_n(A_n) = m(A_n) < \infty$, on peut alors utiliser la première partie, elle donne qu'il existe $g_n \in L^q(m_n)$ t.q. :

$$T_n(f) = \int f g_n dm_n, \ \forall f \in L^p(m_n).$$

La première partie donne aussi :

$$\|g_n\|_{\mathrm{L}^q(m_n)} \leq \|\mathrm{T}_n\|_{(\mathrm{L}^p(m_n))'} \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p(m))'}. \tag{6.67}$$

On utilise $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les questions suivantes.

(b) Montrer que si $m \geq n$, $g_n = g_m$ p.p. sur A_n.

Corrigé – *Soit $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathcal{T}, m)$ t.q. $f = 0$ p.p. sur A_n^c. On note f_n la restriction de f à A_n et f_m la restriction de f à A_m. En confondant, comme d'habitude, un élément de L^p avec l'un de ses représentants, on a $f_n \in \mathrm{L}^p(m_n)$, $f_m \in \mathrm{L}^p(m_m)$ et $\mathrm{T}_n(f_n) = \mathrm{T}_m(f_m) = \mathrm{T}(f)$. Donc,*

$$\int f_n g_n dm_n = \int f_m g_m dm_m.$$

Comme $f_n = f_m = f$ sur A_n et que m_n est aussi la restriction de m_m sur A_n, on a donc :

$$\int f_n(g_n - g_m)dm_n = 0.$$

En prenant $f = \mathrm{sign}(g_n - g_m)1_{\{g_n \neq g_m\}}$ sur A_n et $f = 0$ sur A_n^c (on a ici choisi des représentants pour g_n et g_m), on en déduit $g_n = g_m$ m_n-p.p. sur A_n, c'est-à-dire $g_n = g_m$ p.p. sur A_n, car m_n est la restriction de m sur A_n (p.p. est alors pris au sens m-p.p.).

(c) On définit $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n.

i. Montrer que $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E})$. (Distinguer les cas $q < +\infty$ et $q = +\infty$.)

Corrigé – *Plus précisément, on peut choisir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ un représentant de g_n de manière à avoir $g_n = g_m$ sur tout A_n pour $m \geq n$. On peut alors définir $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par $g = g_n$ sur A_n. La fonction g est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (car g_n est mesurable de A_n dans $\mathbb{R}$).*

Cas $p > 1$**.** *(c'est-à-dire $q < \infty$). Dans ce cas, on remarque que $h_n \uparrow |g|$ quand $n \to +\infty$ avec h_n défini par $h_n = |g_n|$ sur A_n et $h_n = 0$ sur A_n^c. Le théorème de convergence monotone donne alors :*

$$\int |g|^q dm = \lim_{n\to+\infty} \int h_n^q dm = \lim_{n\to+\infty} \int |g_n|^q dm_n.$$

Comme $\int |g_n|^q dm_n \leq \|\mathrm{T}\|^q_{(\mathrm{L}^p)'}$ (d'après 6.67), on en déduit que $g \in \mathcal{L}^q$ (et $\|g\|_q \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$). Donc, $g \in \mathrm{L}^q$ (en confondant g avec sa classe).

Cas $p = 1$**.** *(c'est-à-dire $q = \infty$). Dans ce cas, on a, par (6.67), $\|g_n\|_{\mathrm{L}^\infty(m_n)} \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
On en déduit que $\|g\|_\infty \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$ (car $\{g > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{g_n > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}\}$). Donc, $g \in \mathrm{L}^\infty$ (en confondant g avec sa classe).

ii. Montrer que $\mathrm{T}(f) = \int f g dm$, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$.

Corrigé – *Soit $f \in L^p$, on pose $f_n = f 1_{A_n}$. D'après théorème de convergence dominé dans L^p (théorème 6.9), on a $f_n \to f$ dans L^p quand $n \to +\infty$. Donc :*

$$T(f_n) \to T(f) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.68}$$

Or, $T(f_n) = T_n(h_n)$, où h_n est la restriction de f_n à A_n. On remarque alors que

$$T_n(h_n) = \int g_n h_n dm_n = \int g f_n dm.$$

Comme $g \in L^q$, l'inégalité de Hölder donne que $\int g f_n dm. \to \int g f dm$ quand $n \to +\infty$ (car $|\int g f_n dm. - \int g f dm| \le \|g\|_q \|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$).

On a donc $T(f_n) = T_n(h_n) \to \int g f dm$ quand $n \to +\infty$, ce qui, avec (6.68) donne $T(f) = \int f g dm$.

Exercice 6.52 (Démonstration du théorème de dualité $L^p - L^q$)

L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème 6.70. Pour $1 \le p \le +\infty$, $(1/p) + (1/q) = 1$ et m σ-finie (pour le cas $p = 1$), la proposition 6.69 donne l'injection classique de $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ dans $(L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$. On montre dans cet exercice la surjectivité de cette injection de $L^q_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ dans $(L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m))'$ pour $1 \le p < +\infty$, $(1/p) + (1/q) = 1$ et m σ-finie.

Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de T, disjoints deux à deux, telle que $m(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n$. (L'existence de cette famille est due au fait que m est σ-finie.) On pose aussi $B_n = \cup_{p=1}^n A_p$.

Soient $p \in [1, +\infty[$ et T une forme linéaire continue sur $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Dans toute la suite, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (pour $1 \le r \le +\infty$) et on confondra, comme d'habitude,un élément de $\mathcal{L}^r$ avec sa classe dans L^r.

Partie 1, p = 2

1. Justifier avec un théorème du cours qu'il existe $g \in L^2$ t.q. $T(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^2$.

   Corrigé – *L'existence de g est donnée par le théorème de représentation de Riesz (Théorème 6.56) pour l'espace de Hilbert L^2.*

Partie 2, 1 ≤ p < 2

2. On pose $r = 2p/(2 - p)$. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ déléments de $\mathbb{R}_+^\star$ telle que la fonction ψ définie par $\psi = \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} a_n 1_{A_n}$ appartienne à L^r.

Corrigé –
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ (d'élements de $\mathbb{R}_+^\star$) doit être que telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r m(A_n) < \infty$. Il suffit pour cela de prendre, par exemple, $a_n > 0$ t.q. $a_n^r m(A_n) \le 1/n^2$. Un choix possible est $a_n = 1$ si $m(A_n) = 0$ et $a_n = (1/(n^2 m(A_n)))^{1/r}$ si $m(A_n) > 0$.

Dans toute la suite de cette partie, ψ désigne une fonction particulière de la forme donnée dans la question 2.

3. Pour $h \in L^2$, on pose $S(h) = T(\psi h)$.

(a) Montrer que S est bien définie (c'est-à-dire que $\psi h \in L^p$ pour tout $h \in L^2$) et est une application linéaire continue de L^2 dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *L'inégalité de Hölder entre $2/p$ et son conjugué (qui est $2/(2-p)$) donne*

$$\int (\psi h)^p dm \le (\int \psi^{2p/(2-p)})^{(2-p)/2}(\int h^2)^{p/2} = \|\psi\|_r^p \|h\|_2^p,$$

et donc que $\psi h \in L^p$ et $\|\psi h\|_p \le \|\psi\|_r \|h\|_2$.
L'application S est donc bien définie. Elle est linéaire continue et $\|S\|_{(L^2)'} \le \|T\|_{(L^p)'} \|\psi\|_r$.

(b) En déduire qu'il existe $G \in L^2$ t.q.

$$(f \in L^p, \frac{f}{\psi} \in L^2) \Rightarrow T(f) = \int f \frac{G}{\psi} dm.$$

Corrigé – *Le théorème de représentation de Riesz pour l'espace de Hilbert L^2 donne l'existence G dans L^2 tel que*

$$T(\psi h) = S(h) = \int G h \, dm \text{ pour tout } h \in L^2.$$

Soit $f \in L^p$ tel que $f/\psi \in L^2$. En prenant $h = f/\psi$ dans l'égalité précédente, on a donc

$$T(f) = T(\psi h) = \int G h \, dm = \int f \frac{G}{\psi} dm.$$

Pour la suite de cette partie, on pose $g = G/\psi$, où G est donnée par la question 3b

4. Dans cette question, on suppose $p \ne 1$ (donc $1 < p < 2$) et on pose $q = p/(p-1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n, de E dans $\mathbb{R}$, par $f_n = |g|^{(q-2)} g 1_{\{|g|\le n\}} 1_{B_n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $f_n/\psi \in L^2$.

Corrigé – *On pose $b_n = \min\{a_p, p \le n\}$. On a $b_n > 0$ et*

$$\int |\frac{f_n}{\psi}|^2 dm \le \frac{n^{2(q-1)}}{b_n^2} m(B_n) < +\infty.$$

On a donc bien $f_n/\psi \in L^2$.

(b) Montrer que $g \in \mathrm{L}^q$ et que $\|g\|_q \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$. [Utiliser la continuité de T de L^p dans $\mathbb{R}$.]

Corrigé – *On remarque que* $f_n \in \mathrm{L}^p$ *car* $\int |f_n|^p\, dm \le n^{p(q-1)} m(\mathrm{B}_n) < +\infty$. *Comme* $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$ *on peut appliquer la question 3b. On obtient, avec la continuité de* T,

$$\mathrm{T}(f_n) = \int f_n g\, dm \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \|f_n\|_p,$$

et donc

$$\int_{\mathrm{B}_n \cap \{|g| \le n\}} |g|^q\, dm \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \Big(\int_{\mathrm{B}_n \cap \{|g| \le n\}} |g|^{p(q-1)}\, dm \Big)^{1/p}.$$

Comme $p(q-1) = q$, *ceci donne*

$$\Big(\int_{\mathrm{B}_n \cap \{|g| \le n\}} |g|^q\ dm \Big)^{1/q} \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}.$$

Pour conclure, on applique le théorème de converegence monotone à la suite $(f_n 1_{\mathrm{B}_n} 1_{|g| \le n})_{n \in \mathbb{N}}$, *on obtient que* $q \in \mathrm{L}^q$ *et* $\|g\|_q \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$.

5. Dans cette question, on suppose $p = 1$ (et donc $f \in \mathrm{L}^1$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit f_n par $f_n = \mathrm{sgn}(g) 1_{\mathrm{A}} 1_{\mathrm{B}_n}$, avec $\mathrm{A} = \{|g| > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}\}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$.

Corrigé – *On pose toujours* $b_n = \min\{a_p,\ p \le n\}$. *On a* $b_n > 0$ *et*

$$\int |\frac{f_n}{\psi}|^2\, dm \le \frac{1}{b_n^2} m(\mathrm{B}_n) < +\infty.$$

On a donc bien $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$.

(b) En déduire que $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et que $g \in \mathrm{L}^\infty$, $\|g\|_\infty \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$.

Corrigé – *Ici aussi on remarque que* $f_n \in \mathrm{L}^1$ *car* $\int |f_n|\, dm \le m(\mathrm{B}_n) < +\infty$. *Comme* $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$ *on peut appliquer la question 3b. On obtient, avec la continuité de* T,

$$\mathrm{T}(f_n) = \int f_n g\, dm \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} \|f_n\|_1,$$

et donc

$$\int_{\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}} |g|\, dm \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'} m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n).$$

Comme $|g| > \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$ *sur* A, *ceci n'est possible que si* $m(\mathrm{B}_n \cap \mathrm{A}) = 0$. *Par continuité croissante de m, on a donc* $m(\mathrm{A}) = 0$. *Ceci donne bien* $g \in \mathrm{L}^\infty$ *et* $\|g\|_\infty \le \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^1)'}$.

6. Pour $f \in \mathrm{L}^p$ et $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit f_n par $f_n = f 1_{\{|f| \le n\}} 1_{\mathrm{B}_n}$.

(a) Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$.

Corrigé – *Soient $f \in \mathrm{L}^p$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose toujours $b_n = \min\{a_p,\ p \leq n\}$. On a $b_n > 0$ et*

$$\int |\frac{f_n}{\psi}|^2\, dm \leq \frac{n^2}{b_n^2} m(\mathrm{B}_n) < +\infty.$$

On a donc bien $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$.

(b) Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$, f_n tend vers f dans L^p quand $n \to \infty$.

Corrigé – *Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \leq |f|$ p.p. pour tout n, le théorème de convergence dominée (dans L^p) donne $f_n \to f$ dans L^p.*

(c) Montrer que $\mathrm{T}(f) = \int fg\,dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^p$.

Corrigé – *Comme $f_n \in \mathrm{L}^p$ et $f_n/\psi \in \mathrm{L}^2$ on peut appliquer la question 3b. On a donc*

$$\mathrm{T}(f_n) = \int f_n g\, dm.$$

Par continuité dans L^p de T et de l'application $h \mapsto \int hg\,dm$ (car $g \in \mathrm{L}^q$), on peut passer à la limite dans cette égalité quand $n \to +\infty$ et on obtient $\mathrm{T}(f) = \int fg\,dm$.

(d) Montrer que $\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} = \|g\|_{\mathrm{L}^q}$.

Corrigé – *On a déjà montré dans les questions 4b et 5b que $\|g\|_q \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$. Pour montrer l'égalité, on remarque que, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$, on a, par l'inégalité de Hölder,*

$$|\mathrm{T}(f)| = |\int fg\,dm| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

On en déduit que $\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \leq \|g\|_q$. On obtient bien finalement $\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} = \|g\|_q$.

Partie 3, p > 2, démonstration par une technique de troncatures d'une forme linéaire. On pose $\mathbf{q = p/(p-1)}$

7. On suppose dans cette question que la forme linéaire T est, de plus, continue pour la norme $\|.\|_{\mathrm{L}^1}$ (c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ telle que, pour tout $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$, $|\mathrm{T}(f)| \leq \mathrm{C}\|f\|_1$.)

(a) Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{L}^\infty$ t.q. $\mathrm{T}(f) = \displaystyle\int fg\,dm$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$. [Utiliser la partie 2 pour $p = 1$.]

Corrigé – *On remarque tout d'abord que* $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$ *est dense dans* L^1 *(il suffit de remarquer que, par le théorème de convergence dominée,* $f 1_{\mathrm{B}_n} \to f$ *dans* L^p*, quand* $n \to +\infty$*, et* $f 1_{\mathrm{B}_n} \in \mathrm{L}^1$ *car* $m(\mathrm{B}_n) < +\infty$*).*
L'application T *restreinte à* $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$ *se prolonge donc de manière unique en une application linéaire continue, notée* $\tilde{\mathrm{T}}$*, de* L^1 *dans* $\mathbb{R}$*. La partie 2 nous donne alors qu'il existe* $g \in \mathrm{L}^\infty$ *tel que*

$$\tilde{\mathrm{T}}(f) = \int f g \, dm \text{ pour tout } f \in \mathrm{L}^1.$$

On a donc, en particulier $\mathrm{T}(f) = \int f g \, dm$ *pour tout* $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$*.*

(b) Montrer que g (trouvée à la question 7a) appartient à L^q.
[On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 4].

Corrigé – *Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $f_n = |g|^{q-2} g 1_{\mathrm{B}_n}$*. Comme* $g \in \mathrm{L}^\infty$ *et* $m(\mathrm{B}_n) < +\infty$*, on a bien* $f_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$*. On peut appliquer la question 7a, elle donne*

$$\int_{\mathrm{B}_n} |g|^q \, dm = \int f_n g \, dm = \mathrm{T}(f_n) \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \|f_n\|_p$$
$$= \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \left(\int_{\mathrm{B}_n} |g|^{p(q-1)} \right)^{1/p} = \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \left(\int_{\mathrm{B}_n} |g|^q \right)^{1/p}.$$

On en déduit $\left(\int_{\mathrm{B}_n} |g|^q \, dm \right)^{1/q} \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$*. Par le théorème de Convergence monotone, on obtient, quand* $n \to +\infty$*,* $g \in \mathrm{L}^q$ *et* $\|g\|_q \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$*.*

(c) En déduire qu'il existe $g \in \mathrm{L}^q$ t.q. $\mathrm{T}(f) = \displaystyle\int f g dm$ pour tout $f \in \mathrm{L}^p$ et que $\|g\|_q = \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$.
[On pourra utiliser un raisonnement similaire à celui de la question 6].

Corrigé – *Soit* $f \in \mathrm{L}^p$*. Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on pose* $f_n = |f| 1_{\mathrm{B}_n}$*. Comme* $m(\mathrm{B}_n) < +\infty$*, on a* $f_n \in \mathrm{L}^1$ *et donc* $f_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^p$*. On peut alors appliquer la question 7a, elle donne*

$$\mathrm{T}(f_n) = \int f_n g \, dm.$$

Comme $f_n \to f$ *dans* L^p *(par le théorème de convergence dominée dans* L^p*), on peut passer à la limite dans l'égalité précédente (on utilise ici la continuité de* T *dans* L^p *et le fait que* $g \in \mathrm{L}^q$*), on obtient bien* $\mathrm{T}(f) = \int f g \, dm$*.*
Enfin, on remarque que l'inégalité de Hölder donne $|\mathrm{T}(f)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ *pour tout* $f \in \mathrm{L}^p$*. On a donc* $\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'} \leq \|g\|_q$*. Comme on a montré à la question précédente que* $\|g\|_q \leq \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$*, on obtient* $\|g\|_q = \|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$*.*

On suppose dans les trois questions suivantes que T est positive, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(f) \geq 0$ pour tout élément f de L^p t.q. $f \geq 0$ p.p.. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit T_n

(application de L^p dans $\mathbb{R}$) de la manière suivante :

$$\mathrm{T}_n(f) = \inf_{\varphi\in \mathrm{L}^p, 0\le\varphi\le f \text{ p.p.}} \Big(\mathrm{T}(\varphi) + n\int (f-\varphi)dm\Big) \text{ si } f\in \mathrm{L}^p \text{ et } f\ge 0 \text{ p.p.},$$
$$\mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}_n(f^+) - \mathrm{T}_n(f^-) \text{ si } f\in \mathrm{L}^p.$$

8. On rappelle que, dans cette question, T est supposée positive. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que T_n vérifie les 3 propriétés suivantes, pour tout $f\in \mathrm{L}^p$, $f\ge 0$ p.p.,

$$0\le \mathrm{T}_n(f)\le \mathrm{T}(f), \tag{6.69}$$
$$\mathrm{T}_n(f)\le \mathrm{T}_{n+1}(f), \tag{6.70}$$
$$\mathrm{T}_n(f)\le n\int f dm. \tag{6.71}$$

Montrer aussi que, pour tout $f\in \mathrm{L}^p$,$f\ge 0$ p.p.,

$$\mathrm{T}_n(f)\to \mathrm{T}(f), \text{ quand } n\to+\infty. \tag{6.72}$$

Corrigé – *Soit $f\in \mathrm{L}^p$, $f\ge 0$ p.p..*
La propriété (6.69) *vient du fait que* $\mathrm{T}(\varphi)+n\int(f-\varphi)dm\ge 0$ *si* $0\le\varphi\le f$ *(et* $\varphi\in \mathrm{L}^p$*) et que* $\mathrm{T}(\varphi)+n\int(f-\varphi)dm = \mathrm{T}(f)$ *pour* $\varphi = f$.
La propriété (6.70) *vient du fait que* $\mathrm{T}(\varphi)+n\int(f-\varphi)dm\le \mathrm{T}(\varphi)+(n+1)\int(f-\varphi)dm$ *pour tout* φ *tel que* $0\le\varphi\le f$ *(et* $\varphi\in \mathrm{L}^p$*).*
La propriété (6.71) *vient du fait que* $\mathrm{T}(\varphi)+n\int(f-\varphi)dm = n\int f\,dm$ *si* $\varphi=0$ *p.p..*
Pour la propriété (6.72)*, on commence par remarquer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^\star$*, il existe* $\varphi_n\in \mathrm{L}^p$ *t.q.* $0\le\varphi_n\le f$ *p.p. et*

$$\mathrm{T}(\varphi_n)+n\int(f-\varphi_n)dm\le \mathrm{T}_n(f)+\frac{1}{n}\le \mathrm{T}(f)+\frac{1}{n}\le \mathrm{T}(f)+1. \tag{6.73}$$

Comme $\mathrm{T}(\varphi_n)\ge 0$ *et* $f-\varphi_n\ge 0$ *p.p., on déduit, en particulier, de* (6.73) *que* $\lim_{n\to+\infty}\int(f-\varphi_n)dm = 0$ *et donc que* $\varphi_n\to f$ *dans* L^1*. On peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que* $\varphi_n\to f$ *p.p. (et on continue avec cette sous suite). Comme* $|\varphi_n| = \varphi_n\le f$ *p.p., le théorème de convergence dominée dans* L^p *donne* $\varphi_n\to f$ *dans* L^p*). (En fait, un raisonnement par l'absurde permet de montrer que cette convergence de* φ_n *vers* f *dans* L^p *est aussi vraie sans extraction de sous suite, mais ceci n'est pas utile ici.) Pour conclure, on utilise la continuité de* T *dans* L^p*, elle donne* $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{T}(\varphi_n) = \mathrm{T}(f)$*. Comme* $\varphi_n\le f$*, on en déduit, avec* (6.73),

$$\mathrm{T}(f)\le \liminf_{n\to\infty}(\mathrm{T}(\varphi_n)+n\int(f-\varphi_n)dm)\le \liminf_{n\to\infty}\mathrm{T}_n(f).$$

On a donc $\liminf_{n\to\infty}\mathrm{T}_n(f)\ge \mathrm{T}(f)$*. Avec* (6.69)*, ceci donne* $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{T}_n(f) = \mathrm{T}(f)$*. Noter que cette convergence a été obtenue après extraction d'une sous suite, mais elle reste vraie sans extraction de sous suite car la suite* $(\mathrm{T}_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

9. On suppose toujours que T est positive.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que T_n est une application linéaire de L^p dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Comme pour la construction de l'intégrale de Lebesgue, on commence par montrer une propriété que l'on peut appeler "linéarité positive".*
Soit $f, g \in L^p$, $f \geq 0$ *p.p. et* $f \geq 0$ *p.p., et* α, $\beta \in \mathbb{R}_+$. *On va montrer que* $T_n(\alpha f + \beta g) = \alpha T_n(f) + \beta T_n(g)$.
On remarque tout d'abord que $T_n(\alpha f) = \alpha T_n(f)$. *Ceci est dû au fait que* $\{\varphi$ *t.q.* $0 \leq \alpha\varphi \leq \alpha f$ *p.p.*$\} = \{\varphi$ *t.q.* $0 \leq \varphi \leq f$ *p.p.*$\}$. *On peut donc maintenant se limiter à considérer le cas* $\alpha = \beta = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. *Il existe* φ, ψ *appartenant à* L^p *tels que* $0 \leq \varphi \leq f$ *p.p.,* $0 \leq \psi \leq g$ *p.p.. et*

$$T(\varphi) + n\int (f-\varphi)dm \leq T_n(f) + \varepsilon,\ T(\psi) + n\int (g-\psi)dm \leq T_n(g) + \varepsilon.$$

En remarquant que $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$, *on a*

$$\begin{aligned} T_n(f+g) &\leq T(\varphi+\psi) + n\int (f+g-(\varphi+\psi))dm \\ &= T(\varphi) + n\int (f-\varphi)dm + T(\psi) + n\int (g-\psi)dm \\ &\leq T_n(f) + T_n(g) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$T_n(f+g) \leq T_n(f) + T_n(g). \tag{6.74}$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. *Il existe* $\varphi \in L^p$ *tel que* $0 \leq \varphi \leq f + g$ *et*

$$T(\varphi) + n\int ((f+g)-\varphi)dm \leq T_n(f+g) + \varepsilon. \tag{6.75}$$

On pose maintenant $\bar{\varphi} = \min\{f, \varphi\}$ *et* $\tilde{\varphi} = \varphi - \bar{\varphi}$. *On a donc* $0 \leq \bar{\varphi} \leq f$ *et* $0 \leq \tilde{\varphi} \leq g$. *ceci donne*

$$T_n(f) \leq T(\bar{\varphi}) + n\int (f-\bar{\varphi})dm, \qquad T_n(g) \leq T(\tilde{\varphi}) + n\int (g-\tilde{\varphi})dm.$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient, avec (6.75),

$$T_n(f) + T_n(g) \leq T(\varphi) + n\int ((f+g)-\varphi)dm \leq T_n(f+g) + \varepsilon.$$

Ceci donne $T_n(f) + T_n(g) \leq T_n(f+g)$ *et donc, avec* (6.74), $T_n(f) + T_n(g) = T_n(f+g)$.
On considère maintenant le cas général avec f, $g \in L^p$ *et* α, $\beta \in \mathbb{R}$. *on va montrer que* $T_n(\alpha f + \beta g) = \alpha T_n(f) + \beta T_n(g)$ *en se ramenant à la linéarité positive. On traite, par exemple, le cas* $\alpha > 0$, $\beta < 0$. *Les autres cas sont similaires. On a*

$$\alpha f + \beta g = (\alpha f + \beta g)^+ - (\alpha f + \beta g)^- = \alpha(f^+ - f^-) + \beta(g^+ - g^-)$$

et donc

$$(\alpha f + \beta g)^+ + \alpha f^- + (-\beta)g^+ = (\alpha f + \beta g)^- + \alpha f^+ + (-\beta)g^-.$$

La propriété de linéarité positive donne alors

$$\mathrm{T}_n((\alpha f+\beta g)^+)+\alpha\mathrm{T}_n(f^-)-\beta\mathrm{T}_n(g^+)=\mathrm{T}_n((\alpha f+\beta g)^-+\alpha\mathrm{T}_n(f^+)-\beta\mathrm{T}_n(g^-).$$

On en déduit, avec la définition de T_n,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(\alpha f+\beta g)&=\mathrm{T}_n((\alpha f+\beta g)^+)-\mathrm{T}_n((\alpha f+\beta g)^-)\\&=\alpha\mathrm{T}_n(f^+)-\beta\mathrm{T}_n(g^-)-\alpha\mathrm{T}_n(f^-)+\beta\mathrm{T}_n(g^+)\\&=\alpha\mathrm{T}_n(f)+\beta\mathrm{T}_n(g).\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la linéarité de T_n.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $g_n\in\mathrm{L}^q$ tel que $\mathrm{T}_n(f)=\int g_n f\,dm$, pour tout $f\in\mathrm{L}^p$. Montrer que $0\le g_n\le n$ p.p. et que $\|g_n\|_{\mathrm{L}^q}\le\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$.

Corrigé – *L'application* T_n *est linéaire continue de* L^p *dans* $\mathbb{R}$ *car pour tout* $f\in\mathrm{L}^p$ *on a*

$$|\mathrm{T}_n(f)|=|\mathrm{T}_n(f^+)-\mathrm{T}_n(f^-)|\le\mathrm{T}(f^+)+\mathrm{T}(f^-)=\mathrm{T}(|f|)\le\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}\|f\|_p.$$

Ceci montre de plus

$$\|\mathrm{T}_n\|_{(\mathrm{L}^p)'}\le\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}. \tag{6.76}$$

D'autre part, T_n *est aussi continue pour la nome de* L^1. *En effet, la propriété* (6.71) *donne*

$$|\mathrm{T}_n(f)|\le\mathrm{T}_n(f^+)+\mathrm{T}_n(f^-)\le n\int|f|\,dm. \tag{6.77}$$

On peut donc appliquer la question 7c, elle donne l'existence de g_n *dans* L^q *tel que* $\mathrm{T}_n(f)=\int g_n f\,dm$, *pour tout* $f\in\mathrm{L}^p$. *la question 7c donne aussi* $\|g_n\|_q=\|\mathrm{T}_n\|_{(\mathrm{L}^p)'}$ *et donc, par* (6.76), $\|g_n\|_q\le\|\mathrm{T}\|_{(\mathrm{L}^p)'}$.
Enfin, en reprenant la démonstration de la question 7a, on remarque que T_n *se prolonge (par densité de* $\mathrm{L}^1\cap\mathrm{L}^p$ *dans* L^1*) en une application linéaire continue de* L^1 *dans* $\mathbb{R}$, *notée* $\tilde{\mathrm{T}}_n$, *et l'inégalité 6.77 reste vraie (par densité) avec* $\tilde{\mathrm{T}}_n$ *et tout* $f\in\mathrm{L}^1$. *Ce qui donne* $\|\tilde{\mathrm{T}}_n\|_{(\mathrm{L}^1)'}\le n$. *Le résultat de la question 6d donne alors* $\|g_n\|_\infty=\|\tilde{\mathrm{T}}_n\|_{(\mathrm{L}^1)'}\le n$, *c'est-à-dire* $|g_n|\le n$ *p.p..*
Il reste à montrer que $g_n\ge 0$ *p.p.. Pour cela on utilise le fait que* $\mathrm{T}_n(f)\ge 0$ *si* $f\ge 0$ *p.p.. Pour* $k\in\mathbb{N}^\star$, *on choisit* $f=1_{\mathrm{B}_k}1_{\{g_n<0\}}$, *on obtient*

$$\int_{\mathrm{B}_k\cap\{g_n<0\}}g_n\,dm=\mathrm{T}(1_{\mathrm{B}_k}1_{\{g_n<0\}})\ge 0.$$

On en déduit que $m(\mathrm{B}_k\cap\{g_n<0\})=0$ *et donc, par continuité croissante de* m, $m(\{g_n<0\})=0$, *c'est-à-dire* $g_n\ge 0$ *p.p..*

(c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $g_n\le g_{n+1}$ p.p. (la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est celle donnée à la question précédente).

Corrigé – *La propriété* (6.70) *donne, pour tout* $f\in\mathrm{L}^p$

$$\int g_n f\,dm=\mathrm{T}_n(f)\le\mathrm{T}_{n+1}(f)=\int g_{n+1}f\,dm.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on choisit $f = 1_{B_k} 1_{\{g_n > g_{n+1}\}}$, on obtient

$$\int_{B_k \cap \{g_n > g_{n+1}\}} (g_{n+1} - g_n)\, dm \geq 0.$$

On en déduit que $m(B_k \cap \{g_n > g_{n+1}\}) = 0$ et donc, par continuité croissante de m, $m(\{g_n > g_{n+1}\}) = 0$, c'est-à-dire $g_n \leq g_{n+1}$ p.p..

10. On suppose toujours que T est positive. Montrer qu'il existe une fonction g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^p$.

Corrigé – *On reprend la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ construite à la question précédente. Cette suite converge p.p. et en croissant (noter aussi que $g_n \geq 0$ p.p.). On note g sa limite. Comme $\|g_n\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$, le théorème de convergence monotone nous donne que $g \in L^q$ (et $\|g\|_q \leq \|T\|_{(L^p)'}$). Puis, par convergence dominée dans L^p, on a $g_n \to g$ dans L^q quand $n \to +\infty$.*
Soit maintenant $f \in L^p$. On a $T_n(f) = \int g_n f\, dm$. On peut passer à la limite dans cette égalité quand $n \to +\infty$ en utilisant la propriété 6.72 et le fait que $g_n \to g$ dans L^q. On obtient bien $T(f) = \int g f\, dm$.

11. On ne suppose plus que T est positive. Montrer qu'il existe un élément g de L^q t.q. $T(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^p$.

[Décomposer T en une partie positive et une partie négative.]

Corrigé – *On définit l'application P (censée être la partie positive de T) de la manière suivante :*

$$P(f) = \sup_{\varphi \in L^p, 0 \leq \varphi \leq f \text{ p.p.}} T(\varphi) \text{ si } f \in L^p \text{ et } f \geq 0 \text{ p.p.,}$$

$$P(f) = P(f^+) - P(f^-) \text{ si } f \in L^p.$$

On remarque tout d'abord que P et bien définie, est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $P(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ p.p.. Ceci est dû au fait que $0 \leq P(f) \leq \|T\|_{(L^p)'} \|f\|_p$ si $f \in L^p$, $f \geq 0$ p.p..
On montre ensuite que P est linéaire comme dans la question 9a. la seule différence avec la question 9a est la démonstration de $P(f+g) = P(f) + P(g)$ si $f \geq 0$ p.p. et $g \geq 0$ p.p..
Soient $f, g \in L^p$, $f \geq 0$ p.p., $g \geq 0$ p.p. et $\varepsilon > 0$. Il existe φ, ψ appartenant à L^p tels que $0 \leq \varphi \leq f$ p.p., $0 \leq \psi \leq g$ p.p.. et

$$T(\varphi) \geq P(f) - \varepsilon,\ T(\psi) \geq P(g) - \varepsilon.$$

En additionnant ces deux inégalités, on a donc $T(\varphi + \psi) \geq P(f) + P(g) - 2\varepsilon$. Comme $0 \leq \varphi + \psi \leq f + g$ et que ε est arbitrairement petit, on en déduit

$$P(f+g) \geq P(f) + P(g). \tag{6.78}$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in L^p$ tel que $0 \leq \varphi \leq f + g$ et

$$T(\varphi) \geq P(f+g) - \varepsilon. \tag{6.79}$$

On pose $\bar\varphi = \min\{f, \varphi\}$ *et* $\tilde\varphi = \varphi - \bar\varphi$. *On a donc* $0 \le \bar\varphi \le f$ *et* $0 \le \tilde\varphi \le g$. *ceci donne*

$$P(f) \ge T(\bar\varphi), \qquad P(g) \ge T(\tilde\varphi).$$

En additionnant ces deux inégalité, on obtient, avec (6.79),

$$P(f) + P(g) \ge T(\varphi) \ge P(f+g) - \varepsilon.$$

Ceci donne $P(f) + P(g) \ge P(f+g)$ *et donc, avec* (6.78), $P(f) + P(g) = P(f+g)$.
On ainsi montré que P *est une application linéaire continue de* L^p *dans* $\mathbb{R}$. *La question 10 montre alors qu'il existe* $\bar g$ *dans* L^q *tel que*

$$P(f) = \int \bar g f \, dm \text{ pour tout } f \in L^p.$$

On définit maintenant l'appliaction N *de* L^p *dans* $\mathbb{R}$ *par* $N(f) = P(f) - T(f)$. *L'application* N *est bien linéaire continue de* L^p *dans* $\mathbb{R}$ *(car* T *et* N *le sont). Elle est positive (car* $N(f) \ge T(f)$ *si* $f \ge 0$*). La question 10 montre alors qu'il existe* $\tilde g$ *dans* L^q *tel que*

$$N(f) = \int \tilde g f \, dm \text{ pour tout } f \in L^p.$$

En posant $g = \bar g - \tilde g$, *on a donc* $g \in L^q$ *et*

$$T(f) = \int g f \, dm \text{ pour tout } f \in L^p.$$

Exercice 6.53 (Exemple de non injectivité de L^∞ dans $(L^1)'$) On prend $X = \{0\}$ (l'espace X est donc réduit à un seul élément), $T = \mathcal{P}(X)$ et la mesure m définie par $m(\{0\}) = +\infty$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$ (pour $1 \le p \le +\infty$).

1. Quelle est la dimension des espaces L^1, L^∞ et $(L^1)'$?

Soit φ l'application définie de L^∞ dans $(L^1)'$ par $f \mapsto \varphi_f$, où φ_f est définie par (6.25), c'est-à-dire $\varphi_f(g) = \int f g \, dm$, pour tout $g \in L^1$.

2. L'application φ est-elle injective ? A-t-on $\|\varphi_f\|_{(L^1)'} = \|f\|_{(L^\infty)}$?

3. L'espace L^1 est-il réflexif ?

6.5.4 Convergence faible, faible-∗, étroite, en loi...

Exercice 6.54 (Convergence faible et convergence des normes ⇒ convergence forte) Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2 = L^2(E, T, m)$ et $f \in L^2$ t.q. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende faiblement vers f dans L^2, c'est-à-dire : $\int f_n \varphi dm \to \int f \varphi dm$ pour toute fonction $\varphi \in L^2$.

1. Montrer que $\|f\|_2 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.

Corrigé – *Comme* $f_n \to f$ *faiblement vers* f *dans* L^2 *(quand* $n \to +\infty$*) et que* $f \in L^2$, *on a :*

$$\int f_n f \, dm \to \int f^2 dm = \|f\|_2^2 \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\int f_n f\,dm \leq \|f_n\|_2 \|f\|_2$. *On en déduit, en faisant tendre n vers l'infini :*

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to+\infty} \int f_n f\,dm = \liminf_{n\to+\infty} \int f_n f\,dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2 \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2,$$

et donc $\|f\|_2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_2$.

2. On suppose de plus que $\|f_n\|_2 \to \|f\|_2$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans L^2.

   Corrigé – *On remarque que* $\|f_n - f\|_2^2 = (f_n - f \mid f_n - f)_2 = \|f_n\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2\int f_n f\,dm$. *On a* $\|f_n\|_2^2 \to \|f\|_2^2$ *et, comme* $f_n \to f$ *faiblement dans* L^2, *on a aussi* $\int f_n f\,dm \to \int f^2\,dm = \|f\|_2^2$, *quand* $n \to +\infty$. *On en déduit donc que* $\|f_n - f\|_2 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.55 (Convergence faible) Soit (E, T, m) un espace mesuré σ−fini. Pour $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $1 \leq p < \infty$ et $q = p/(p-1)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ et $f \in L^p$.

1. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p quand $n \to +\infty$ (voir la définition 6.80) si et seulement si

$$\int f_n g\,dm \to \int f g\,dm,\ \forall g \in L^q. \tag{6.80}$$

   Corrigé – *Le cours (théorème de dualité 6.70 page 339) donne que* $\{\varphi_g,\ g \in L^q\} = (L^p)'$, *avec* φ_g *défini par* $\varphi_g(f) = \int f g\,dm$ *(pour* $f \in L^p$*). Ceci donne bien le résultat demandé (c'est-à-dire :* $f_n \to f$ *faiblement dans* L^p *si et seulement si* $\varphi_g(f_n) \to \varphi_g(f)$ *pour tout* $g \in L^q$*).*

2. Montrer que $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$ si $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to +\infty$. [Utiliser (6.80) avec un choix convenable de g.]

   Corrigé – *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ *et* $f \in L^p$ *t.q.* $f_n \to f$ *faiblement dans* L^p, *quand* $n \to +\infty$. *On confond f avec l'un de ses représentant et on pose* $g = |f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)$. *La fonction est mesurable (comme produit de fonctions mesurables). On a aussi* $g \in \mathcal{L}^q$ *et, comme* $q(p-1) = p$, $\|g\|_q^q = \|f\|_p^p$. *On en déduit, par l'inégalité de Hölder :*

$$\int f_n g\,dm \leq \|f_n\|_p \|g\|_q = \|f_n\|_p \Big(\int |f|^p\,dm\Big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

   Quand n → +∞, on obtient :

$$\int |f|^p\,dm = \int f g\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n g\,dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p \Big(\int |f|^p\,dm\Big)^{1-\frac{1}{p}},$$

   et donc $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p$.

On suppose dans les questions suivantes (questions 3 à 7) que :

$$m(E) < \infty,\ f_n \to f \text{ p.p.},\ \exists C \text{ t.q. } \|f_n\|_p \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.81}$$

3. On suppose, dans cette question, que $p > 1$.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $g \in L^q$ t.q. $g = 0$ p.p. sur E_N^c avec $E_N = \bigcap_{n\geq N}\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \leq 1\}$. Montrer que $\int f_n g dm \to \int f g dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour définir* E_N, *on a, comme d'habitude, confondu les fonctions* f_n *et* f *avec l'un de leurs représentants.*

On remarque que $g(f_n - f) \to 0$ *p.p. et que, pour* $n \geq N$, $|g(f_n - f)| \leq |g|$ *p.p.. Comme* $g \in L^q \subset L^1$ *(car* $m(E) < \infty$*), on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne que* $g(f_n - f) \to 0$ *dans* L^1 *et donc :*

$$\int g f_n dm \to \int g f dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

(b) Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p. [Pour $g \in L^q$, introduire $g_N = g 1_{E_N}$.]

Corrigé – *Soit* $g \in L^q$ *(on confond* g *avec l'un de ses représentants). On pose* $g_N = g1_{E_N}$ *avec* $E_N = \bigcap_{n\geq N}\{x \in E; |f_n(x) - f(x)| \leq 1\}$. *On a alors :*

$$\int f_n g dm - \int f g dm = \int f_n(g - g_N)dm + \int f_n g_N dm - \int f g_N dm + \int f(g_N - g)dm. \quad (6.82)$$

Comme $g_N \to g$ *p.p. quand* $N \to \infty$ *(car* $f_n \to f$ *p.p. quand* $n \to +\infty$*), et que* $|g_N| \leq |g|$ *p.p. (pour tout* N*), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans* L^q *(théorème 6.9) car* $g \in L^q$ *et* $q < \infty$ *(on a besoin ici de l'hypothèse* $p > 1$*). Il donne :*

$$g_N \to g \text{ dans } L^q, \text{ quand } N \to \infty. \quad (6.83)$$

Soit $\varepsilon > 0$. *En utilisant l'inégalité de Hölder, l'hypothèse* $\|f_n\|_p \leq C$ *et (6.83), on peut donc choisir* N *t.q. :*

$$|\int f_n(g_N - g)dm| \leq \|f_n\|_p\|g_N - g\|_q \leq C\|g_N - g\|_q \leq \varepsilon, \quad (6.84)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et :*

$$|\int f(g_N - g)dm| \leq \|f\|_p\|g_N - g\|_q \leq \varepsilon, \quad (6.85)$$

Puis, N *étant fixé, la question précédente nous donne, quand* $n \to +\infty$,

$$\int f_n g_N dm \to \int f g_N dm.$$

Il existe donc $n(\varepsilon)$ *t.q.*

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g_N dm - \int f g_N dm| \leq \varepsilon. \quad (6.86)$$

Avec (6.84), (6.85) et (6.86), on déduit alors de (6.82) :

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n g dm - \int f g dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence faible de f_n *vers* f *dans* L^p.

(c) Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ dans L^p.

Corrigé – *On prend $f_n = n^{\frac{1}{p}} 1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $\|f_n\|_p = 1$, $f_n \to 0$ p.p. et $f_n \not\to 0$ dans L^p (quand $n \to +\infty$).*

4. On suppose, dans cette question, que $p = 1$. Montrer que $\|f\|_1 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_1$. Donner un exemple avec $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ pour lequel $f_n \not\to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Le fait que $\|f\|_1 \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_1$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou, lemme 4.19 (en choisissant des représentants pour f_n et f).*

On peut prendre, comme exemple, $f_n = n1_{]0,\frac{1}{n}[}$. On a $f_n \to 0$ p.p., $\|f_n\|_1 = 1$ et $\int f_n \varphi dm \to 1 \neq 0$ si $\varphi = 1_{]0,1[}$ (donc $f_n \not\to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$).

5. On suppose, dans cette question, que $p > 1$ et on prend $1 \le r < p$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to +\infty$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Vitali pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $g_n = |f_n - f|^r$.]

Corrigé – *On pose $g_n = |f_n - f|^r$. On a $g_n \to 0$ p.p. et, pour tout $A \in T$, on obtient en utilisant l'inégalité de Hölder avec les fonctions g_n et 1_A et les exposants $\frac{p}{r}$ et son conjugué :*

$$\int_A g_n dm = \int_A |f_n - f|^r \le (\int_A |f_n - f|^p dm)^{\frac{r}{p}} (m(A))^{1-\frac{r}{p}}$$
$$\le \|f_n - f\|_p^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}}.$$

On en déduit, comme $\|f_n\|_p \le C$:

$$\int_A g_n dm \le (C + \|f\|_p)^r (m(A))^{1-\frac{r}{p}},$$

d'où l'on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi–intégrable. Le théorème de Vitali (théorème 4.51, voir aussi l'exercice 4.34) donne alors que $g_n \to 0$ dans L^1, d'où l'on conclut que $f_n \to f$ dans L^r, quand $n \to +\infty$.

6. Pour cette question, on retire dans (6.81) l'hypothèse $m(E) < \infty$ et on suppose que $p > 1$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^p.

Corrigé – *Il suffit ici de reprendre la même démonstration qu'à la question 3 avec E_N remplacé par $\tilde{E}_N = E_N \cap A_N$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ est t.q. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, $A_{n+1} \supset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

7. Dans cette question, on conserve l'hypothèse (6.81) mais on ne suppose plus que $f \in L^p$. Montrer que f appartient nécessairement à L^p.

Corrigé – *Le fait que $f \in L^p$ est une conséquence immédiate du lemme de Fatou (appliqué à la suite $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$).*

8. On prend maintenant $(E, T, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et on définit f_n, pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = 1$ p.p. sur $]2k/n, (2k+1)/n[$ pour $k \in \mathbb{N}$, $(2k+1)/n \le 1$ et $f_n = -1$ p.p. sur $]2k-1/n, 2k/n[$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, $2k/n \le 1$. Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p, pour tout $1 \le p < \infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $C([0,1],\mathbb{R})$ dans L^1.]

Corrigé – *On se limite à n pair (la démonstration pour n impair est similaire). On prend d'abord* $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$. *On a alors :*

$$\int f_n \varphi d\lambda = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \int_{\frac{2k}{n}}^{\frac{2k+1}{n}} (\varphi(x) - \varphi(x + \frac{1}{n}))dx.$$

On en déduit :

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \le \int_0^{1-\frac{1}{n}} |\varphi(x) - \varphi(x+\frac{1}{n})| dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.87}$$

Soit maintenant $\varphi \in L^1$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe* $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$ *t.q.* $\|\varphi - \psi\|_1 \le \varepsilon$. *On a alors :*

$$|\int f_n \varphi d\lambda| \le |\int f_n \psi d\lambda| + |\int f_n(\psi - \varphi) d\lambda| \le |\int_0^1 f_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$, *on peut utiliser (6.87) (avec* ψ *au lieu de* φ*). Il existe donc* $n(\varepsilon)$ *t.q.* $|\int_0^1 f_n \psi d\lambda| \le \varepsilon$ *pour* $n \ge n(\varepsilon)$, *et donc :*

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow |\int f_n \varphi d\lambda| \le 2\varepsilon,$$

ce qui donne bien $\int f_n \varphi d\lambda \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $\varphi \in L^1$.

On en déduit bien que $f_n \to 0$ *faiblement dans* L^p *pour tout* $1 \le p < \infty$ *en utilisant la question 1 et le fait que* $L^q \subset L^1$ *pour tout* $q \ge 1$.

Exercice 6.56 (Borne dans L^1 $\not\Rightarrow$ convergence faible) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (n - n^2 x)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boréliens de $]0,1[$, et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans L^p pour $p > 1$.
3. Y a-t'il convergence simple, convergence p.p., convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans L^p ($p \in [1, +\infty]$) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier vos réponses...) ?
4. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $\int f_n \varphi d\lambda \to \varphi(0)$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement dans L^1 (utiliser le fait que la mesure de Dirac n'est pas une mesure de densité, cf exercice 5.1).

Exercice 6.57 (Convergence forte contre convergence faible) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Pour $r \in [1, +\infty]$, on note L^r l'espace $L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Soit $p \in [1, \infty[$ et q l'exposant conjugué de p. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$, $u \in L^p$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q$ et $v \in L^q$.

On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^p et $v_n \to v$ dans L^q, quand $n \to +\infty$. Montrer que $u_n v_n \to uv$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Exercice 6.58 (Convergence faible et non linéarité) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0, 1[$, par L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(]0, 1[, B(]0, 1[), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^p$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0, 1[, B(]0, 1[), \lambda)$.

1. (Unicité de la limite faible). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u, v \in L^1$. On suppose que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$, (c'est-à-dire que $T(u_n) \to T(u)$ pour toute application T linéaire continue de L^1 dans $\mathbb{R}$) et que $u_n \to v$ faiblement dans L^1.

(a) Montrer que $\int (u - v)\phi d\lambda = 0$, pour tout $\phi \in L^\infty$.

Corrigé – *Soit $\phi \in L^\infty$. On sait que l'application $w \mapsto \int w\phi d\lambda$ est une application* T *linéaire continue de* L^1 *dans* $\mathbb{R}$ *(voir la section 6.3). On a donc, quand $n \to +\infty$:*

$$\int u_n \phi d\lambda \to \int u\phi d\lambda \text{ et } \int u_n \phi d\lambda \to \int v\phi d\lambda.$$

On en déduit bien que $\int u\phi d\lambda = \int v\phi d\lambda$ c'est-à-dire $\int (u - v)\phi d\lambda = 0$.

(b) Montrer que $u = v$ p.p.. [Choisir convenablement ϕ dans l'égalité précédente.]

Corrigé – *On choisit des représentants de u et v et on prend $\phi = \text{sign}(u - v)1_{\{u \neq v\}}$. La fonction ϕ est mesurable (et même étagée) et bornée, donc $\phi \in \mathcal{L}^\infty$ (ou $\phi \in L^\infty$ avec la confusion habituelle). Ce choix de ϕ dans la question précédente donne alors $\|u - v\|_1 = 0$ et donc $u = v$ p.p..*

2. (Convergence forte contre convergence faible) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ et $v \in L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|v_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $v_n \to v$ p.p., quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $v_n \to v$ dans L^p, quand $n \to +\infty$, pour tout $1 \leq p < \infty$.

Corrigé – *Ceci est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée dans L^p (pour $1 \leq p < \infty$, théorème 6.9). En effet, on a $v_n \to v$ p.p., $|v_n| \leq C1_{]0,1[}$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et la fonction $C1_{]0,1[}$ appartient à L^p.*

(b) Donner un exemple pour lequel $v_n \not\to v$ dans L^∞.

Corrigé – *Il suffit de prendre $v_n = 1_{]0,\frac{1}{n}[}$ (plus précisément, v_n est l'élément de L^∞ donc $1_{]0,\frac{1}{n}[}$ est l'un des représentants) et $v = 0$. On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$, $\|v_n\|_\infty = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \to 0$ p.p. et $v_n \not\to 0$ dans L^∞ (quand $n \to +\infty$),*

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $u \in L^1$. On suppose que $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$. Montrer que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$. [Écrire $v_n = v + (v_n - v)$.]

Corrigé – *On remarque que*

$$\int u_n v_n d\lambda = \int u_n v d\lambda + \int u_n(v_n - v)d\lambda. \tag{6.88}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^1, on a $\int u_n v d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$.

Le deuxième terme de (6.88) tend vers 0 car $|\int u_n(v_n - v)d\lambda| \leq \|u_n\|_\infty \|v_n - v\|_1 \leq C\|v_n - v\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$, puisqu'on a montré précédemment que $v_n \to v$ dans L^1.

On en déduit bien que $\int u_n v_n d\lambda \to \int uv d\lambda$, quand $n \to +\infty$.

On se donne maintenant une fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $u \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$.

Corrigé –
- *Comme $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est borélienne (c'est-à-dire mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant muni de la tribu de Borel). On en déduit que $\varphi \circ u$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.*
- *On note $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq \|u\|_\infty\}$. On a $M < \infty$ (car φ est continue sur le compact $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$) et $|\varphi \circ u| \leq M$ p.p. car $|u| \leq \|u\|_\infty$ p.p.. On en déduit que $\varphi \circ u \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|\varphi \circ u\|_\infty \leq M$.*

4. Soit $u \in L^\infty$ et $v, w \in u$. Montrer que $\{h \in \mathcal{L}^\infty ; h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty ; h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Corrigé – *On a $v = w$ p.p. et donc $\varphi \circ v = \varphi \circ w$ p.p., puisque, pour $x \in]0, 1[$. $u(x) = v(x)$ implique $\varphi(u(x)) = \varphi(v(x))$.*

Si $h :]0, 1[\to \mathbb{R}$, on a donc :

$$h = \varphi \circ u \text{ p.p.} \Leftrightarrow h = \varphi \circ v \text{ p.p.} ,$$

ce qui donne bien $\{h \in \mathcal{L}^\infty ; h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\} = \{h \in \mathcal{L}^\infty ; h = \varphi \circ w \text{ p.p.}\}$.

Grâce aux 2 questions précédentes, pour $u \in L^\infty$, on pose, si $v \in u$: $\underline{\varphi}(u) = \{h \in \mathcal{L}^\infty ; h = \varphi \circ v \text{ p.p.}\}$, de sorte que $\underline{\varphi}(u) \in L^\infty$.

On se donne maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe $u \in L^1$ et $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ t.q. :

— $u_n \to u$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$,

— $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Le but de l'exercice est de comparer f et $\underline{\varphi}(u)$.

5. Montrer que $|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A)$ pour tout $A \in B(]0,1[)$. Montrer que $u \in L^\infty$ que $\|u\|_\infty \le C$.

Corrigé – *Soit* $A \in B(]0,1[)$. *De l'hypothèse* $\|u_n\|_\infty \le C$, *on déduit :*

$$|\int u_n 1_A d\lambda| \le \|u_n\|_\infty \|1_A\|_1 \le C\lambda(A). \tag{6.89}$$

Comme $u_n \to u$ *faiblement dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$, *on a* $\int u_n 1_A d\lambda \to \int u 1_A d\lambda$ *quand* $n \to +\infty$. *On déduit donc de (6.89), quand* $n \to +\infty$ *:*

$$|\int u 1_A d\lambda| \le C\lambda(A). \tag{6.90}$$

On choisit alors un représentant de u et on prend dans (6.90), $A = A_+ = \{u > C\}$. *Si* $\lambda(A_+) > 0$, *on a* $\int u 1_{A_+} d\lambda > C\lambda(A_+)$, *en contradiction avec (6.90). Ce qui prouve que* $\lambda(A_+) = 0$.

On prend ensuite $A = A_- = \{u < -C\}$. *Si* $\lambda(A_-) > 0$, *on a*

$$|\int u 1_{A_-} d\lambda| = \int (-u) 1_{A_-} d\lambda > C\lambda(A_-),$$

en contradiction avec (6.90). Ce qui prouve que $\lambda(A_-) = 0$.

On a donc $\lambda(\{|u| > C\}) = \lambda(A_+) + \lambda(A_-) = 0$, *ce qui donne* $u \in L^\infty$ *et* $\|u\|_\infty \le C$.

6. On suppose, dans cette question, que φ est affine (c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) = \alpha s + \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$). Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p.. [Utiliser, en particulier, la question 1.]

Corrigé – *On rappelle d'abord (voir la section 6.3) que si* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $w \in L^1$, *la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers w faiblement dans* L^1 *(quand* $n \to +\infty$*) si et seulement* $\int w_n \phi d\lambda \to \int w \phi d\lambda$ *pour tout* $\phi \in L^\infty$.

Soit $\phi \in L^\infty$, *on a* $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda = \int (\alpha u_n + \beta)\phi d\lambda = \alpha \int u_n \phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda$. *Comme* $u_n \to u$ *faiblement dans* L^1, *on en déduit que* $\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda \to \alpha \int u\phi d\lambda + \beta \int \phi d\lambda = \int \underline{\varphi}(u)\phi d\lambda$ *(quand* $n \to +\infty$*). Ceci montre que* $\underline{\varphi}(u_n) \to \underline{\varphi}(u)$ *faiblement dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$.

On utilise maintenant le fait que $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ *p.p.. En notant* $M = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le C\}$, *on a* $M < \infty$ *et* $|\underline{\varphi}(u_n)| \le M$ *p.p. (car* $|u_n| \le C$ *p.p.) pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (car les fonctions constantes sont intégrables, sur* $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$*). Il donne* $f \in L^1$ *et* $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$. *On en déduit alors aussi que* $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ *faiblement dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$ *(il suffit de remarquer que* $|\int \underline{\varphi}(u_n)\phi d\lambda - \int f\phi d\lambda| \le \|\underline{\varphi}(u_n) - f\|_1 \|\phi\|_\infty \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $\phi \in L^\infty$*).*

Par la question 1 (unicité de la limite faible), on peut donc conclure que $f = \underline{\varphi}(u)$ *p.p..*

7. On suppose, dans cette question, que φ est injective. Montrer qu'il existe $v \in L^\infty$ t.q. $u_n \to v$ p.p. quand $n \to +\infty$. En déduire que $v = u$ et $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

   Corrigé – *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de u_n, encore noté u_n. Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $\varphi(u_n) \to f$ p.p., il existe $A \in \mathcal{B}(]0,1[)$ t.q. $\lambda(A) = 0$, $|u_n(x)| \le C$, pour tout $x \in A^c$ et tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varphi(u_n(x)) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in A^c$.*

   Soit $x \in A^c$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans le compact $[-C, C]$. Soit a une valeur d'adhérence de cette suite (c'est-à-dire la limite d'une sous-suite convergente). Par continuité de φ, $\varphi(a)$ est alors une valeur d'adhérence de de la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$. Or, la suite $(\varphi(u_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Donc, $\varphi(a) = f(x)$. Comme φ est injective, ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence et donc qu'elle est convergente (on rappelle qu'une suite dans un compact, qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, est convergente). On pose alors $v(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$.

   On a ainsi défini v p.p. (car $\lambda(A) = 0$), et on a $u_n \to v$ p.p.. On a aussi obtenu que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. (car $\varphi(v(x)) = f(x)$ pour tout $x \in A^c$).

   Comme $|u_n| \le C$ p.p. (pour tout n), le théorème de convergence dominée donne que $u_n \to v$ dans L^1 (quand $n \to +\infty$). On en déduit, comme à la question précédente, que $u_n \to v$ faiblement dans L^1. La question 1 (unicité de la limite faible) donne alors $u = v$ p.p..

   Enfin, on a déjà montré que $\underline{\varphi}(v) = f$ p.p. et donc $\underline{\varphi}(u) = f$ p.p..

8. (Astuce de Minty pour passer à la limite sur les non linéarités) On suppose, dans cette question, que φ est croissante.

   (a) Soit $v \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v)d\lambda \ge 0$. [Utiliser la croissance de φ et la question 2 (c).]

   Corrigé – *Soit $v \in L^\infty$. Comme φ est croissante, on a $(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v) \ge 0$ p.p. et donc $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v)d\lambda \ge 0$.*

   On remarque maintenant que :

   — *$(\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)) \to (f - \underline{\varphi}(v))$ p.p. (quand $n \to +\infty$) et $\|\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v)\|_\infty \le M_1 + M_2$ (pour tout n) avec $M_1 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le C\}$ et $M_2 = \max\{|\varphi(s)|, |s| \le \|v\|_\infty\}$ (pour tout n).*

   — *$(u_n - v) \to (u - v)$ faiblement dans L^1 (quand $n \to +\infty$) et $\|u_n - v\|_\infty \le C + \|v\|_\infty$.*

   On peut utiliser la question 2 (c) et en déduire que $\int (\underline{\varphi}(u_n) - \underline{\varphi}(v))(u_n - v)d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v)d\lambda$ quand $n \to +\infty$ et donc :

   $$\int (f - \underline{\varphi}(v))(u - v)d\lambda \ge 0.$$

   (b) Soit $w \in L^\infty$. Montrer que $\int (f - \underline{\varphi}(u))w d\lambda \le 0$. [Utiliser la question précédente avec $v = u + (1/n)w$.]

Corrigé – *La question précédente avec $v = u + (1/n)w$ donne :*

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w))w d\lambda \leq 0.$$

Comme φ est continue, on a $\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w) \to \underline{\varphi}(u)$ p.p. quand $n \to +\infty$. On a aussi $|\underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w)| \leq \mathrm{M}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $\mathrm{M} = \max\{|\varphi(s)|, |s| \leq \|u\|_\infty + \|w\|_\infty\}$. Le théorème de convergence dominée donne alors $(f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w)) \to (f - \underline{\varphi}(u))$ dans L^1, quand $n \to +\infty$, et donc, comme $w \in \mathrm{L}^\infty$:

$$\int (f - \underline{\varphi}(u + \frac{1}{n}w))w d\lambda \to \int (f - \underline{\varphi}(u))w d\lambda.$$

On en déduit que $\int (f - \underline{\varphi}(u))w d\lambda \leq 0$.

(c) Montrer que $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

Corrigé – *On choisit des représentants de f et $\underline{\varphi}(u)$ et on pose*

$$w = \mathrm{sign}(f - \underline{\varphi}(u))1_{\{f \neq \underline{\varphi}(u)\}}.$$

La question précédente donne alors, avec ce choix de w, $\|f - \underline{\varphi}(u)\|_1 = 0$ et donc $f = \underline{\varphi}(u)$ p.p..

9. On définit u_n, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 1$ p.p. sur $]2k/2n, (2k+1)/2n[$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, et $u_n = -1$ p.p. sur $]2k-1/2n, 2k/2n[$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\phi \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Corrigé – *Cette question et la suivante ont déjà faites dans l'exercice 6.55. On reprend la même démonstration.*

Soit $\phi \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$. On a :

$$\int u_n \phi d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}} (\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n}))dx.$$

On en déduit, grâce à la continuité uniforme de ϕ :

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq \int_0^{1-\frac{1}{2}n} |\phi(x) - \phi(x + \frac{1}{2n})|dx \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.91}$$

(b) Montrer que $u_n \to 0$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$. [On pourra, par exemple, utiliser la densité de $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ dans L^1.] Montrer que $u_n \not\to 0$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\phi \in \mathrm{L}^1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\psi \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ t.q. $\|\phi - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. On a alors :*

$$|\int u_n \phi d\lambda| \leq |\int u_n \psi d\lambda| + |\int u_n(\psi - \phi)d\lambda| \leq |\int_0^1 u_n \psi d\lambda| + \varepsilon.$$

Comme $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$, *on peut utiliser la question précédente. Il existe donc* $n(\varepsilon)$ *t.q.* $|\int_0^1 u_n \psi d\lambda| \le \varepsilon$ *pour* $n \ge n(\varepsilon)$, *et donc :*

$$n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow |\int u_n \phi d\lambda| \le 2\varepsilon.$$

Ceci donne que $\int u_n \phi d\lambda \to 0$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $\phi \in L^1$.

On en déduit bien que $u_n \to 0$ *faiblement dans* L^1 *car* $L^\infty \subset L^1$.

D'autre part, $u_n \not\to 0$ *dans* L^1, *quand* $n \to +\infty$, *car* $\|u_n\|_1 = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(c) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. et $f \ne \underline{\varphi}(0)$ p.p.. (et donc φ n'est pas croissante et n'est pas injective).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $\varphi(s) = s^2$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$. *On a alors* $\underline{\varphi}(u_n) = 1$ *p.p. pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc* $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ *p.p. avec* $f = 1$ *p.p. alors que* $\underline{\varphi}(0) = 0$ *p.p..*

(d) Donner un exemple de fonction $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ croissante pour lequel $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ p.p. (et donc $f = \underline{\varphi}(0)$ p.p., par la question 8, et φ est non injective, par les questions 7 et 9 (b)).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $\varphi(s) = 0$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$. *On a alors* $\underline{\varphi}(u_n) = 0$ *p.p. pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc* $\underline{\varphi}(u_n) \to f$ *p.p. avec* $f = \underline{\varphi}(0) = 0$ *p.p..*

Exercice 6.59 (Convergences faible et forte dans L^1) Soit (X, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$, $f \in L^1$ et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que

- $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n g dm \to \int f g dm$ pour tout $g \in L^\infty$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \ge C$ p.p..

1. Montrer que $f \ge C$ p.p..

Corrigé – *Comme d'habitude, on choisit des représentants pour* f *et* f_n, $n \in \mathbb{N}$. *On pose* $g = 1_A$ *avec* $A = \{f < C\}$. *Comme* $g \in L^\infty$, *on a*

$$\int f_n g dm \to \int f g dm, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{6.92}$$

Mais, comme $f_n \ge C$ *p.p., on a* $\int f_n g dm = \int_A f_n dm \ge Cm(A)$. *on en déduit, grâce à (6.92),*

$$\int_A f dm = \int f g \ge Cm(A) = \int_A C dm.$$

On a donc $\int (C - f)1_A dm \le 0$. *Comme* $(C - f)1_A \ge 0$, *on a donc nécessairement* $(C - f)1_A = 0$ *p.p.. Enfin, comme* $f < C$ *sur* A, *on a donc* $m(A) = 0$, *ce qui donne* $f \ge C$ *p.p..*

2. On suppose maintenant que $f = \mathrm{C}$ p.p..
   Montrer que $f_n \to f$ dans L^1 (c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$).

   Corrigé – *En prenant $g = 1_\mathrm{X}$, on a $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$. On remarque maintenant que $f_n \geq \mathrm{C} = f$ p.p.. On a donc*

$$\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| dm = \int (f_n - f) dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 6.60 (Dans l^1, convergence faible = convergence forte)

On pose

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R};\, \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$
$$l^1 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R};\, \textstyle\sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$ on pose $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|$.

1. Montrer que l^∞ et l^1 sont des espaces de Banach.
2. Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.
   On définit $\mathrm{T}_y : l^1 \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{T}_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n, \ \forall x \in l^1.$$

   (Remarquer que la série $\sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ est bien convergente, pour tout $x \in l^1$.)
   Montrer que $\mathrm{T}_y \in (l^1)'$, et que $\|\mathrm{T}_y\|_{(l^1)'} = \|y\|_\infty$.
3. Soit $\mathrm{T} \in (l^1)'$. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ tel que $\mathrm{T} = \mathrm{T}_y$.
   [On pourra poser $y_n = \mathrm{T}(e^{(n)})$, avec $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$.]
4. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ une suite telle que
   i) $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i^{(n)} \to 0$, quand $n \to \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
   ii) $\|x^{(n)}\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et trouver une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$\alpha_k < a_{k+1}, \sum_{i=0}^{\alpha_k} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \sum_{i=\alpha_k+1}^{\alpha_{k+1}} |x_i^{(n_k)}| \geq \frac{3}{5}, \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^{\infty} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ telle que $\mathrm{T}_y(x^{(n_k)}) \geq \frac{1}{5}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($(x^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ donnée en a.).

5. Soient $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset l^1$ et $x \in l^1$. Montrer que $x^{(n)} \to x$ faiblement dans l^1 (c'est-à-dire $\mathrm{T}(x^{(n)}) \to \mathrm{T}(x)$ pour tout $\mathrm{T} \in (l^1)'$) si et seulement si $x^{(n)} \to x$ dans l^1.

Exercice 6.61 (Convergence étroite de mesures) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on rappelle que "m_n finie" signifie que "$m_n(\mathbb{R}) < \infty$") et m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On rappelle que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

On suppose que :

$$\int g\,dm_n \to \int g\,dm, \text{ pour tout } g \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Soit $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On ne suppose pas que f est bornée, mais on suppose que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\alpha < \infty$.

   Corrigé – *La fonction constante et égale à* 1 *appartient à* $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. L'hypothèse donne donc* $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$*, quand* $n \to +\infty$*. La suite* $(m_n(\mathbb{R}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée (car convergente dans* $\mathbb{R}$*), ce qui donne* $\alpha < \infty$*.*

2. On suppose, dans cette question, que :

$$\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty.$$

(a) Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact et t.q. $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de α et β (définis ci-dessus), t.q. :

$$\int |f|\varphi\,dm \leq \mathrm{C}.$$

Corrigé – *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :*

$$\int |f|\varphi\,dm_n \leq \left(\int f^2 dm_n\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int \varphi^2 dm_n\right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta^{\frac{1}{2}} m_n(\mathbb{R})^{\frac{1}{2}} \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $|f|\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, l'hypothèse donne*

$$\int |f|\varphi\,dm = \lim_{n\to+\infty} \int |f|\varphi\,dm_n.$$

On déduit donc de la majoration précédente que $\int |f|\varphi\,dm \leq (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

Corrigé – *On définit φ_1 en posant :*

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = 1, \text{ si } 0 \le x \le 1,\\
&\varphi_1(x) = 2 - x, \text{ si } 1 < x \le 2,\\
&\varphi_1(x) = 0, \text{ si } 2 < x,\\
&\varphi_1(x) = \varphi_1(-x), \text{ si } x < 0.
\end{aligned}$$

Puis, pour $p \ge 2$, $\varphi_p(x) = \varphi_1(\frac{x}{p})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La question précédente donne $\int |f|\varphi_p dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p \ge 1$. Comme la suite $(\varphi_p)_{p\ge1}$ converge simplement et en croissant vers la fonction constante égale à 1, le théorème de convergence monotone donne que $\int |f| dm \le (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$.

(c) Montrer que $\displaystyle\int f dm_n \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On utilise encore la suite $(\varphi_p)_{p\ge1}$ définie à la question précédente et on remarque que, pour tout $p \ge 1$,*

$$\begin{aligned}
|\int f dm_n - \int f dm| \le \int |f|(1-\varphi_p) dm_n + \int |f|(1-\varphi_p) dm&\\
+|\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm|.&
\end{aligned} \tag{6.93}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $p \ge 1$, on a $|f|(1-\varphi_p) \le |f|$ p.p.. Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ p.p. et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne $\int |f|(1-\varphi_p) dm \to 0$ quand $p \to \infty$. Il existe donc $p_0 \ge 1$ t.q.

$$p \ge p_0 \Rightarrow \int |f|(1-\varphi_p) dm \le \varepsilon.$$

En utilisant encore le théorème de convergence dominée (les constantes étant intégrables pour la mesure m), il existe aussi $p_1 \ge 1$ t.q.

$$p \ge p_1 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm < \varepsilon^2.$$

On choisit maintenant $p = \max(p_0, p_1)$. Comme $(1-\varphi_p) \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a donc $\int (1-\varphi_p) dm_n \to \int (1-\varphi_p) dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \beta \int (1-\varphi_p) dm_n < \varepsilon^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $(1-\varphi_p)^2 \le (1-\varphi_p)$, on en déduit, pour $n \ge n_0$,

$$\int |f|(1-\varphi_p) dm_n \le \beta^{\frac{1}{2}} (\int (1-\varphi_p) dm_n)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon.$$

Enfin, comme $f\varphi_p \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $\int f\varphi_p dm_n \to \int f\varphi_p dm$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n_1 t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow |\int f\varphi_p dm_n - \int f\varphi_p dm| \le \varepsilon.$$

Finalement, avec ce choix de $p = \max(p_0, p_1)$*, on déduit donc de (6.93) que*

$$n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |\int f dm_n - \int f dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\int f dm_n \to \int f dm$*, quand* $n \to +\infty$*.*

3. On ne suppose plus que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f|^2 dm_n < \infty$.

   Montrer (en choisissant convenablement $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, m et f) que l'on peut avoir $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$.

   Corrigé – *On peut prendre, par exemple,* $m_0 = 0$ *et, pour* $n \geq 1$, $m_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\delta_p$ *(où* δ_p *est la masse de Dirac en* p*). On prend* f *définie par* $f(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Les hypothèses sur la suite* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* m *sont bien vérifiées avec* $m = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}\delta_p$*.*

   On a bien $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *mais* $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$*.*

Exercice 6.62 (Convergence faible et convexité) Dans cet exercice (E, T, m) est un espace mesuré et on suppose que la mesure m est $\sigma-$finie.. Pour tout $1 \leq r \leq \infty$, on note L^r l'espace $L^r(E, T, m)$ (et $\mathcal{L}^r$ l'espace $\mathcal{L}^r(E, T, m)$). Soit $1 \leq p < \infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p quand $n \to +\infty$ (on rappelle que ceci signifie $T(u_n) \to T(u)$, quand $n \to +\infty$, pour tout T dans $(L^p)'$, c'est-à-dire dans le dual topologique de L^p).

1. On pose $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$. Montrer que, pour tout $v \in L^r$:

$$\int u_n v dm \to \int u v dm.$$

   Corrigé – *Soit* $v \in L^r$*. Pour tout* $w \in L^p$*, on pose* $T(w) = \int w v dm$*. Comme cela a été vu en cours, l'inégalité de Hölder (proposition 6.26) donne que* $T \in (L^p)'$*, on a donc* $T(u) = \lim_{n\to+\infty} T(u_n)$*.*

   Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que φ est strictement convexe (ce qui est équivalent à dire que φ' est strictement croissante).

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_a(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)$.

   (a) Montrer que $h_a(x) > 0$ si $x \neq a$.

   Corrigé – *Soit* $x \neq a$*. Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe* $y \in]a, x[$*, si* $x > a$*, ou* $y \in]x, a[$*, si* $x < a$*, t.q.* $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(y)(x-a)$*. On a donc* $h_a(x) = (\varphi'(y) - \varphi'(a))(x-a) > 0$*.*

(b) Montrer que h_a est décroissante sur $]-\infty, a[$ et croissante sur $]a, \infty($.

Corrigé – *La fonction h_a est de classe C^1 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h'_a(x) = \varphi'(x) - \varphi'(a)$. On a donc $h'_a(x) < 0$ si $x < a$ et $h'_a(x) > 0$ si $x > a$.*

Soit $1 \leq q < \infty$. On suppose maintenant que la suite $(\varphi(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^q et qu'elle converge faiblement dans L^q, quand $n \to +\infty$, vers une (classe de) fonction(s) $\overline{\varphi} \in L^q$.

Précision de notation : On choisit un représentant pour u_n. On désigne alors par $\varphi(u_n)$ la fonction (de E dans $\mathbb{R}$) $x \mapsto \varphi(u_n(x))$. Cette fonction est supposée être dans $\mathcal{L}^q$ et on l'identifie, comme d'habitude, avec l'élément de L^q qu'elle représente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = [\varphi(u_n) - \varphi(u) - \varphi'(u)(u_n - u)]$.

Précision de notation : Ici aussi, pour définir f_n, on choisit un représentant pour u. On désigne alors par $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ les fonctions $x \mapsto \varphi(u(x))$ et $x \mapsto \varphi'(u(x))$.

3. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. On pose $A_k = \{|u| \leq k\}$ (c'est-à-dire $A_k = \{x \in E$ t.q. $|u(x)| \leq k\}$.

Montrer que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *la fonction φ' est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée sur $[-k, k]$. On en déduit que $\varphi'(u)1_{A_k} \in L^\infty$. Comme $m(B) < \infty$, on a donc $\varphi'(u)1_{A_k}1_B \in L^r$ pour tout $r \in [1, \infty]$ en en particulier si r est le conjugué de p (c'est-à-dire $r = p/(p-1)$ si $p > 1$ et $r = \infty$, si $p = 1$). La question 1 donne donc :*

$$\int \varphi'(u) 1_{A_k} 1_B (u_n - u) dm \to 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Puis, comme $\varphi(u_n) \to \overline{\varphi}$ faiblement dans L^q et que $1_{A_k}1_B \in L^r$ où r est maintenant le conjugué de q, on a aussi :

$$\int \varphi(u_n) 1_{A_k} 1_B dm \to \int \overline{\varphi} 1_{A_k} 1_B dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Enfin, on remarque que $\varphi(u)1_{A_k}1_B \in L^1$ (car $m(B) < \infty$ et φ bornée sur $[-k, k]$), ce qui donne finalement que $f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to \int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm$, quand $n \to +\infty$.

4. Montrer $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. [Utiliser les questions 2(a) et 3.]

Corrigé – *La question 2(a) donne que $f_n \geq 0$ p.p.. On a donc, grâce à la question 3, avec les notations de la question 3 :*

$$\int (\overline{\varphi} - \varphi(u)) 1_{A_k} 1_B dm \geq 0, \tag{6.94}$$

pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$.

On va déduire de (6.94) que $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p.. Pour cela, On choisit des représentants de u et $\overline{\varphi}$ et on pose $N = \{\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0\} = \{x \in E\,;\, \overline{\varphi}(x) - \varphi(u(x)) < 0\}$.

Comme m est σ–finie, il existe une suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset T$ t.q. $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme u prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc aussi $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(E_p \cap A_p)$ et finalement $N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$, avec $N_p = N \cap E_p \cap A_p$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on prend $k = p$ et $B = E_p \cap N$ dans (6.94), de sorte que $A_k \cap B = A_p \cap E_p \cap N = N_p$. Comme $\overline{\varphi} - \varphi(u) < 0$ sur N_p, on obtient que $(\overline{\varphi} - \varphi(u))1_{N_p} = 0$ p.p. et donc $m(N_p) = 0$. Comme $N = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} N_p$, on a finalement $m(N) = 0$ et donc $\overline{\varphi} \geq \varphi(u)$ p.p..

On suppose maintenant que $\overline{\varphi} = \varphi(u)$ p.p..

5. Soit $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_k = \{|u| \leq k\}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.

   Corrigé – *La question 2(a) donne $f_n \geq 0$ p.p. (pour tout n) et la question 3 donne que $f_n 1_{A_k\cap B} = f_n 1_{A_k} 1_B \in L^1$ et $\|f_n 1_{A_k} 1_B\|_1 = \int f_n 1_{A_k} 1_B dm \to 0$, quand $n \to +\infty$. D'après la réciproque partielle de convergence dominée (théorème 4.49), la suite $(f_n 1_{A_k} 1_B)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une sous-suite convergeant p.p. vers 0. Autrement dit, il existe une application strictement croissante ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_k \cap B$.*

6. (Question plus difficile.) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers 0 sur E. [Utiliser le fait que la mesure m est σ–finie et un procédé diagonal.]

   Corrigé – *On reprend la suite $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ introduite à la question 4 (c'est-à-dire $(E_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset T$ t.q. $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} E_p$, $m(E_p) < \infty$ et $E_p \subset E_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$).*

   La question 5 donne que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Plus précisément, le raisonnement de la question 5 donne que de toute sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite convergeant p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(A_p \cap E_p)$, le procédé diagonal va nous permettre ci après de construire une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant p.p. vers 0 sur E.

   Dans une première étape, on montre par récurrence l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$.

   L'existence de ψ_1 découle de de la question 5 avec $k = 1$ et $B = E_1$. Puis, pour $p \geq 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le raisonnement de la question 5 avec la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $k = p+1$ et $B = E_{p+1}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_{p+1} \cap E_{p+1}$, ce qui termine la récurrence.

   La deuxième étape (procédé diagonal) consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

   $$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

   La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et on va montrer que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E). En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

   $$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite, à partir de $n = p$, de la suite $(f_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci prouve que $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 sur $A_p \cap E_p$. Comme $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(A_p \cap E_p)$, on en déduit bien que la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0 (sur E).

7. Soit $x \in E$ t.q. $f_n(x) \to 0$, montrer que $u_n(x) \to u(x)$. [Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, limite d'une sous-suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Utiliser la question 2 pour montrer que $b = u(x)$.]

Corrigé – *Le point x est ici fixé. On pose $a = u(x)$. On remarque alors que $f_n(x) = h_a(u_n(x))$ (avec h_a défini à la question 2).*

Si la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite, que $u_n(x) \notin [a-1, a+1]$ pour tout n (on peut même supposer que $|u_n(x)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$). On a donc, grâce à la question 2 :

$$f_n(x) = h_a(u_n(x)) \geq \min(h_a(a+1), h_a(a-1)) > 0,$$

en contradiction avec $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Si b est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une sous suite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $b = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = h_a(b)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la question 2(a) donne $b = a$. On a ainsi montré que $u(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que $u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers u.

Corrigé – *La question 6 montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers 0. Il existe donc ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers 0. Le raisonnement de la question 7 montre que*

$$x \in E, \lim_{n\to+\infty} f_{\psi(n)}(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x).$$

On en déduit que $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. vers u.

9. On suppose ici que $p > 1$. Montrer que $u_n 1_B \to u 1_B$ dans L^r pour tout $r \in [1, p[$ et tout $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$. [Utiliser l'exercice 6.21.]

Corrigé – *On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $r \in [1, p[$ et $B \in T$ t.q. $m(B) < \infty$ et $u_n 1_B \not\to u 1_B$ dans L^r. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec g strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), t.q.*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|u_{g(n)} 1_B - u 1_B\|_r \geq \varepsilon. \tag{6.95}$$

La suite $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par la question 8, on peut donc extraire de $(u_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant p.p. vers u. Cette sous-suite, notée $(u_{g\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$), étant bornée dans L^p, la compacité L^p-L^q (exercice 6.21) donne que $u_{g\circ\psi(n)})1_B \to u 1_B$ dans L^r, en contradiction avec (6.95).

10. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\varphi(s) = s^2$, donner un exemple pour lequel $u_n \not\to u$ p.p. sur E (toutefois, d'après la question 8, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergeant p.p. vers u).

Corrigé – *Il suffit de reprendre l'exemple vu en cours pour montrer que la convergence* L^1 *n'entraîne pas la convergence p.p.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, *il existe un unique* $m \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ *et on a :*

$$n = \frac{m(m-1)}{2} + k \text{ avec } k \in \{0, \ldots m-1\}.$$

On prend alors $u_n = 1_{]\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]}$.

On remarque que $\|u_n\|_p^p = \frac{1}{m}$ *pour* $n \in \{\frac{m(m-1)}{2}, \ldots, \frac{m(m+1)}{2} - 1\}$ *et donc* $u_n \to 0$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $\varphi(u_n) = u_n$, *on a aussi* $\varphi(u_n) \to 0$ *dans* L^q *quand* $n \to +\infty$ *(et donc* $\overline{\varphi} = \varphi(u)$*). Enfin, pour cet exemple,* $u_n \not\to 0$ *p.p.*

Exercice 6.63 (Produit de convergences faibles) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $\alpha, \beta > 0$. Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on définit ψ_a de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\psi_a(t) = (t^\alpha - a^\alpha)(t^\beta - a^\beta)$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\psi_a(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

Corrigé – *Les fonctions* $t \mapsto t^\alpha$ *et* $t \mapsto t^\beta$ *sont strictement croissantes de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$. *On en déduit bien que* $\psi_a(t) > 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq a$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives appartenant à L^∞ et $l_\alpha, l_\beta, l_{\alpha+\beta} \in L^\infty$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞ et que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$-faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$, pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = \alpha + \beta$.

On rappelle que $f_n^\gamma \to l_\gamma$ $\star$-faiblement dans L^∞ signifie que $\int f_n^\gamma \varphi dm \to \int l_\gamma \varphi dm$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in L^1$.

2. Soit $\varphi \in L^1$ t.q. $\varphi \geq 0$ p.p.. Montrer que $\int l_\alpha \varphi dm \geq 0$.

Corrigé – *Comme* $f_n \geq 0$ *p.p., et* $\varphi \geq 0$ *p.p., on a* $\int f_n^\alpha \varphi dm \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $f_n^\alpha \to l_\alpha$ $\star$*-faiblement dans* L^∞, *on en déduit*

$$\int l_\alpha \varphi dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n^\alpha \varphi dm \geq 0.$$

3. Montrer que $l_\alpha \geq 0$ p.p..

Corrigé – *On pose* $A = \{l_\alpha < 0\}$ *(ceci sous entend qu'on a choisit un représentant de* l_α, *on a ainsi* $l_\alpha \in \mathcal{L}^\infty$*) et* $\varphi = 1_A$ *(de sorte que* $\varphi \in L^1$ *et* $\varphi \geq 0$ *p.p.). La question précédente donne alors*

$$\int_A l_\alpha dm = \int l_\alpha \varphi dm \geq 0.$$

Comme $l_\alpha < 0$ *sur* A, *on en déduit que* $m(A) = 0$ *et donc* $l_\alpha \geq 0$ *p.p..*

(Le même raisonnement donne, bien sûr, $l_\beta \geq 0$ *p.p. et* $l_{\alpha+\beta} \geq 0$ *p.p..)*

4. Montrer que $l_{\alpha+\beta} \geq l_\alpha l_\beta$ p.p.. [On pourra utiliser $\psi_a(t) \geq 0$ avec $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$.]

Corrigé – *Grâce à la question précédente, on peut choisir un représentant de l_α de sorte que $l_\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. On peut aussi supposer que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. En prenant $t = f_n(x)$ et $a = (l_\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha}}$, on obtient comme $\psi(t) \geq 0$, pour tout $x \in E$,*

$$(f_n^\alpha(x) - l_\alpha(x))(f_n^\beta(x) - l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)) \geq 0.$$

Ce qui peut s'écrire

$$f_n^{\alpha+\beta}(x) + l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}(x) \geq l_\alpha(x) f_n^\beta(x) + f_n^\alpha(x) l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}(x).$$

Soit $\varphi \in L^1$, $\varphi \geq 0$ p.p.. L'inégalité précédente nous donne

$$\int f_n^{\alpha+\beta}\varphi dm + \int l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\varphi dm \geq \int f_n^\beta l_\alpha \varphi dm + \int f_n^\alpha l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}\varphi dm.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient donc

$$\int l_{\alpha+\beta}\varphi dm + \int l_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\varphi dm \geq \int l_\beta l_\alpha \varphi dm + \int l_\alpha l_\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}\varphi dm,$$

et donc

$$\int (l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha)\varphi dm \geq 0.$$

En prenant $\varphi = 1_A$ avec $A = \{l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha < 0\}$ on en déduit que $m(A) = 0$ et donc $l_{\alpha+\beta} - l_\beta l_\alpha \geq 0$ p.p..

5. On suppose maintenant que $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p.. On pose $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $g_n = (f_n^\alpha - f^\alpha)(f_n^\beta - f^\beta)$.

(a) Montrer que $g_n \to 0$ dans L^1, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On remarque que*

$$0 \leq \int g_n dm = \int f_n^{\alpha+\beta} dm + \int f^\alpha f^\beta dm - \int f_n^\beta f^\alpha dm - \int f_n^\alpha f^\beta dm.$$

Quand $n \to +\infty$, le terme de droite de cette égalité tend vers I avec

$$I = \int l_{\alpha+\beta} dm + \int f^\alpha f^\beta dm - \int l_\beta f^\alpha dm - \int l_\alpha f^\beta dm.$$

Comme $f = l_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ et $l_{\alpha+\beta} = l_\alpha l_\beta$ p.p., on a $I = 0$. On en déduit bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n dm = 0$$

et donc (comme $g_n \geq 0$ p.p.) que $g_n \to 0$ dans L^1.

(b) Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$. Montrer que $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – *Comme $g_n \to 0$ dans L^1, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge p.p. vers 0. Il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante t.q. $g_{\varphi(n)} \to 0$ p.p., quand $n \to +\infty$. En choisissant des représentants des fonctions composant g_n, il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} g_{\varphi(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$.*

Soit $x \in A^c$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}(f^{\alpha}_{\varphi(n)}(x) - f^{\alpha}(x))(f^{\beta}_{\varphi(n)}(x) - f^{\beta}(x)) = 0. \tag{6.96}$$

On en déduit tout d'abord que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puis, si η est une valeur d'adhérence de la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, on doit avoir, grâce à (6.96),

$$\psi_{f(x)}(\eta) = (\eta^{\alpha} - f^{\alpha}(x))(\eta^{\beta} - f^{\beta}(x)) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $\eta = f(x)$ (d'après la question 1). On en déduit que $f(x)$ est la seule valeur d'adhérence de la suite bornée $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x) = f(x).$$

Ce qui donne bien $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p..

(Noter que, de cette convergence p.p., on déduit, par convergence dominée, une convergence de $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans L^q pour tout $q \in [1, +\infty[$.)

(c) Montrer que $f_n \to f$ dans L^q, quand $n \to +\infty$, pour tout $q \in [1, \infty[$.

Corrigé – *Soit $q \in [1, +\infty[$. Si $f_n \not\to f$ dans L^q, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite, encore notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour ne pas alourdir la rédaction), t.q.*

$$\|f_n - f\|_q \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{6.97}$$

En utilisant le raisonnement de la question précédente, on peut alors extraire de cette sous-suite une nouvelle sous-suite, toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \to f$ p.p.. Par convergence dominée, on en déduit alors que $f_n \to f$ dans L^q, en contradiction avec (6.97).

Exercice 6.64 (Produit de convergences faibles et non–linéarité) Soit (X, T, m) un espace mesuré fini (c'est-à-dire $m(X) < +\infty$). On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(X, T, m)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées de L^2 et $u, v \in L^2$. On suppose que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement dans L^2 vers u et v. On rappelle que ceci signifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\int u_n w\,dm = \int uw\,dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int v_n w\,dm = \int vw\,dm \text{ pour tout } w \in L^2.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, que $v_n = u_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc $u = v$ p.p.). Montrer que $u_n \to u$ dans L^2 (quand $n \to +\infty$) si et seulement si $\int u_n^2 dm \to \int u^2 dm$ (quand $n \to +\infty$).

   Corrigé – *On remarque que*

$$\|u_n - u\|_2^2 = \int u_n^2 dm + \int u^2 dm - 2\int u_n u\,dm. \tag{6.98}$$

Comme $u_n \to u$ faiblement dans L^2, on a $\lim_{n\to+\infty}\int u_n u\,dm = \int u^2 dm$. On déduit alors facilement de (6.98) que $u_n \to u$ dans L^2 si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\int u_n^2 dm = \int u^2 dm$.

On suppose pour toute la suite de l'exercice que $\int u_n v_n\,dm \to \int uv\,dm$ (quand $n \to +\infty$) et qu'il existe une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q.

— φ continue et il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(s) \le C + C|s|$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

— $v_n = \varphi(u_n)$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $w \in L^2$, montrer que, quand $n \to +\infty$,

$$\int(\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)\,dm \to \int(v - \varphi(w))(u - w)\,dm. \tag{6.99}$$

Corrigé – *On commence par remarquer que $\varphi(w) \in L^2$ (grâce aux hypothèses sur φ et $m(X) < +\infty$). On a alors*

$$\int(\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w) = \int(v_n u_n - v_n w - \varphi(w)u_n + \varphi(w)w)dm.$$

Les convergences faibles de u_n et v_n vers u et v donnent

$$\lim_{n\to+\infty}\int u_n\varphi(w)dm = \int u\varphi(w)dm \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int v_n w\,dm = \int vw\,dm.$$

Enfin on a, par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty}\int u_n v_n dm = \int uv\,dm$. On en déduit que bien que

$$\lim_{n\to+\infty}(\varphi(u_n) - \varphi(w))(u_n - w)dm = \int(v - \varphi(w))(u - w)dm.$$

3. On suppose que φ est croissante.

(a) Soit $\bar{w} \in L^2$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int(v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\,dm \le 0.$$

[Utiliser (6.99).] En déduire que $\int(v - \varphi(u))\bar{w}\,dm = 0$.

Corrigé – *On utilise ici (6.99) avec $w = u + t\bar{w}$. On obtient, quand $n \to +\infty$,*

$$\int(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})\,dm \to -\int(v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\,dm.$$

Comme φ est croissante, on a $(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w}) \ge 0$ p.p. et donc $\int(\varphi(u_n) - \varphi(u + t\bar{w}))(u_n - u - t\bar{w})dm \ge 0$. On en déduit, quand $n \to +\infty$, $\int(v - \varphi(u + t\bar{w}))t\bar{w}\,dm \le 0$.

En prenant $t = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$), on a donc $\int(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w} \le 0$. En appliquant le théorème de convergence dominée (remarquer que $|(v - \varphi(u + \frac{\bar{w}}{m}))\bar{w}| \le F$ p.p. avec $F = (|v| + C + C|u| + C|\bar{w}|)|\bar{w}| \in L^1$), on obtient, quand $m \to \infty$,

$$\int(v - \varphi(u))\bar{w}dm \le 0.$$

De même, en prenant $t = -\frac{1}{m}$, on montre $\int (v - \varphi(u))\bar{w}dm \geq 0$. On a donc $\int (v - \varphi(u))\bar{w}dm = 0$.

(b) Montrer que $v = \varphi(u)$ p.p..

Corrigé – *On choisit $\bar{w} = 1_A - 1_{A^c}$, avec $A = \{v - \varphi(u) \geq 0\}$. La question précédente donne alors $\int |v - \varphi(u)|dm = 0$ et donc $v = \varphi(u)$ p.p..*

4. On suppose que φ strictement croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $G_n = (\varphi(u_n) - \varphi(u))(u_n - u)$.

(a) Montrer que $G_n \to 0$ dans L^1 quand $n \to +\infty$ (utiliser (6.99)).

Corrigé – *En prenant $w = u$ dans (6.99), on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int G_n dm = 0$. Comme φ est croissante, on a $G_n \geq 0$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\|G_n\|_1 = \int G_n dm$. On en déduit bien que $G_n \to 0$ dans L^1.*

(b) Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p.. En déduire que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p. (utiliser la croissance stricte de φ).

Corrigé – *Comme $G_n \to 0$ dans L^1, il existe une sous-suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(G_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec ψ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) t.q. $G_{\psi(n)} \to 0$ p.p. (c'est la réciproque partielle du théorème de convergence dominée). Il existe donc $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $G_{\psi(n)}(x) \to 0$ (quand $n \to +\infty$) si $x \in A^c$.*

Soit $x \in A^c$. On pose $a = u(s)$. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $f(s) = (\varphi(s) - \varphi(a))|s - a|$. Comme φ est strictement croissante continue, la fonction f est aussi strictement croissante continue. Elle admet donc une fonction réciproque, notée g, qui est continue. Comme $|f(u_{\psi(n)}(x)| = G_{\psi(n)}(x) \to 0$, on a $f(u_{\psi(n)}(x)) \to 0$ et donc $u_{\psi(n)}(x) = g(f(u_{\psi(n)}(x)) \to g(0) = a$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(x) = u(x)$ pour tout $x \in A^c$, ce qui prouve bien que $u_{\psi(n)} \to u$ p.p..

(c) Montrer que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.

Corrigé – *On montre que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$ en raisonnant pas l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in [1, 2[$ t.q. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers u dans L^p. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. Par le raisonnement de la question précédente, de cette sous-suite, un peut extraire une sous-suite, notée $(u_n)_{\psi(n)}$ qui converge p.p. vers u. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^2, on peut alors montrer que cette sous-suite converge dans L^p vers u (c'est une conséquence, vue en exercice, du théorème de Vitali). En contradiction avec le fait que cette sous-suite reste en dehors de la boule (de L^p) de centre u et de rayon ε. On a ainsi montré que $u_n \to u$ dans L^p pour tout $p \in [1, 2[$.*

Exercice 6.65 (Convergence faible contre convergence forte) Soit (E, T, m) un espace mesuré. On suppose que m est σ-finie. Pour $r \in [1, \infty]$, on note L^r l'espace

$L^r_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ (et L^r est muni de sa norme usuelle). Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^q.

1. On suppose ici que $p \in [1, \infty[$ (et donc $q \in]1, \infty]$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^q, quand $n \to +\infty$, et $f_n \to f$ faiblement dans L^p, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $T(f_n) \to T(f)$ pour toute application linéaire continue T de L^p dans $\mathbb{R}$).
   (a) Montrer que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$, pour tout $\psi \in L^q$.
   (b) Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.
2. On suppose ici que $p = \infty$ (et donc $q = 1$), $\varphi_n \to \varphi$ dans L^1, quand $n \to +\infty$, et $f_n \to f$ $\star$−faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$ (c'est-à-dire que $\int f_n \psi dm \to \int f \psi dm$ pour tout $\psi \in L^1$). Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$.

On suppose pour la suite de l'exercice que $p = 1$ (et donc $q = \infty$) et $m(E) < \infty$.

3. Montrer que $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞, quand $n \to +\infty$, implique :
   (p1) $\varphi_n \to \varphi$ p.p. quand $n \to +\infty$.
4. Montrer, en prenant (par exemple) $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$ que (p1) n'implique pas $\varphi_n \to \varphi$ dans L^∞ quand $n \to +\infty$. [Il faut donc trouver une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée de L^∞ et $\varphi \in L^\infty$ t.q. $\varphi_n \to \varphi$ p.p., quand $n \to +\infty$, et $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \not\to 0$, quand $n \to +\infty$.]

On suppose maintenant que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (p1) et que :

(p2) $f_n \to f$ faiblement dans L^1, quand $n \to +\infty$,

5. Montrer que $\varphi \in L^\infty$ (au sens "il existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{L}^\infty(E, T, m)$ t.q. $\varphi = \bar{\varphi}$ p.p."). [On rappelle que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, par hypothèse, bornée dans L^∞.]
6. On admet que (p2) implique l'équi-intégrabilité de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } A \in T,\ m(A) \leq \delta,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

   Montrer que $\int f_n \varphi_n dm \to \int f \varphi dm$. [On pourra utiliser le théorème d'Egorov.]

Exercice 6.66 (Théorème de Dunford-Pettis) Soit (E, T, m) un espace mesuré fini. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q.

$$A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente dans L^1.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\{|f_n| \geq M\}} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

   On suppose maintenant, pour les deux questions suivantes, que $f_n \geq 0$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_{n,M} = \min\{f_n, M\}$.

2. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(f_{n,M})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente dans L^1.
3. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe une suite $(g_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$ de L^1 t.q., pour tout $M \in \mathbb{N}^*$

$$f_{n,M} \to g_M \text{ faiblement dans } L^1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

   [Utiliser le procédé diagonal, décrit, par exemple, dans la proposition 8.19.]

   (a) Montrer que la suite $(g_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans L^1.

   (b) On note g la limite (dans L^1) de la suite $(g_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $f_n \to f$ faiblement dans L^1 quand $n \to +\infty$.

4. On ne suppose que les fonctions sont positives p.p.. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite faiblement convergente dans L^1.

Exercice 6.67 (Convergence étroite et mesures des intervalles) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to +\infty$, et que m est diffuse (c'est-à-dire que $m(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, montrer que $m_n(I) \to m(I)$ quand $n \to +\infty$. Montrer (en donnant un contre-exemple) que cette propriété peut être fausse si m n'est pas diffuse.

Corrigé – *On remarque tout d'abord que $m_n(I) \to m(I)$ si $I = \mathbb{R}$, car $\int 1_{\mathbb{R}} dm_n \to \int 1_{\mathbb{R}} dm$.*

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$, on va montrer que $m_n(I) \to m(I)$ si $I =]-\infty, a]$ ou $I =]-\infty, a[$. Pour cela, on définit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, φ_p, $\psi_p \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en posant :

$$\varphi_p(x) = 1 \text{ si } x \leq a - \frac{1}{p},$$
$$\varphi_p(x) = -p(x-a) \text{ si } a - \frac{1}{p} < x < a,$$
$$\varphi_p(x) = 0 \text{ si } a \leq x,$$
$$\psi_p(x) = \varphi_p(x - \frac{1}{p}) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Comme $\varphi_p \leq 1_I \leq \psi_p$ on a $\int \varphi_p dm_n \leq m_n(I) \leq \int \psi_p dm_n$ pour tout p, $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{R}$:

$$\int \varphi_p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} m_n(I) \leq \limsup_{n\to+\infty} m_n(I) \leq \int \psi_p dm.$$

Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{p\to\infty}\int\varphi_p dm = m(]-\infty,a[) \text{ et } \lim_{p\to\infty}\int\psi_p dm = m(]-\infty,a]).$$

On en déduit

$$m(]-\infty,a[) \le \liminf_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \le \limsup_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \le m(]-\infty,a]).$$

Comme $m(]-\infty,a]) = m(]-\infty,a[) + m(\{a\}) = m(]-\infty,a[) = m(\mathrm{I})$, *on a, finalement,*

$$m(\mathrm{I}) \le \liminf_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \le \limsup_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) \le m(\mathrm{I}),$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) = m(\mathrm{I})$.

En écrivant que $m_n(\mathrm{J}) = m(\mathbb{R})-m(\mathrm{J}^c)$, *il est facile de voir que l'on a aussi* $m_n(\mathrm{J}) \to m(\mathrm{J})$ *pour tout intervalle* J *de la forme* $[a,+\infty[$ *ou* $]a,+\infty[$. *Enfin, si* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, *un intervalle, noté* K, *dont les bornes sont* a *et* b *peut s'écrire comme différence de deux intervalles dont les bornes supérieures sont* a *et* b *et dont la borne inférieure est* $-\infty$. *On en déduit alors facilement que* $m_n(\mathrm{K}) \to m(\mathrm{K})$, *ce qui termine la démonstration.*

La propriété démontré peut être fausse si m *n'est pas diffuse. Pour le voir, il suffit de prendre, par exemple,* $m = \delta_0$ *et* $m_n = \delta_{1/n}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^\star$. *On a bien* $m_n \to m$ *étroitement et pour* $\mathrm{I} =]-\infty,0]$ *(par exemple) on a* $\lim_{n\to+\infty} m_n(\mathrm{I}) = 0 \ne 1 = m(\mathrm{I})$.

Exercice 6.68 (Convergence en loi et fonction de répartition)

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé, $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On note m_n la loi de X_n (pour tout $n\in\mathbb{N}$) et m la loi de X. On note $\mathrm{F_Y}$ la fonction de répartition de Y (pour Y = X ou Y = X_n).

1. On suppose, dans cette question, que X_n converge en loi vers X quand $n\to+\infty$. (c'est-à-dire que $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}_n)) \to \mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}))$ pour tout $\varphi\in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$).

(a) (Question difficile.) Soit $a\in\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{F_X}$ est continue au point a (on dit que a est un point de continuité de $\mathrm{F_X}$).

Montrer que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(a) \to \mathrm{F_X}(a)$ quand $n\to+\infty$.

Corrigé – *On pose* $\varphi = 1_{]-\infty,a]}$ *de sorte que*
$\mathrm{F}_{\mathrm{X}_n}(a) = m_n(]-\infty,a]) = \int_\mathbb{R}\varphi dm_n$ *et* $\mathrm{F_X}(a) = m(]-\infty,a]) = \int_\mathbb{R}\varphi dm$.
On peut construire deux suites de fonctions appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *notées* $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *telles que*

- $\varphi \le \varphi_p \le 1$ *et* $\varphi_p(x)\to\varphi(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *quand* $p\to+\infty$.
- $0 \le \psi_p \le \varphi$ *et* $\varphi_p(x)\to\varphi(x)$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $x\ne a$ *quand* $p\to+\infty$.

Pour construire ψ_p *et* φ_p, *on peut, par exemple, prendre* ψ_p *et* φ_p *affines par morceaux et égales à* φ *sur le complémentaire de l'intervalle* $]a-1/p,a+1/p[$.
Soit $p\in\mathbb{N}$. *Comme* $\psi_p\le\varphi\le\varphi_p$, *on a*

$$\mathrm{E}(\psi_p(\mathrm{X}_n)) = \int_\mathbb{R}\psi_p dm_n \le \int_\mathbb{R}\varphi dm_n \le \int_\mathbb{R}\varphi_p dm_n = \mathrm{E}(\varphi_p(\mathrm{X}_n)).$$

Comme $X_n \to X$ en loi, on en déduit, quand $n \to +\infty$,

$$\mathrm{E}(\psi_p(X)) = \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \\ \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = \mathrm{E}(\varphi_p(X)). \quad (6.100)$$

On peut maintenant faire $p \to +\infty$ dans ces inégalités.
Comme φ_p converge simplement vers φ et est dominée par $1_{\mathbb{R}}$, on a, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On utilise maintenant le fait que F est continue en a, ce qui donne $m(a) = \lim_{k\to+\infty} F(a) - F(a-1/k) = 0$. On a donc $\psi_p \to \varphi$ p.p. pour la mesure m. On peut donc aussi appliquer le théorème de convergence dominée, il donne

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On passe maintenant à la limite quand $p \to +\infty$ dans (6.100) pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On a donc $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

(b) Donner un exemple pour lequel il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F_{X_n}(a) \not\to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de prendre X_n telle que $X_n = 1/n$ p.s. et $X = 0$ p.s.. On a bien que $X_n \to X$ en loi, mais, pour $a = 0$, $F_{X_n}(a) = 0 \not\to 1 = F_X(a)$.*

2. On note C l'ensemble des points de continuité de F_X et on suppose, dans cette question, que, pour tout $a \in C$, $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$. L'objectif de la question est de montrer que que X_n converge en loi vers X quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $m_n(]a,b]) \to m(]a,b])$, quand $n \to +\infty$, pour tout $a, b \in C$, $a < b$.

Corrigé – *Soit $a, b \in C$, $a < b$.*
Il suffit de remarquer que $m_n(]a,b]) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$ et $m(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$.
Comme $a, b \in C$, on a $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$ et $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ et donc $m_n(]a,b]) \to m(]a,b])$.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $\varphi \in S$ si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $a_0, \ldots, a_p \in C$ t.q. $a_0 < \ldots < a_p$. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$.

(b) Soit $\varphi \in S$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *On a, en utilisant la définition de* S, $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$ *et donc, en utilisant la linéarité de l'intégrale et la question précédente (car* $a_i \in$ C*),*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m_n(]a_{i-1}, a_i]) \to \sum_{i=1}^{p} \alpha_i m(]a_{i-1}, a_i]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

(c) Montrer que C est dense dans $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\psi \in$ S telle que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$.

Corrigé – *La fonction* F_X *est croissante, l'exercice 1.4 montre alors que l'ensemble des points de discontinuité de* F_X*, c'est-à-dire* C^c*, est fini ou dénombrable. Tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *étant non dénombrable, on déduit que tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *rencontre* C*. Ceci prouve que* C *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$*. Comme* φ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$*, on pose* $b_i = i\eta/2$ *et on choisit* $a_i \in C \cap]b_{i-1}, b_i[$ *et* $\alpha_i = \varphi(a_i)$*. On pose* $\psi = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$*.*

La fonction ψ *est bien dans* S *car* $\alpha_i \neq 0$ *seulement pour un nombre fini de* i*.*

D'autre part, on a bien $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$*. En effet, soit* $x \in \mathbb{R}$*. Il existe* $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x \in]a_{i-1}, a_i]$*, on a donc*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(a_i)| \leq \varepsilon \text{ car } |x - a_i| \leq |a_{i-1} - a_i| \leq |b_{i-2} - b_i| = \eta.$$

(d) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.
[Utiliser la question 2c.]

Corrigé –
Soit $\varepsilon > 0$*. La question 2c donne l'existence de* $\psi \in$ S *t.q.* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$*. On a alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} &|\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \\ &\leq |\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm_n| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \\ &\leq 2\varepsilon + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm|. \end{aligned}$$

Comme $\psi \in$ S*, il existe* n_0 *tel que* $n \geq n_0$ *implique* $|\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| \leq \varepsilon$*. On a donc, pour tout* $n \geq n_0$*,*

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui termine la question.

(e) Déduire de la question précédente que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *La question 2d donne la converge vague de m_n vers m et donc la converge étroite de m_n vers m (car m_n et m sont des probabilités). On a donc $X_n \to X$ en loi quand $n \to +\infty$.*

Exercice 6.69 (Convergence en loi) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X.

Corrigé – *On pose $Y = -X$ et on cherche à déterminer la loi de la v.a.r. Y. Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (il suffit en fait de prendre pour φ la fonction caractéristique d'un borélien de $\mathbb{R}$). En posant $\psi(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, On remarque que $\int_\Omega \varphi(Y)dP = \int_\Omega \varphi(-X)dP = \int_\Omega \psi(X)dP = \int_\mathbb{R} \psi(x)dP_X(x) = \int_\mathbb{R} \varphi(-x)dP_X(x)$. Comme $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$, on a donc :*

$$\int_\Omega \varphi(Y)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(-x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx,$$

ce qui prouve que $Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X,

(b) $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.

Corrigé – *On prend $X_n = -X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $P_{X_n} = P_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien la convergence en loi de X_n vers X quand $n \to +\infty$. Mais, $X_n - X = -2X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X_n - X$ ne converge pas en loi vers 0 car $P_0 = \delta_0$ et $P_{-2X} \neq \delta_0$. (Il est facile de voir, en raisonnant comme à la première question, que $-2X \sim \mathcal{U}(-2, 2)$.)*

3. Donner un exemple de trois v.a. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

Corrigé – *On prend $Y = -X$ (toujours avec $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$) et $Z = X$. les v.a.r. X et Y ont donc même loi. Mais, on va montrer que XZ et YZ n'ont pas la même loi. En effet, soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a :*

$$\int_\Omega \varphi(XZ)dP = \int_\Omega \varphi(X^2)dP = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x^2)dx$$
$$= \int_0^1 \varphi(x^2)dx = \int_0^1 \varphi(s)\frac{1}{2\sqrt{s}}ds.$$

Ce qui prouve que $P_{XZ} = g\lambda$ avec $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in]0, 1[$ et $g(x) = 0$ si $x \notin]0, 1[$. Comme $XY = -XZ$, on a $P_{XY} = h\lambda$ avec $h(x) = g(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $P_{XZ} \neq P_{XY}$.

Exercice 6.70 (Convergence en loi + convergence en probabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles telles que :

$$X_n \to X \text{ en loi, } Y_n \to 0 \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \to X \text{ en loi, quand } n \to +\infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

Corrigé – *D'après la proposition 6.89, il suffit de démontrer la convergence vague de* $P_{X_n+Y_n}$ *vers* P_X *quand* $n \to +\infty$*, c'est-à-dire que* $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP = \int_\Omega \varphi(X)dP$ *pour tout* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathbb{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. On a* $\int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP = A_n + B_n$ *avec :*

$$A_n = \int_\Omega \varphi(X_n + Y_n)dP - \int_\Omega \varphi(X_n)dP, \qquad B_n = \int_\Omega \varphi(X_n)dP - \int_\Omega \varphi(X)dP.$$

On sait déjà que $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$ *(car* $X_n \to X$ *en loi). Il suffit donc de montrer que* $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Soit $\eta > 0$*. Comme* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*,* φ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ *(on rappelle, par contre, que* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \not\Rightarrow \varphi$ *uniformément continue), il existe donc* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \le \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \le \eta.$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, avec* $\|\varphi\|_u = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| (< \infty)$ *:*

$$|A_n| \le \int_{|Y_n|\le\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP + \int_{|Y_n|>\varepsilon} |\varphi(X_n + Y_n) - \varphi(X_n)|dP$$
$$\le \eta + 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon].$$

Comme $Y_n \to 0$ *en probabilité, il existe* n_0 *(dépendant seulement de* ε *et donc de* η *et* φ*) tel que :*

$$n \ge n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u P[|Y_n| > \varepsilon] \le \eta,$$

et donc :

$$n \ge n_0 \Rightarrow |A_n| \le 2\eta.$$

Ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$ *et termine la démonstration.*

Exercice 6.71 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en loi, quand } n \to +\infty.$$

[Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X.]

Corrigé – *Soit* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Nous allons montrer que*

$$\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP,$$

quand $n \to +\infty$ *(ce qui prouve la convergence vague de* P_{X_n} *vers* P_X, *quand* $n \to +\infty$, *voir la définition 6.88).*

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, φ *est uniformément continue (ceci serait faux si on prenait* φ *arbitrairement dans* $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*). Il existe donc* $\eta > 0$ *tel que :*

$$x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(y) \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\left|\int_\Omega \varphi(X_n) - \varphi(X)dP\right| \leq \int_{|X_n - X| \leq \eta} |\varphi(X_n) - \varphi(X)|dP$$
$$+ \int_{|X_n - X| > \eta} |\varphi(X_n) - \varphi(X)|dP \leq \varepsilon + 2\|\varphi\|_u P(|X_n - X| > \eta),$$

avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(s)|,\ s \in \mathbb{R}\} < \infty$. *Comme* $X_n \to X$ *en probabilité, quand* $n \to +\infty$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$n \geq n_0 \Rightarrow 2\|\varphi\|_u P(|X_n - X| > \eta) \leq \varepsilon.$$

On a donc finalement

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int_\Omega \varphi(X_n) - \varphi(X)dP| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve bien que $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, *quand* $n \to +\infty$.

Pour conclure, on utilise la proposition 6.89 (qui donne que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* m *sont des probabilités sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, *la convergence étroite de* m_n *vers* m, *quand* $n \to +\infty$, *est équivalente à la convergence vague de* m_n *vers* m*). On obtient ainsi la convergence étroite de* P_{X_n} *vers* P_X *c'est-à-dire la convergence en loi de* X_n *vers* X, *quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$. Montrer que :

$$X_n \to X \text{ en probabilité, quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *Soit* $\eta > 0$, *on va montrer que* $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$, *quand* $n \to +\infty$. *Pour cela, on choisit une fonction* φ *continue bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et telle que* $\varphi(x) = 1$ *si* $|x - a| \geq \eta$, $\varphi(a) = 0$ *et* $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *(Une telle fonction est facile à construire, il suffit de la prendre affine par morceaux). Comme* $\varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on a* $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \to \int_\Omega \varphi(X)dP$, *quand* $n \to +\infty$. *Comme* $X = a$ *p.s. et* $\varphi(a) = 0$, *on a* $\int_\Omega \varphi(X)dP = 0$. *Enfin, comme* $\varphi(x) = 1$ *si* $|x - a| \geq \eta$ *et* $\varphi \geq 0$, *on a* $\int_\Omega \varphi(X_n)dP \geq P(|X_n - X| > \eta)$. *On en déduit finalement que* $P(|X_n - X| > \eta) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$ *et donc que* $X_n \to X$ *en probabilité quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.72 (Théorème de représentation de Skorokhod) Pour tout v.a.r. Z, on rappelle que F_Z est sa fonction de répartition.

Soit (Ω, T, P) une espace probabilisé.

Si Z est une v.a.r. sur l'espace probabilisé (Ω, T, P), on définit $\tilde{Z}$ de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{Z}(x) = \inf\{a \in \mathbb{R};\ F_Z(a) = P(\{Z \leq a\}) \geq x\}$$

1. Soit Z une v.a.r. sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

(a) Montrer que $\tilde{Z}$ est une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$ (remarquer que $\tilde{Z}$ est une fonction croissante).

Corrigé –
Pour tout $x \in]0,1[$, $\{a \in \mathbb{R};\ F_Z(a) \geq x\}$ *est non vide (car* $\lim_{a\to\infty} F_Z(a) = 1$*) et borné inférieurement (car* $\lim_{a\to-\infty} F_Z(a) = 0$*). La fonction* $\tilde{Z}$ *prend donc ses valeurs dans* $\mathbb{R}$.
Comme la fonction $\tilde{Z}$ *est croissante, elle est borélienne.*
C'est donc une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$.

(b) Soient $x \in]0,1[$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer $a \geq \tilde{Z}(x)$ si et seulement si $F_Z(a) \geq x$.

Corrigé –
Comme la fonction F_Z *est croissante et continue à droite,* $\{b \in \mathbb{R};\ F_Z(b) \geq x\} = [\tilde{Z}(x), +\infty[$. *Ce qui donne le résultat demandé.*

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $F_{\tilde{Z}}(a) = \lambda(\{\tilde{Z} \leq a\}) = P(\{Z \leq a\}) = F_Z(a)$ et donc que $\tilde{Z} \sim Z$.

Corrigé – *La question précédente donne* $\{\tilde{Z} \leq a\} = \{x \in]0,1[;\ \tilde{Z}(x) \leq a\} = \{x \in]0,1[;\ x \leq F_Z(a)\}$.
On en déduit que $\lambda(\{\tilde{Z} \leq a\}) = \lambda(\{x \in]0,1[;\ x \leq F_Z(a)\} = F_Z(a)$.
Les v.a.r. Z *et* $\tilde{Z}$ *ont donc même fonction de répartition, elles ont donc même loi (car la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction de répartition).*

(d) (Exemples) Dans cette question, on demande ce que vaut $\tilde{Z}$ dans deux cas particuliers.
Premier exemple : $Z = 1$ p.s..
Deuxième exemple : $P(\{Z = 1\}) = 1/2$ et $P(\{Z = 2\}) = 1/2$.

Corrigé – *Premier exemple :* $\tilde{Z}(x) = 1$ *pour tout* $x \in]0,1[$.
Deuxième exemple : $\tilde{Z}(x) = 1$ *pour tout* $x \in]0,1/2]$. $\tilde{Z}(x) = 2$ *pour tout* $x \in]1/2,1[$.

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. (sur l'espace probabilisé (Ω, T, P)).

On suppose que $X_n \to X$ en loi (quand $n \to +\infty$) et on pose $Y_n = \tilde{X}_n$, $Y = \tilde{X}$ (ce sont donc des v.a.r. sur l'espace probabilisé $(]0,1[, B(]0,1[), \lambda)$).

2. Montrer que $Y_n \sim X_n$, $Y \sim X$ et donc $Y_n \to Y$ en loi (quand $n \to +\infty$).

Corrigé – *C'est ce qui est montré à la question 1c.*

On rappelle que $Y_n \to Y$ en loi implique $F_{Y_n}(b) \to F_Y(b)$ en tout point de continuité $b \in \mathbb{R}$ de F_Y. (Ceci est démontré dans la proposition 6.98.)

3. Soit $a \in]0,1[$.

   On suppose que Y est continue au point a et on choisit $\varepsilon > 0$ tel que F_Y est continue aux points $Y(a) \pm \varepsilon$.

   (a) On pose $\bar{a} = F_Y(Y(a)-\varepsilon)$ et $a_n = F_{Y_n}(Y(a)-\varepsilon)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \bar{a}$.
   Montrer que $\{Y \le Y(a)-\varepsilon\}$ est un intervalle et en déduire que $\bar{a} \le a$.
   Montrer que $\bar{a} < a$ et donc $a_n < a$ pour n assez grand.
   En déduire que $\liminf_{n\to+\infty} Y_n(a) \ge Y(a)-\varepsilon$.

   Corrigé – *Comme* $Y_n \to Y$ *en loi et que* F_Y *est continue au point* $Y(a)-\varepsilon$*, on a bien* $a_n \to \bar{a}$*.*
   $F_Y(Y(a)-\varepsilon) = \lambda(\{Y \le Y(a)-\varepsilon\}) = \bar{a}$*. Comme* Y *est croissante, on donc* $\{Y \le Y(a)-\varepsilon\} =]0,\bar{a}]$ *ou* $]0,\bar{a}[$ *et cet intervalle ne contient pas* a *(donc* $\bar{a} \le a$*). Le fait que* $\bar{a} < a$ *découle de la continuité de* Y *en* a *(*$\bar{a} = a$ *impliquerait* $Y(a) = \lim_{n\to+\infty} Y(a-1/n) \le Y(a)-\varepsilon$*).*
   Comme Y_n *est croissante,* $\{Y_n \le Y(a)-\varepsilon\} =]0,a_n]$ *ou* $]0,a_n[$*.*
   Pour n *assez grand, on a* $a_n < a$ *(car* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \bar{a} < a$*) et donc* $Y_n(a) > Y(a)-\varepsilon$*. Quand* $n \to +\infty$*, on en déduit* $\liminf_{n\to+\infty} Y_n(a) \ge Y(a)-\varepsilon$*.*

   (b) On pose $\bar{a} = F_Y(Y(a)+\varepsilon)$ et $a_n = F_{Y_n}(Y(a)+\varepsilon)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \bar{a}$
   Montrer que $\bar{a} > a$ et donc $a_n > a$ pour n assez grand.
   En déduire que $\limsup_{n\to+\infty} Y_n(a) \le Y(a)+\varepsilon$.

   Corrigé – *On raisonne de manière semblable à la question précédente. Comme* $Y_n \to Y$ *en loi et que* F_Y *est continue au point* $Y(a)+\varepsilon$*, on a bien* $a_n \to \bar{a}$*.*
   Comme Y *est croissante et* $F_Y(Y(a)+\varepsilon) = \lambda(\{Y \le Y(a)+\varepsilon\}) = \bar{a}$*, on a* $\{Y \le Y(a)+\varepsilon\}) =]0,\bar{a}]$ *ou* $]0,\bar{a}[$ *et* $\bar{a} \ge a$ *(car* a *est dans cet intervalle). Le fait que* $\bar{a} > a$ *découle de la continuité de* Y *en* a *(*$\bar{a} = a$ *impliquerait* $Y(a) = \lim_{n\to+\infty} Y(a+1/n) \ge Y(a)+\varepsilon$*).*
   Comme Y_n *est croissante,* $\{Y_n \le Y(a)+\varepsilon\} =]0,a_n]$ *ou* $]0,a_n[$*.*
   Pour n *assez grand, on a* $a_n > a$ *et donc* $Y_n(a) \le Y(a)+\varepsilon$*.*
   Quand $n \to +\infty$*, on en déduit* $\limsup_{n\to+\infty} Y_n(a) \le Y(a)+\varepsilon$*.*

On Rappelle qu'une fonction croissante (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$) est continue sauf en un nombre au plus dénombrable de points (exercice 1.4).

4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} Y_n(a) = Y(a)$ en tout point de continuité $a \in]0,1[$ de Y.
   En déduire que $Y_n \to Y$ p.s..

Corrigé – *Soit $a \in]0,1[$. On suppose Y continue au point a. On peut choisir une suite de $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ telle que $0 < \varepsilon_k < 1/k$ pour tout k et F_Y continue aux points $Y(a) \pm \varepsilon_k$. Ceci est possible car F_Y étant croissante n'a qu'une quantité au plus dénombrable de points de discontinuité.*

La question 3 donne alors, pour tout k, $\limsup_{n\to+\infty} Y_n(a) \leq Y(a) + \varepsilon_k$ et $\liminf_{n\to+\infty} Y_n(a) \geq Y(a) - \varepsilon_k$.

En faisant $k \to +\infty$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} Y_n(a) = Y(a)$.

Enfin, comme Y a une quantité au plus dénombrable de points de discontinuité et qu'une partie dénombrable est toujours de mesure de Lebesgue nulle, on en déduit $Y_n \to Y$ p.s..

Exercice 6.73 (Convergence L^∞-faible, p.p. et L^1)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda)$.

Pour $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose $B(x,h) = \{y \in \Omega \text{ t.q. } |x-y| < h\}$ et on désigne par $|B(x,h)|$ la mesure de Lebesgue de $B(x,h)$. Pour $f \in L^1$, $x \in \Omega$ et $h > 0$, on pose

$$f_h(x) = \frac{1}{|B(x,h)|}\int_{B(x,h)} f(y)dy.$$

On dit que x est un point de Lebesgue de f si $f_h(x)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand $h \to 0$.

Si $x \in \Omega$, on pose $F_x = \{f \in L^\infty$ tel que x est un point de Lebesgue de $f\}$.

1. Soit $x \in \Omega$. Pour $f \in F_x$ on pose $T_x(f) = \lim_{h\to 0} f_h(x)$. Montrer que F_x est un sous espace vectoriel de L^∞ et que T_x est une application linéaire continue de F_x, muni de la norme de L^∞, dans $\mathbb{R}$. En déduire qu'il existe $\bar{T}_x \in (L^\infty)'$ telle que $\bar{T}_x(f) = T_x(f)$ pour tout $f \in F_x$. [On pourra utiliser la conséquence du théorème de Hahn-Banach rappelée dans la remarque 5.13.]

   Pour la suite de cet exercice, on rappelle que, si $f \in L^1$, presque tout point x de Ω est un point de Lebesgue de f et on a, pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$ (ceci est démontré dans l'exercice 5.13).

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞ et $f \in L^\infty$. On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans L^∞, quand $n \to +\infty$.

2. Montrer que $f_n \to f$ p.p..
3. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1.
4. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^p.

N.B. : Le même exercice peut se faire avec un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N > 1$), noté Ω, et $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où λ_N est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de Ω. Cette mesure λ_N sera définie au chapitre 7.

Exercice 6.74 (Convergence faible et convergence au sens des distributions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mesurables et localement intégrables.

1. On suppose, dans cette question, que, pour toute fonction φ, mesurable bornée et à support compact,

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, la suite $(f_n 1_K)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R})$.

   [On pourra utiliser le fait que, dans un espace de Banach, une suite faiblement convergente est nécessairement bornée, voir la remarque 6.83.]

2. On suppose maintenant seulement que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x)dx.$$

   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement bornée dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

   [On pourra considérer f_n t.q. $|f_n| = n^\alpha$ sur $[-1/n, 1/n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.]

Chapitre 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 2, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume. . .).

La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B), \ \forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ?$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{A \times B, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : T_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\lambda_2(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.3). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir la proposition 7.2).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$

dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \Big(\int f(x,y)dy \Big) dx = \int \Big(\int f(x,y)dx \Big) dy \ ?$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Il est aussi utilisé pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. La convolution est également une notion très utilisée pour de nombreuses applications, par exemple en traitement de signal et d'image.

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est σ-fini (on dit aussi que m est σ-finie) s'il existe une famille $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $m(\mathrm{A}_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini (prendre, par exemple, $\mathrm{A}_n = [-n, n]$). Il existe par contre des mesures non σ-finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(\mathrm{A}) = +\infty$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A} \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de $\mathbb{R}$ (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_\mathrm{B}(\mathrm{A}) = +\infty$ si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$ et $m_\mathrm{B}(\mathrm{A}) = 0$ si $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient* $(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ *des espaces mesurables. On pose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$. *On appelle tribu produit la tribu sur* E *engendrée par* $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2 = \{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_1 \in \mathrm{T}_1,\ \mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_2\}$. *Cette tribu produit est notée* $\mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$.

Un exemple fondamental est $(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1) = (\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.2 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) *Pour tout* $\mathrm{N} \geq 2$, *on a* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est faite pour $\mathrm{N} = 2$ dans l'exercice 2.6). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas $\mathrm{N} > 2$ (exercice 7.1). ■

Théorème 7.3 (Mesure produit) *Soient* $(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1, m_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2, m_2)$ *deux espaces mesurés σ-finis,* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. *Alors, il existe une et une seule mesure*

m sur T *vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2),\ \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2; m_i(A_i) < \infty,\ i = 1, 2. \quad (7.1)$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. De plus, m est σ-finie.

DÉMONSTRATION –

Existence de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.1).

Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.1) et que m est σ-finie.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2 ; (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$.

Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E) ; S(x_1, A) \in T_2\}$.

On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.

On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,
- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet : $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que $S(x_1, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Theta$.

L'ensemble Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, et contient donc $T_1 \otimes T_2 = T$, tribu engendrée par $T_1 \times T_2$. . On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application f_A de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour $x_1 \in E_1$,

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1, A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (7.2)$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T ; f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathcal{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ tel que $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^{n} m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^{n} f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{7.3}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \tag{7.4}$$

Pour démontrer (7.3), on considère une suite $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ telle que $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$; on a $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$S\left(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}).$$

On en déduit, par continuité croissante de m_2, que

$$m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$$

et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$, ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.4) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin du fait que m_2 est finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. On peut en déduire (cela fait l'objet de l'exercice 2.13) que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.2 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \tag{7.5}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (7.5), est une mesure sur T et que m vérifie (7.1) et est σ-finie.

On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

- $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(\mathrm{S}(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
- (σ-additivité de m) Soit $(\mathrm{A}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}^{(n)} \cap \mathrm{A}^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}^{(n)}$. Pour $x_1 \in \mathrm{E}_1$, on a :
$$\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}^{(n)}) \text{ et } \mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}^{(n)}) \cap \mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$
La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A})) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}^{(n)}))$, c'est-à-dire
$$f_\mathrm{A}(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\mathrm{A}^{(n)}}(x_1).$$
Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors :
$$m(\mathrm{A}) = \int f_\mathrm{A} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{\mathrm{A}^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(\mathrm{A}^{(n)}),$$
ce qui donne la σ-additivité de m.

On montre maintenant que m vérifie (7.1). Soient $\mathrm{A}_1 \in \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_2$ tels que $m_1(\mathrm{A}_1) < \infty$ et $m(\mathrm{A}_2) < \infty$. On pose $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$. On a alors $f_\mathrm{A} = m_2(\mathrm{A}_2)1_{\mathrm{A}_1}$ et donc $m(\mathrm{A}) = \int f_\mathrm{A} dm_1 = m_2(\mathrm{A}_2)m_1(\mathrm{A}_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(\mathrm{B}_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_1$ et $(\mathrm{B}_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_2$ tels que $\mathrm{E}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_1^{(n)}$, $\mathrm{E}_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(\mathrm{B}_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(\mathrm{B}_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{C}_{n,m} = \mathrm{B}_1^{(n)} \times \mathrm{B}_2^{(m)}$, de sorte que $\mathrm{E} = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \mathrm{C}_{n,m}$ et $m(\mathrm{C}_{n,m}) = m_1(\mathrm{B}_1^{(n)}) \times m_2(\mathrm{B}_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.

Unicité de m.

La partie existence de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.1). La partie unicité du théorème peut se montrer avec la proposition 2.31 ; nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13) comme cela est expliqué dans la remarque 7.4.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.1). Pour montrer que $m = \mu$, on va appliquer la proposition 2.31. On pose :
$$\mathcal{C} = \{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_1 \in \mathrm{T}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_2, m_1(\mathrm{A}_1) < \infty, m_2(\mathrm{A}_2) < \infty\}.$$
Comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il est facile de montrer que tout élément de $\mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}$ engendre T. Il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et, par (7.1), on a $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Puis, comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il existe deux suites $(\mathrm{E}_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_1$ et $(\mathrm{E}_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $\mathrm{E}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_{1,n}$, $\mathrm{E}_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_{2,n}$ et $m_i(\mathrm{E}_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{F}_{n,m} = \mathrm{E}_{1,n} \times \mathrm{E}_{2,m}$. La famille

$(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $E = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{1,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.31. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème.

■

Remarque 7.4 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie unicité du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.1)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1)m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.1) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée $\mathcal{A}$ (cette algèbre a été définie dans la partie existence de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.

On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T\,;\, m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.3) et (7.4) (on utilise ici, pour montrer (7.4), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie existence de la démonstration, l'exercice 2.13 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$, ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que $B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplacer $B_i^{(n)}$ par $\bigcup_{p=0}^{n} B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T\,;\, A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T.

Remarque 7.5 Dans le théorème précédente (théorème 7.3), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m, $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n\to+\infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n\to+\infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.6 (Espace produit)

L'espace (E, T, m), construit dans le théorème 7.3, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2).

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.7 (Fubini-Tonelli) *Soient (E_1, T_1, m_1) et (E_2, T_2, m_2) des espaces mesurés σ-finis. On note (E, T, m) l'espace produit (donc, $T = T_1 \otimes T_2$ et $m = m_1 \otimes m_2$). Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive (i.e. T-mesurable positive). Alors :*

1. *$f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $x_1 \in E_1$,*

   on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2 = \int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$

   de sorte que $\varphi_f : E_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

2. *$\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$,*
3. *$\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int\Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1)$,*
4. *les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 et m_2, de sorte que :*

$$\int\Big(\int f(x_1, x_2)dm_2(x_2)\Big)dm_1(x_1) = \int\Big(\int f(x_1, x_2)dm_1(x_1)\Big)dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soit $f = 1_A$, $A \in T$. La partie existence de m de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $\int f dm = m(A) = \int \varphi_f dm_1$.

Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1,\cdot) = 1_A(x_1,\cdot) = 1_{S(x_1,A)}$, avec

$$S(x_1,A) = \{x_2 \in E_2 \text{ t.q. } (x_1,x_2) \in A\} \subset E_2$$

(comme dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.3 donne que $S(x_1,A) \in T_2$ pour tout $x_1 \in E_1$, et donc $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2 = m_2(S(x_1,A))$ pour tout $x_1 \in E_1$. (Cette fonction φ_f est notée f_A dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.3 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.3, $m(A) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m est une mesure sur T vérifiant (7.1) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.1), d'après la partie unicité de la démonstration du théorème 7.3). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.7. On obtient ainsi que $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot,x_2)dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(A) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que $\tilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (7.1). La partie unicité de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_A$) de la conclusion du théorème 7.7.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(E,T)$.
Il existe donc $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $A_1,\ldots,A_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f(x_1,\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ car l'étape 1 donne $1_{A_i}(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$ pour tout i. Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}$ et que $\varphi_{1_{A_i}} \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1), ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{A_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{A_i}} dm_1 = \int (\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{A_i}}) dm_1 \\ = \int \Big(\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{A_i}(x_1,\cdot)dm_2 \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1,\cdot)dm_2 \Big) dm_1(x_1) \\ = \int \varphi_f dm_1.\end{aligned}$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(E, T)$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in E_1$, $f_n(x_1, \cdot) \uparrow f(x_1, \cdot)$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que

$$\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1, \cdot) dm_2 \uparrow \int f(x_1, \cdot) dm_2 = \varphi_f(x_1)$$

pour tout $x_1 \in E_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$, ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. ∎

Corollaire 7.8 *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit. Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_2 \Big) dm_1 < +\infty \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_1 \Big) dm_2 < +\infty. \quad (7.6)$$

DÉMONSTRATION – Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.7 appliqué à la fonction $|f|$ qui appartient à $\mathcal{M}_+(E, T)$. Dans (7.6), la notation $(\int |f| dm_2) dm_1$ signifie :

$$\Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2. ∎

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.7 pour la mesurabilité :

Proposition 7.9 *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Soit* $f \in \mathcal{M}(E, T)$ *(c'est-à-dire* $f : E \to \mathbb{R}$, T*-mesurable). Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$, *pour tout* $x_1 \in E_1$,

2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, *pour tout* $x_2 \in E_2$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.7 donne alors, pour tout $x_1 \in E_1$, $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. Comme $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot)$, on en déduit que $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. En changeant les rôles de (E_1, T_1) et (E_2, T_2), on montre aussi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$. ■

Remarque 7.10 La réciproque de la proposition précédente est fausse. Soient (E_1, T_1) et (E_2, T_2) deux espaces mesurables, $E = E_1 \times E_2$ et $T = T_1 \otimes T_2$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, pour tout $x_2 \in E_2$.

Alors, f n'est pas forcément T-mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.11.

Proposition 7.11 *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *deux espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Soient* $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ *et* $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. *On définit* $f : E \to \mathbb{R}$ *par* $f(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ *pour tout* $(x_1, x_2) \in E$. *Alors* f *est* T*-mesurable (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(E, T)$*).*

DÉMONSTRATION – On procède en trois étapes.

Etape 1. On prend d'abord $F_1 = 1_{A_1}$ et $F_2 = 1_{A_2}$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$. On a alors $f = 1_{A_1 \times A_2} \in \mathcal{M}(E, T)$ car $A_1 \times A_2 \in T_1 \times T_2 \subset T_1 \otimes T_2 = T$.

Etape 2. On prend maintenant $F_1 \in \mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{E}(E_2, T_2)$.

Il existe alors $a_1^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $A_1^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)} \in T_1$, $a_1^{(2)}, \ldots, a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $A_1^{(2)}, \ldots, A_m^{(2)} \in T_2$ t.q. :

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} A_i^{(1)} \text{ et } A_i^{(1)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$F_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)} A_j^{(2)} \text{ et } A_j^{(2)} \cap A_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i^{(1)} a_j^{(2)} 1_{A_i^{(1)} \times A_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(E, T) \subset \mathcal{M}(E, T)$.

Etape 3. On prend enfin $F_1 \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$ et $F_2 \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$. Il existe $(F_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(E_1, T_1)$ et $(F_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(E_2, T_2)$ t.q. $F_n^{(1)}(x_1) \to F_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et $F_n^{(2)}(x_2) \to F_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in E_2$. On en déduit que $f_n(x_1, x_2) = F_n^{(1)}(x_1)F_n^{(2)}(x_2) \to f(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in E$ et donc que $f \in \mathcal{M}(E, T)$ car $f_n \in \mathcal{M}(E, T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.12 (Fubini) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés* σ*-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit. Soit* f *une fonction* T*-mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(E, T)$*) et intégrable pour la mesure m, c'est-à-dire* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$*. Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ *pour presque tout* $x_1 \in E_1$*,*

on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ *pour* $x_1 \in E_1$ *t.q.* $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$*. La fonction* φ_f *est donc définie p.p. sur* E_1 *(et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*).*

2. $\varphi_f \in L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ *(au sens : il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.).*

3. $\displaystyle\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1),$

4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – Comme $f \in \mathcal{M}(E, T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E, T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à f^+ et f^-. Il donne :

1. $f^+(x_1, \cdot), f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $\varphi_{f^+}, \varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}(E_2, T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ et $f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1, \cdot) = f^+(x_1, \cdot) - f^-(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2, T_2, m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.

La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p, on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A, on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1, T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$ car $\int |g| dm_1 \leq \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L^1_{\mathbb{R}}(E_1, T_1, m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\begin{aligned}\int \varphi_f dm_1 = \int g dm_1 &= \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1 \\ &= \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.\end{aligned}$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2. ∎

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.13 *Soit* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis,* (E, T, m) *l'espace produit et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable t.q. :*

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int \Big(\int |f(x_1, x_2)| dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

DÉMONSTRATION – Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.12 et de l'équivalence (7.6). ∎

Remarque 7.14 (Contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée. Soit a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = a(x)$ si $x \geq 0$ et $x \leq y < 2x$, $f(x, y) = -a(x)$ si $x \geq 0$ et $2x \leq y < 3x$, $f(x, y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \geq 0$ et $y \notin [x, 3x]$. On pose $b(x) = x\,a(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = 1/(1 + x)^2$, on montre que $\int (\int f(x, y) dy) dx \neq \int (\int f(x, y) dx) dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.6 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.15 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. *La mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *est la mesure* $\lambda \otimes \lambda$*, on la note* λ_2.
2. *Par récurrence sur* N*, la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*,* $N \geq 3$*, est la mesure* $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$*, on la note* λ_N.

On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note

$$\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx.$$

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercice.

Proposition 7.16 (Propriétés élémentaires de λ_N) *Soit* $N \geq 2$*. On rappelle que* λ_N *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*.*

1. *La mesure* λ_N *est* σ*-finie.*
2. *Soit* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Alors,* $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et*
$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).$$
3. *Soit* $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\alpha_i < \beta_i$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, N\}$*. Alors :*
$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i).$$
4. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^N$ *(noter que* $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$*). Alors,* $\lambda_N(K) < +\infty$.
5. *Soit* O *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^N$*. Alors,* $\lambda_N(O) > 0$.
6. *Soit* $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$*. Alors* $f = g$ *p.p. (c'est-à-dire* λ_N*-p.p.) implique* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.
7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$*. (En confondant* f *avec sa classe, on écrira donc souvent* $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$*.)*

DÉMONSTRATION – Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ-finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.3) car ce théorème donne que le produit de mesures σ-finies est σ-finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa régularité, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.17).

Proposition 7.17 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (Noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.) Alors :*

1. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :*
$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$
2. *Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.*

DÉMONSTRATION – Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.12. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ.

Proposition 7.18 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout $N \geq 1$, l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.15, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N. Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas N = 1, théorème 5.20. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.20, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.19 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $N \geq 1$ et μ sur une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Alors, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.16.

Proposition 7.20 (Invariance par translation) *Soient* $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, *on pose* $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ *(noter que* φ *est une bijection de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}^N$*). Pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a alors* $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.

Pour $\alpha_i = 1$ *pour tout i, cette propriété s'appelle invariance par translation de* λ_N.

DÉMONSTRATION – Cette proposition a déjà été vue pour $N = 1$, proposition 2.48. La démonstration de la proposition 2.48 utilisait, par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.17.

On peut aussi noter que la partie unicité du théorème 7.3 peut être faite (voir la remarque 7.4) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.48 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux). ■

Proposition 7.21 (Changement de variables simple)

Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, *on pose* $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ *(de sorte que* φ *est une bijection de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}^N$*). Alors :*

1. *Pour tout* $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f \, d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

2. *Pour tout* $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ *et :*

$$\int f \, d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.20. Elle fait l'objet de l'exercice 7.18.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^N |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Cette matrice est notée $D\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.29. ■

7.5 Convolution

On rappelle que $L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int f d\lambda_N = \int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x)dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_N(x)$).

On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On souhaite définir la fonction convoluée de f et g, c'est-à-dire définir $f * g$ par :

$$f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt.$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g.
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g, encore notés f et g, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartienne à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $g(x-\cdot)f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^N$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f = f_1 \text{ p.p.}, \ g = g_1 \text{ p.p.} \ \Rightarrow f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \text{ p.p.}. \tag{7.7}$$

(p.p. signifiant ici λ_N-p.p..) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $\lambda_N(A) = \lambda_N(B) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ sur $A^c \cap B^c_x = (A \cup B_x)^c$ avec $B_x = \{x - z, \ z \in B\}$. On en déduit bien $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ p.p. car $\lambda_N(A \cup B_x) \le \lambda_N(A) + \lambda_N(B_x) = \lambda_N(A) + \lambda_N(B) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.20).

On en déduit que, si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $f_1(.)g_1(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et, si $f(.)g(x-.) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 7.22 (Convolution) *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f * g$ est donc définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$.*
- *$f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ t.q. $f * g = h$ p.p.").*
- *$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $N = 1$ (le cas $N > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2N} = \lambda_N \otimes \lambda_N$).

On choisit des représentants de f et g, de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.12) à $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $H(x, y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(E_i, T_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ-finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et que $\int(\int |H(x, y)|dx)dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On a $H = H_1 \circ \psi$ avec :

$$H_1 : (x, y) \mapsto f(x)g(y), \quad \psi : (x, y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car f et g sont mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on applique ici la proposition 7.11) et ψ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions mesurables. On peut maintenant calculer l'intégrale de $|H|$:

$$\int(\int |H(x, y)|dx)dy = \int(\int |f(y)g(x-y)|dx)dy = \int |f(y)|(\int |g(x-y)|dx)dy.$$

La proposition 7.21 donne $\int |g(x-y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int(\int |H(x, y)|dx)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $H(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f * g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f * g\|_1 = \int |\int f(y)g(x-y)dy|dx \leq \int(\int |H(x, y)|dx)dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

■

Remarque 7.23 On a vu précédemment que $L^1(\mathbb{R}^N)$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $L^1(\mathbb{R}^N)$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $L^1(\mathbb{R}^N)$ et son image (par cette transformation) dans $C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$.

Remarque 7.24 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution. Soit $N \geq 1$. Pour $p \in [1,\infty]$, on pose $L^p(\mathbb{R}^N) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$.

1. Soit $f,g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On a alors $f*g = g*f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.20 et 7.21) et est démontré dans l'exercice 7.21.
2. Soit$1 < p < \infty$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f*g$ est définie p.p. sur $\mathbb{R}^N$, $f*g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.23.
3. Soit $p,q \in [1,\infty]$ t.q. $(1/p)+(1/q) = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Alors, $f*g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f*g \in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, voir l'exercice 8.7.
4. Soit $p \in [1,\infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Alors, $f*g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$, voir l'exercice 7.22.
5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si $f1_K \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de R^N. On suppose que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Alors, $f*g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^N$ et $f*g \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.22, noter que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$).
6. Soit $f,g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f*g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.21.

La convolution est un outil très utile pour "régulariser" des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $p < \infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'une fonction f dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ (voir la remarque 7.24) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur les parties boréliennes bornées de $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m = f\lambda_N$ (qui est une mesure signée sur Ω si Ω est une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$). Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int \varphi dm = \int \varphi f d\lambda_N$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$).

Lemme 7.25 *Soit* $N \geq 1$ *et* $f,g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$ *t.q.* $\int f\varphi d\lambda_N = \int g\varphi d\lambda_N$, *pour tout* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. *Alors,* $f = g$ *p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On note B_M la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans $\mathbb{R}^N$ et h_M la fonction définie par :

$$h_M(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } x \in B_M \text{ et } |f(x) - g(x)| \leq M, \\ \\ 0 & \text{si } x \notin B_M \text{ ou } |f(x) - g(x)| > M, \end{cases}$$

On a $h_M \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (car B_M est un compact de $\mathbb{R}^N$). Comme $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (théorème 5.20 pour $d = 1$ et théorème 7.18 pour $N \geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \to h_M$ dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ quand $n \to +\infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $\varphi_n \to h_M$ p.p. (théorème 6.11). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n, M), -M)$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &\varphi_n \to h_M \text{ p.p.}, \\ &|\varphi_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on a $\int (f - g)\varphi_n d\lambda_N = 0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $M1_{B_M}|f - g|$) donne alors $\int h_M(f - g)d\lambda_N = 0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int |f - g|d\lambda_N = 0$, et donc $f = g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m * \mu = (f * g)\lambda_N$, lorsque $m = f\lambda_N$ et $\mu = g\lambda_N$ avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (et donc $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$). Noter que m, μ et $m * \mu$ sont des mesures signées. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On pose $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$. Pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$),

$$\int (f * g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy \right) \varphi(x)dx.$$

(On rappelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini, qui s'applique bien ici car

$$\int \int |f(x - y)g(y)\varphi(x)|dxdy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1,$$

et avec le changement de variable $z = x - y$ (pour y fixé), on obtient :

$$\begin{aligned} \int (f * g)\varphi d\lambda_N &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\varphi(x)dx \right) g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z + y)dz \right) g(y)dy. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\int (f*g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(z+y)dm(z)\right)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}}\varphi(y+z)d(m\otimes\mu)(z,y), \tag{7.8}$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m\otimes\mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ-additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}^+$), la dernière égalité de 7.8 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.12). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.33) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La mesure $m\otimes\mu$ est alors définie à partir de $m^\pm\otimes\mu^\pm$.

On est ainsi amené naturellement à définir $m*\mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.8) pour définir $\int\varphi d(m*\mu)$.

Définition 7.26 (Convolution de mesures) *Soit* $N\geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. *On définit la mesure signée* $m*\mu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *par :*

$$m*\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} 1_A(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y) \text{ pour tout } A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m\otimes\nu = m^+\otimes\mu^+ + m^-\otimes\mu^- - m^-\otimes\mu^+ - m^+\otimes\mu^-$ *et* $m^\pm$ $\mu^\pm$ *sont données par la décomposition de Hahn de* m *et* μ *(proposition 2.33).*

Le fait que $m*\mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ-additivité de $m*\mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.27 *Soit* $N\geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. *On a alors, pour tout* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *(par exemple,* $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$*) :*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi d(m*\mu) = \int_{\mathbb{R}^{2N}}\varphi(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y).$$

2. *Si* m *et* μ *sont des probabilités, la mesure* $m*\mu$ *est aussi une probabilité.*
3. *Si* $f,g\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $m = f\lambda_N$ *et* $\mu = g\lambda_N$, *on a* $m*\mu = (f*g)\lambda_N$.

DÉMONSTRATION – Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.25). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m*\mu(A)\geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m*\mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.27. ■

Remarque 7.28 Il aurait aussi été possible de définir $m*\mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (théorème 5.16 pour $N \geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x+y) dm(x) d\mu(y), \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int \varphi(s) d\tau(s).$$

7.6 Formules de changement de variable

La proposition 7.21 donne un résultat sur les changements de variables "simples". On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.29 (Formules de changement de variable) *Soit* $N \geq 1$, U *et* V *des ouverts bornés de* $\mathbb{R}^N$ *et* φ *un* C^1*-difféomorphisme de* U *dans* V *(i.e.* φ *est une bijection de* U *dans* V, $\varphi \in C^1(U, V)$ *et* $\varphi^{-1} \in C^1(V, U)$*). On note* $D\varphi(y)$ *la matrice jacobienne de* φ *en* y *et* $\mathrm{D}et(D\varphi)$ *la fonction* $y \mapsto \mathrm{D}et(D\varphi(y))$.

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. *Alors,*

$$(f \circ \varphi)|\mathrm{D}et(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|\mathrm{D}et(D\varphi(y))|dy.$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ *t.q.* $f 1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. *Alors,*

$$(f \circ \varphi)|\mathrm{D}et(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|\mathrm{D}et(D\varphi(y))|dy.$$

DÉMONSTRATION – Comme φ est de classe C^1, la fonction $(f \circ \varphi)|\mathrm{D}et(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. Il est plus difficile de montrer l'égalité donnée dans l'item 1 du théorème. Cette démonstration n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variable affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f 1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$,

on obtient que $(f \circ \varphi)|\mathrm{D}et(\mathrm{D}\varphi)|1_{\mathrm{U}} \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_{\mathrm{V}} f(x)dx = \int_{\mathrm{U}} f(\varphi(y))|\mathrm{D}et(\mathrm{D}\varphi(y))|dy$.

■

Un exemple de changement de variable On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour N = 2. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). On veut calculer (par exemple) $\int_{\mathrm{B}_1} f(x)dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^2$, en passant en coordonnée polaires.

On a donc $\mathrm{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\, |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $\mathrm{L} = \{(x_1, 0)^t,\, x_1 \in [0, 1[\}$ et on remarque que $\lambda_2(\mathrm{L}) = \lambda([0, 1[) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $\mathrm{V} = \mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{L}$, on a :

$$\int_{\mathrm{B}_1} f(x)dx = \int_{\mathrm{B}_1 \setminus \mathrm{L}} f(x)dx = \int_{\mathrm{V}} f(x)dx (= \int_{\mathrm{V}} f d\lambda_2).$$

On pose aussi $\mathrm{U} =]0, 1[\times]0, 2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi : (r, \theta)^t \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)^t$ est alors une bijection de U dans V. Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$\mathrm{D}\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},\ |\mathrm{D}et(\mathrm{D}\varphi(r, \theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.29, il donne :

$$\int_{\mathrm{B}_1} f(x)dx = \int_{\mathrm{V}} f(x)dx = \int_{\mathrm{U}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r, \theta)$$
$$= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r, \theta)$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{\mathrm{B}_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire s'il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{\mathrm{B}_1} f(x)dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0,1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\,|x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr)d\theta. \tag{7.9}$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^\star$, dans (7.9), on obtient aussi, quand $n \to +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnement avec $f^\pm$ si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x)dx = \int_0^{2\pi}(\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr)d\theta. \tag{7.10}$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 (Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

Corrigé – *On note* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *c'est-à-dire la tribu (sur* $\mathbb{R}^n$*) engendrée par* $\{A \times B;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. *On veut montrer que* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Etape 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$**.**

Soit O *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On va montrer que* $O \in T$. *On suppose* $O \neq \emptyset$ *(on sait déjà que* $\emptyset \in T$*). Pour tout* $x = (x_1,\ldots,x_n)^t \in O$, *il existe* $r > 0$ *t.q.* $\prod_{i=1}^n]x_i - r, x_i + r[\subset O$. *Comme les rationnels sont denses dans* $\mathbb{R}$, *on peut trouver, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$, $y_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i - r, x_i[$ *et* $z_i \in \mathbb{Q} \cap]x_i, x_i + r[$. *On a donc* $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O$.

On note alors $I = \{(y,z) \in \mathbb{Q}^{2n};\, \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\subset O\}$ *(avec* $y = (y_1,\ldots,y_n)^t$ *et* $z = (z_1,\ldots,z_n)^t$*). Pour tout* $x \in O$, *il existe donc* $(y,z) \in I$ *t.q.* $x \in \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$. *On en déduit que* $O = \bigcup_{(y,z)\in I} \prod_{i=1}^n]y_i, z_i[$.

L'ensemble $\prod_{i=1}^{n-1}]y_i, z_i[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$, *il appartient donc à* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *(qui est la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$*). L'ensemble* $]y_n, z_n[$ *appartient à* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Donc,* $\prod_{i=1}^n]y_i, z_i[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Comme* I *est au plus dénombrable (car* $\mathbb{Q}^{2n}$ *est dénombrable), on en déduit que* $O \in T$. *On a ainsi montré que* T *est une tribu contenant tous les ouverts de* $\mathbb{R}^n$, *et donc contenant la tribu engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *(c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*). Donc,* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset T$.

Etape 2, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset T$**.**

On reprend ici aussi le même démarche que dans l'exercice 2.6.

1. *Soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $T_1 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. *On montre d'abord que* T_1 *est une tribu (sur* $\mathbb{R}$*)*

   — $\emptyset \in T_1$ *car* $A \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

   — *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire. Soit* $B \in T_1$*, on a donc* $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $A \times B^c = A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B)$. *Or,* $(A \times \mathbb{R})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *(car* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *et* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*), on a donc* $(A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $B \in T_1$*). Donc,* $A \times B^c = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Ce qui prouve que* $B^c \in T_1$ *et donc que* T_1 *est stable par passage au complémentaire.*

   — *Enfin,* T_1 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_1$*, on a* $A \times (\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A \times B_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p \in T_1$.

   On a donc montré que T_1 *est une tribu.*

   On montre maintenant que T_1 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}$.

   Soit B *un ouvert de* $\mathbb{R}$. *On a donc* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et, comme* $A \times B$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, on a* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *On a donc* $B \in T_1$.

   T_1 *est donc une tribu contenant les ouverts de* $\mathbb{R}$*, donc contenant* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Donc,* $T_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   La conséquence de ce résultat est :

$$A \text{ ouvert de } \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.11}$$

2. *Soit* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $T_2 = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}); A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$. *On va montrer que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On commence par remarquer que (7.11) donne que T_2 *contient les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$. *En effet, soit* A *un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, la propriété (7.11) donne que* $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, et donc* $A \in T_2$.

   On montre maintenant que T_2 *est une tribu (on en déduira que* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$*).*

   — $\emptyset \in T_2$ *car* $\emptyset \times B = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

   — *On montre ici que* T_1 *est stable par passage au complémentaire. Soit* $A \in T_2$*, on a* $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *et* $A^c \times B = (\mathbb{R}^{n-1} \times B) \setminus (A \times B)$. *La propriété (7.11) donne* $(\mathbb{R}^{n-1} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *car* $\mathbb{R}^{n-1}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{n-1}$. *D'autre part,* $(A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A \in T_2$*). Donc,* $A^c \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Ce qui prouve que* $A^c \in T_2$ *et donc que* T_2 *est stable par passage au complémentaire.*

   — *Enfin,* T_2 *est stable par union dénombrable. En effet, si* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset T_2$*, on a* $(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p) \times B = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} (A_p \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(car* $A_p \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$*). Donc,* $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \in T_2$.

   T_2 *est donc une tribu (sur* $\mathbb{R}^{n-1}$*) contenant les ouverts de* $\mathbb{R}^{n-1}$*, ce qui prouve que* $T_2 \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ *et donc, finalement,* $T_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$.

   On a donc obtenu le résultat suivant :

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{7.12}$$

3. *On montre maintenant que* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *(et donc que* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*).*

   Grâce à (7.12), on a $\{A \times B;\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. On en déduit que* $T \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*. On a donc bien, avec l'étape 1,* $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

Exercice 7.2 (Algèbre engendrée par un produit de tribus) Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{A}$ *l'algèbre engendrée par* $T_1 \times T_2$ *et* $\mathcal{B}$ *l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de* $T_1 \times T_2$*.*

Comme $\mathcal{A}$ *contient* $T_1 \times T_2$ *et que* $\mathcal{A}$ *est stable par union finie, il est immédiat que* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$*. Pour montrer que* $\mathcal{B} = \mathcal{A}$*, il suffit alors de montrer que que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre (puisque* $\mathcal{A}$ *est la plus petite algèbre contenant* $T_1 \times T_2$ *et que* $\mathcal{B}$ *contient* $T_1 \times T_2$*).*

Pour montrer que $\mathcal{B}$ *est une algèbre, on montre d'abord (étape 1) que* $T_1 \times T_2$ *est stable par intersection finie et que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints de* $T_1 \times T_2$ *(en fait, pour montrer que* $\mathcal{B}$ *est une algèbre, il suffirait de savoir que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est une union finie disjointe d'éléments de* $T_1 \times T_2$*). Puis, on en déduit (étape 2) que* $\mathcal{B}$ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que* $\mathcal{B}$ *est bien une algèbre.*

Etape 1. *Propriétés de* $T_1 \times T_2$*.*

— *Soient* $A_1, B_1 \in T_1$ *et* $A_2, B_2 \in T_2$*. On a clairement* $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$*. Comme* T_1 *et* T_2 *sont stables par intersection finie, on en déduit que* $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in T_1 \times T_2$ *et donc que* $T_1 \times T_2$ *est stable par intersection finie.*

— *Soient* $A_1 \in T_1$ *et* $A_2 \in T_2$*. On remarque que* $(A_1 \times A_2)^c = (E_1 \times A_2^c) \cup (A_1^c \times A_2)$*. Comme* $(E_1 \times A_2^c) \in T_1 \times T_2$*,* $(A_1^c \times A_2) \in T_1 \times T_2$ *et que* $(E_1 \times A_2^c) \cap (A_1^c \times A_2) = \emptyset$*, on a bien montré que le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints* $T_1 \times T_2$*.*

Etape 2. *On montre maintenant que* $\mathcal{B}$ *vérifie les propriétés* (a) *et* (b) *de la question 1 de l'exercice 2.9. La propriété* (a) *est immédiate car* $E = E_1 \times E_2 \in T_1 \times T_2 \subset \mathcal{B}$*. Pour montrer* (b)*, on montre d'abord que* $\mathcal{B}$ *est stable par passage au complémentaire.*

Soit $B \in \mathcal{B}$*. Il existe* $(B^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ *t.q.* $B^{(p)} \cap B^{(q)} = \emptyset$ *si* $p \neq q$ *et* $B = \bigcup_{q=1}^{m} B^{(q)}$*. On a alors* $B^c = \bigcap_{q=1}^{m} (B^{(q)})^c$*. Le complémentaire d'un élément de* $T_1 \times T_2$ *est la réunion de 2 éléments disjoints de* $T_1 \times T_2$*. Pour tout* q*, il existe donc* $C_{q,1}, C_{q,2} \in T_1 \times T_2$ *t.q.* $(B^{(q)})^c = C_{q,1} \cup C_{q,2}$ *et* $C_{q,1} \cap C_{q,2} = \emptyset$*. On a donc* $B^c = \bigcap_{q=1}^{m} (C_{q,1} \cup C_{q,2}) = \bigcup_{\varphi \in I} (\bigcap_{q=1}^{m} C_{q,\varphi(q)})$ *où* I *désigne l'ensemble des applications de*

$\{1,\ldots,m\}$ dans $\{1,2\}$. Ceci prouve que $B^c \in \mathcal{B}$. En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\varphi \in I$, on a $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \in T_1 \times T_2$ car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie. Puis, pour $\varphi,\psi \in I$ $\varphi \neq \psi$, il existe $k \in \{1,\ldots,m\}$ t.q. $\varphi(k) \neq \psi(k)$. On a donc $(\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)}) \cap (\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)}) = \emptyset$ car $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\varphi(q)} \subset C_{k,\varphi(k)}$, $\bigcap_{q=1}^m C_{q,\psi(q)} \subset C_{k,\psi(k)}$ et $C_{k,\varphi(k)} \cap C_{k,\psi(k)} = \emptyset$. On a donc bien montré que B^c est une union finie disjointe d'éléments de $T_1 \times T_2$, c'est-à-dire que $B^c \in \mathcal{B}$.

On montre maintenant que $\mathcal{B}$ vérifie la propriété (b) de la question 1 de l'exercice 2.9. Soit $A, B \in \mathcal{B}$. Comme on vient de voir que $B^c \in \mathcal{B}$, Il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ et $(C^{(q)})_{q=1,\ldots,m} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $C^{(p)} \cap C^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$, $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$ et $B^c = \bigcup_{q=1}^m C^{(q)}$. On a alors $A \setminus B = A \cap B^c = (\bigcup_{p=1}^n A^{(p)}) \cap (\bigcup_{q=1}^m C^{(q)}) = \bigcup_{p=1}^n \bigcup_{q=1}^m (A^{(p)} \cap C^{(q)})$. On en déduit que $A \setminus B \in \mathcal{B}$. En effet, $A^{(p)} \cap C^{(q)} \in T_1 \times T_2$ pour tout p et tout q (car $T_1 \times T_2$ est stable par intersection finie) et $(A^{(p_1)} \cap C^{(q_1)}) \cap (A^{(p_2)} \cap C^{(q_2)}) = \emptyset$ si $(p_1,q_1) \neq (p_2,q_2)$ (car $A^{(p_1)} \cap A^{(p_2)} = \emptyset$ si $p_1 \neq p_2$ et $C^{(q_1)} \cap C^{(q_2)} = \emptyset$ si $q_1 \neq q_2$).

On a donc montré que $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés (a) et (b) de la question 1 de l'exercice 2.9, ce qui donne que $\mathcal{B}$ est bien une algèbre et donc que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) Soit m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Corrigé – *On remarque d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. la quantité $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ est donc bien définie.*

La construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ donne (voir la démonstration du théorème 7.3) :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_1(x).$$

Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.

De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc que $m_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ m_1-p.p.. Comme $m_1(\mathbb{R}) \neq 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m_2(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$. Ceci donne que $m_2 = \alpha\delta_a$ avec $\alpha = m_2(\{a\})$. Comme $m_2 \neq 0$, on a $\alpha > 0$.

Dans la construction de la mesure $m_1 \otimes m_2$ (démonstration du théorème 7.3), on aurait pu inverser les rôles de m_1 et m_2. On aurait obtenu la même mesure $m_1 \otimes m_2$ (grâce à la partie unicité du théorème 7.3). On a donc aussi :

$$m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \int m_1(\mathbb{R} \setminus \{x\}) dm_2(x).$$

(Cette égalité est aussi une conclusion du théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec $f = 1_A$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus D$.)

Comme $m_2 = \alpha\delta_a$, on a donc $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = \alpha m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$. De l'hypothèse $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, on déduit donc $m_1(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0$, ce qui donne $m_1 = \beta\delta_a$ avec $\beta = m_1(\{a\})$. (On peut aussi remarquer que, comme $m_1 \neq 0$, on a $\beta > 0$.)

Exercice 7.4 (Fonction dont les traces sont boréliennes) Pour $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(\mathrm{B})$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in \mathrm{B}$. On pose $\mathrm{T} = \{\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2; \, t(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *On montre assez facilement que* T *est une tribu sur* $\mathbb{R}^2$. *En effet, on peut remarquer, par exemple, que* $\mathbb{R}^2 \in \mathrm{T}$ *(car* $t(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*),* T *est stable par union dénombrable (si* $\mathrm{B}_n \in \mathrm{T}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $t(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} t(\mathrm{B}_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par stabilité de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par union dénombrable) et* T *est stable par passage au complémentaire (si* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$*, on a* $t(\mathrm{B}^c) = t(\mathrm{B})^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par stabilité de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par passage au complémentaire).*

Pour montrer que $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*, on pose*

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2, \ \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

On sait que $\mathcal{C}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. On remarque maintenant que* $\mathcal{C} \subset \mathrm{T}$ *(car si* A_1, $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $t(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mathrm{A}_1$ *ou* $\emptyset$ *selon que* $0 \in \mathrm{A}_2$ *ou* $0 \notin \mathrm{A}_2$*). La tribu* T *contenant* $\mathcal{C}$*, elle contient nécessairement la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*, c'est-à-dire* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} \times \{0\}$.

(a) Montrer que $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *Comme* $t(\mathrm{B}) = \mathrm{A} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a* $\mathrm{B} \notin \mathrm{T}$ *et donc* $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *car* $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

(b) On pose $f = 1_\mathrm{B} \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *La fonction* g *est linéaire bijective de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$*. On note* h *sa fonction réciproque. La fonction* h *est donc aussi linéaire. La fonction* h *est donc borélienne (car continue) et on a* $1_\mathrm{B} = f \circ h$*. Comme* $\mathrm{B} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*, la fonction* 1_B *n'est pas borélienne. On en déduit que* f *n'est pas borélienne (si* f *était borélienne, on aurait* 1_B *borélienne car composée de fonctions boréliennes).*

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$*. On va montrer que la fonction* $f(x_1, \cdot)$ *est borélienne. On pose* $x_2 = -x_1 \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$*. On distingue alors deux cas possibles :*

Premier cas. *On suppose que* $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \notin \mathrm{A}$*. La fonction* $f(x_1, \cdot)$ *est alors la fonction nulle (c'est-à-dire que* $f(x_1, x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*). La fonction* $f(x_1, \cdot)$ *est donc borélienne.*

Second cas. *On suppose que* $x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \in \mathrm{A}$*. La fonction* $f(x_1, \cdot)$ *est alors la fonction nulle partout sauf au point* x_2 *où elle vaut* 1 *(c'est-à-dire que* $f(x_1, x) = 1_{\{x_2\}}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*). La fonction* $f(x_1, \cdot)$ *est donc borélienne.*

De manière analogue on peut montrer que $f(\cdot, x_2)$ *est borélienne pour tout* $x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini–Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) Soit $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \le 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \le 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.

Corrigé – *On pose* $\mathrm{A} = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0,\ x < y \le 2x\}$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0,\ x < y < 2x + \frac{1}{n}\}$. A_n *est, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *il appartient donc à* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *On en déduit que* $\mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

De même, en posant $\mathrm{B} = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0,\ 2x < y \le 3x\}$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{B}_n = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 ;\ x > 0,\ 2x < y < 3x + \frac{1}{n}\}$, *on montre que* $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

On pose maintenant $g(x,y) = \frac{1}{(|x|+1)^2}$ *pour* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. *La fonction* g *est continue de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *elle est donc mesurable (*$\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}$ *étant munis de la tribu borélienne).*

On remarque maintenant que $f = g1_{\mathrm{A}} - g1_{\mathrm{B}}$. *On en déduit que* f *est mesurable (car* f *est une somme de produits de fonctions mesurables).*

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in \mathrm{L}^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y)d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in \mathrm{L}^1$.

Corrigé – *On note* $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. *La fonction* $f(\cdot, y)$ *est mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à* $\mathcal{L}^1$ *(et donc à* L^1 *en confondant* $f(\cdot,y)$ *avec sa classe dans* L^1*) car* $\int |f(.,y)|d\lambda = 0$ *si* $y \le 0$ *et* $\int |f(.,y)|d\lambda \le y$ *si* $y > 0$ *car* $f(x,y) = 0$ *si* $x \notin [0,y]$ *et* $|f(x,y)| \le 1$ *pour tout* x, y. *On peut définir* $\phi(y)$.

Pour $y \le 0$, *on a* $\phi(y) = 0$ *et pour* $y > 0$, *on a :*

$$\begin{aligned}\phi(y) = \int f(\cdot,y)d\lambda &= -\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= -\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} \\ &= \frac{2y}{(y+3)(y+2)(y+1)}.\end{aligned}$$

La fonction ϕ *est continue donc mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *elle prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *on peut donc calculer son intégrale sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\int \phi d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(-\frac{3}{y+3} + \frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1}\right)dy = -3\ln 3 + 4\ln(2).$$

Ceci donne bien, en particulier, $\phi \in \mathrm{L}^1$ *(en confondant* ϕ *avec sa classe dans* L^1*).*

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in \mathrm{L}^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y)d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in \mathrm{L}^1$.

   Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x,\cdot)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la proposition 7.9). Elle appartient aussi à $\mathcal{L}^1$ (et donc à L^1 en confondant $f(x,\cdot)$ avec sa classe dans L^1) car $\int |f(x,\cdot)|d\lambda = 0$ si $x \le 0$ et $\int |f(x,\cdot)|d\lambda \le 3x$ si $x > 0$ car $f(x,y) = 0$ si $y \notin [0,3x]$ et $|f(x,y)| \le 1$ pour tout x,y. On peut donc définir $\psi(x)$.*

   Pour $x \le 0$, on a $\psi(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a :
   $$\psi(x) = \int f(x,\cdot)d\lambda = \int_x^{2x} \frac{1}{(x+1)^2}dy - \int_{2x}^{3x} \frac{1}{(x+1)^2}dy = 0$$
   On a donc $\psi \in \mathrm{L}^1$ et $\int \psi(x)dx = 0$.

4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).

   Corrigé – *On a déjà montré que $\int \phi d\lambda = -3\ln 3 + 4\ln(2) \neq 0 = \int \psi d\lambda$.*

5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

   Corrigé – *Le théorème de Fubini ne s'applique pas ici car la fonction f n'est pas intégrale pour la mesure produit, c'est-à-dire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, notée λ_2. On peut d'ailleurs le vérifier en remarquant (par le théorème de Fubini-Tonelli) que :*
   $$\int |f|d\lambda_2 = \int (\int |f(x,y)|d\lambda(y))d\lambda(x) = \int_0^\infty \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \infty.$$

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini, et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $\mathrm{F} = 1_\mathrm{A}$ avec $\mathrm{A} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E};\ 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$- mesurable

   Corrigé – *Comme $f \in \mathcal{M}_+$, il existe $(f_n) \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a alors $\mathrm{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ avec $\mathrm{A}_n = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\ 0 < t < f_n(x)\}$. Pour montrer que F est mesurable (ce qui équivalent à montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$), il suffit donc de montrer que $\mathrm{A}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_p \in \mathrm{T}$ t.q. $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $f_n = \sum_{i=1}^p a_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=1}^p]0, a_i[\times \mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ car $]0, a_i[\times \mathrm{B}_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathrm{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$ pour tout i.

2. Montrer que $\int f dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}; f(x) > t\})dt$ et que $\lambda \otimes m(\mathrm{A}) = \int f dm$. [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

   Corrigé – *On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction F, il donne :*
   $$\int \mathrm{F} d(\lambda \otimes \mathrm{A}) = \int (\int \mathrm{F}(t,x)d\lambda(t))dm(x) = \int (\int \mathrm{F}(t,x)dm(x))d\lambda(t). \qquad (7.13)$$

Pour $x \in \mathrm{E}$, $\int \mathrm{F}(t,x)d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)[) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. *Si* $t \leq 0$, *on a* $\mathrm{F}(t,\cdot) = 0$. *Donc,* $\int \mathrm{F}(t,x)dm(x) = 0$. *Si* $t > 0$, *on a* $\mathrm{F}(t,\cdot) = 1_{\{f>t\}}$. *Donc,* $\int \mathrm{F}(t,x)dm(x) = m(\{f > t\})$.

On déduit donc de (7.13) :

$$\int \mathrm{F}d(\lambda \otimes \mathrm{A}) = \int f(x)dm(x) = \int_{\mathbb{R}_+} m(\{f > t\})d\lambda(t) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathrm{E};\ f(x) > t\})dt.$$

Comme $\mathrm{F} = 1_\mathrm{A}$, *on a aussi* $\int \mathrm{F}d(\lambda \otimes m) = \lambda \otimes m(\mathrm{A})$, *ce qui termine cette question.*

3. Montrer que $\int f\,dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in \mathrm{E}; f(x) \geq t\})dt$.

Corrigé – *On reprend le raisonnement de la question précédente en remplaçant* F *par* $\mathrm{G} = 1_\mathrm{B}$ *avec* $\mathrm{B} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E};\ 0 < t \leq f(x)\}$. *On remarque d'abord que* B *est* $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$*-mesurable. En effet, on a* $\mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \mathrm{B}_n$ *avec* $\mathrm{B}_n = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{E};\ 0 < t < f_n(x)\}$ *et* $f_n = f + \frac{1}{n}$. *Comme* $f_n \in \mathcal{M}_+$, *la première question donne* $\mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$. *On en déduit que* $\mathrm{B} \in \mathrm{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{T}$. *On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction* G, *il donne :*

$$\int (\int \mathrm{G}(t,x)d\lambda(t))dm(x) = \int (\int \mathrm{G}(t,x)dm(x))d\lambda(t). \tag{7.14}$$

Pour $x \in \mathrm{E}$, $\int \mathrm{G}(t,x)d\lambda(t) = \lambda(]0, f(x)]) = f(x)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$. *Si* $t \leq 0$, *on a* $\mathrm{G}(t,\cdot) = 0$. *Donc,* $\int \mathrm{G}(t,x)dm(x) = 0$. *Si* $t > 0$, *on a* $\mathrm{G}(t,\cdot) = 1_{\{f\geq t\}}$. *Donc,* $\int \mathrm{G}(t,x)dm(x) = m(\{f \geq t\})$.

On déduit donc de (7.14) :

$$\int f(x)dm(x) = \int_0^\infty m(\{x \in \mathrm{E};\ f(x) \geq t\})dt.$$

Exercice 7.7 (Espace L^p faible) On note $\mathcal{L}^1$ l'espace des fonctions intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue et $\mathcal{L}^2$ l'espace des fonctions de carré intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue.

Définition 7.30 *Soit* $p \in \{1,2\}$. *Une fonction borélienne* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *appartient à l'espace* M^p *si il existe* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $a > 0$,

$$\lambda(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{\mathrm{C}}{a^p}. \tag{7.15}$$

Si $f \in \mathrm{M}^p$, *on note* $\mathrm{C}_f = \sup_{a>0} a^p \lambda(\{|f| \geq a\})$.

1. Montrer que M^1 et M^2 sont des espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$).

Corrigé – *Soit* $p \in \{1,2\}$.
Soit $f \in \mathrm{M}^p$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}^\star$. *On remarque que, pour tout* $a > 0$,

$$\{|\alpha f| \geq a\} = \{|f| \geq \frac{a}{|\alpha|}\} \leq \frac{\mathrm{C}_f |\alpha|^p}{a^p},$$

et donc $\alpha f \in \mathrm{M}^p$*. Pour* $\alpha = 0$*, On a aussi* $\alpha f \in \mathrm{M}^p$*. On a donc* $\alpha f \in \mathrm{M}^p$ *pour tout* $f \in \mathrm{M}^p$ *et tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*
Soit maintenant $f, g \in \mathrm{M}^p$*. Pour tout* $a > 0$*, on a* $\{|f+g| \geq a\} \subset \{|f| \geq a/2\} \cup \{|g| \geq a/2\}$ *et donc*

$$\lambda(\{|f+g| \geq a\}) \leq \lambda(\{|f| \geq a/2\}) + \lambda(\{|g| \geq a/2\}) \leq 2^p(\mathrm{C}_f + \mathrm{C}_g)a^p,$$

ce qui prouve que $f + g \in \mathrm{M}^p$ *et finalement que* M^p *est bien un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

2. Montrer que $\mathcal{L}^p \subset \mathrm{M}^p$, pour $p = 1$ et $p = 2$.

Corrigé – *Soient* $p \in \{1, 2\}$ *et* $f \in \mathcal{L}^p$*. Pour tout* $a > 0$*, on a* $a 1_{\{|f| \geq a\}} \leq |f|$ *p.p. et donc* $a^p \lambda(\{|f| \geq a\} \leq \|f\|_p^p$*, ce qui prouve que* $f \in \mathrm{M}^p$*.*

3. Donner un exemple de fonction qui appartient à M^1 mais n'appartient pas à $\mathcal{L}^1$.

Corrigé – *On définit* f *par* $f(x) = 1/x$ *si* $x > 0$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \leq 0$*. On a* $f \notin \mathcal{L}^1$ *et, pour tout* $a > 0$*,* $\{|f| > a\} = \{x; 0 < x < 1/a\}$ *et donc* $\lambda(\{|f| > a\}) = 1/a$*. Ce qui prouve que* $f \in \mathrm{M}^1$*.*

4. Soit $f \in \mathrm{M}^2$ et K un compact de $\mathbb{R}$. Montrer que $f 1_{\mathrm{K}} \in \mathcal{L}^1$. [On pourra utiliser le fait (démontré dans l'exercice 7.6) que pour toute fonction borélienne g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $\int |g(x)| dx = \int_0^\infty \lambda(\{|g| \geq a\}) da$.]

Corrigé – *On pose* $g = f 1_{\mathrm{K}}$ *et on remarque que, pour tout* $a > 0$*,* $\lambda(\{|g| \geq a\}) \leq \min(\lambda(\mathrm{K}), \mathrm{C}_f/a^2)$*. On en déduit*

$$\int_{\mathrm{K}} |f| d\lambda = \int |g| d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{|g| \geq a\}) da \leq \lambda(\mathrm{K}) + \int_1^\infty \frac{\mathrm{C}_f}{a^2} da < +\infty,$$

et donc que $f 1_{\mathrm{K}} \in \mathcal{L}^1$*.*

5. Donner un exemple pour lequel $f \in \mathrm{M}^2$ et $f \notin \mathcal{L}^2$.

Corrigé – *On définit* f *par* $f(x) = 1/\sqrt{x}$ *si* $x > 0$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \leq 0$*. On a* $f \notin \mathcal{L}^2$ *et, pour tout* $a > 0$*,* $\{|f| > a\} = \{x; 0 < x < 1/a^2\}$ *et donc* $\lambda(\{|f| > a\}) = 1/a^2$*. Ce qui prouve que* $f \in \mathrm{M}^2$*.*

6. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M^2 et $f \in \mathrm{M}^2$. on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe δ_n tel que $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$ et

$$\lambda(\{|f_n - f| \geq a\}) \leq \frac{\delta_n}{a^2} \text{ pour tout } a > 0 \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathrm{K}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}$. *On pose* $g_n = (f_n - f)1_K$ *et on remarque encore que, pour tout* $a > 0$, $\lambda(\{|g_n| \geq a\}) \leq \min(\lambda(K), \delta_n/a^2)$. *On en déduit que pour* $\eta > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_K |f_n - f| d\lambda = \int |g_n| d\lambda = \int_0^\infty \lambda(\{|g_n| \geq a\}) da \leq \eta\lambda(K) + \int_\eta^\infty \frac{\delta_n}{a^2} da.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *On choisir d'abord* $\eta > 0$ *pour avoir* $\eta\lambda(K) \leq \varepsilon$.

Puis, le fait que $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ *et que* $\int_\eta^\infty 1/a^2 da < +\infty$ *donnent l'existence de* n_0 *tel que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow \delta_n \int_\eta^{+\infty} \frac{1}{a_2} da \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow \int_K |f_n - f| d\lambda \leq 2\varepsilon.$$

La convergence vers 0 *de* $\int_K |f_n(x) - f(x)| dx$ *est bien démontrée.*

Exercice 7.8 (Une caractérisation de L^p**)** On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$].

Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]

Corrigé – *On pose* $B = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2;\ |f(x)| > y\}$, *de sorte que*

$$B = (F - G)^{-1}(]0, \infty[)$$

où F *et* G *sont définies par :*

$$F(x,y) = |f(x)|,\ G(x,y) = y,\ (x,y)^t \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction $x \mapsto |f(x)|$ *est mesurable (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) ainsi que l'application* $y \mapsto 1$*(application constante). La proposition 7.11 nous donne alors que* F *est mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *(puisque* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*). La fonction* G *est aussi mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *(il suffit de remarquer qu'elle est continue, ou d'utiliser une nouvelle fois la proposition 7.11). La fonction* $F - G$ *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *ce qui prouve que* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. *La fonction* 1_B *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $1_B(x,y)1_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+}(x,y) = 1_{A_y}(x)$ *pour tout* $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. *L'application* $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ *est donc mesurable de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *car elle est égale à un produit de fonctions mesurables.*

Soit $p \in [1, \infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).

2(a) Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *L'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables. Cette application est, bien sûr, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est donc mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*

(b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – *On pose $\mathrm{H}(x,y) = |y|^{p-1} 1_{A_y}(x)$ pour $(x,y)^t \in \mathbb{R}^2$. La question précédente donne que $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à la fonction H, il donne :*

$$\int \Big(\int \mathrm{H}(x,y) d\lambda(x) \Big) d\lambda(y) = \int \Big(\int \mathrm{H}(x,y) d\lambda(y) \Big) d\lambda(x). \tag{7.16}$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a $\int \mathrm{H}(x,y) d\lambda(x) = |y|^{p-1} \lambda(A_y) = g_p(y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$). Ceci donne, en particulier, que g_p est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (car l'une des conclusions du théorème 7.7 est que $y \mapsto \int \mathrm{H}(x,y) d\lambda(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int \mathrm{H}(x,y) d\lambda(y) = \int |y|^{p-1} 1_{[0,|f(x)|[}(y) d\lambda(y) = \int_0^{|f(x)|} |y|^{p-1} dy = \frac{1}{p} |f(x)|^p.$$

L'égalité (7.16) donne alors :

$$\int g_p d\lambda = \frac{1}{p} \int |f|^p d\lambda. \tag{7.17}$$

Si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on remarque d'abord que g_p prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ car

$$\lambda(A_y) \leq \frac{1}{|y|^p} \int |f|^p d\lambda < \infty \text{ pour tout } y > 0.$$

La fonction g_p est donc mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et (7.17) donne alors que $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Réciproquement, si $g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, (7.17) donne que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

On a donc bien montré :

$$g_p \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda).$$

Exercice 7.9 (À propos de Fubini) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue et on note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

Soit, pour $n \geq 1$, $\mathrm{I}_n = [1 - 1/n, 1 - 1/(n+1)[$. On pose $\varphi_n = n(n+1) 1_{\mathrm{I}_n}$ et $f(x,y) = \sum_{n \geq 1} (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)) \varphi_n(y)$.

1. Montrer que $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable (c'est-à-dire borélienne).

   Corrigé – *La fonction f est bien définie pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ car si $(x,y) \in [0,1]^2$ la somme définissant $f(x,y)$ n'a, au plus, qu'un seul terme non nul ($\varphi_n(y)$ ne peut être non nul que pour une seule valeur de n).*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))$ est borélienne et la fonction φ_n est borélienne. On en déduit que la fonction $(x,y) \mapsto (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$ est aussi borélienne (en appliquant, par exemple, la proposition 7.11).

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n (sur $\mathbb{R}^2$) par $f_n(x,y) = \sum_{p=1}^{n}(\varphi_p(x) - \varphi_{p+1}(x))\varphi_p(y)$. La fonction f_n est borélienne comme somme (finie) de fonctions boréliennes.

   Finalement, la fonction f est donc borélienne car c'est une limite simple de fonctions boréliennes ($f(x,y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x,y)$).

2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$ et que, pour tout $y \in [0,1]$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$.

   Corrigé – *Soit $x \in [0,1]$, pour étudier la fonction $f(x,\cdot)$ on distingue plusieurs cas.*

   Si $x = 1$, $f(x,y) = 0$ pour tout y et donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0$.

   Si $x \in \mathrm{I}_1$, $f(x,y) = 2\varphi_1(y) = 41_{[0,1/2[}$, donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 2$.

   Si $x \in \mathrm{I}_n$, $n \geq 2$, $f(x,y) = \varphi_n(x)\varphi_n(y) - \varphi_n(x)\varphi_{n-1}(y)$ donc $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{F}(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = 0$ car $\int_0^1 \varphi_p(y)dy = 0$ pour tout $p \geq 1$.

   Soit maintenant $y \in [0,1]$, pour étudier la fonction $f(\cdot,y)$ on distingue deux cas.

   Si $y = 1$, $f(x,y) = 0$ pour tout x et donc $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{G}(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = 0$.

   Si $y \in \mathrm{I}_n$, $n \geq 1$, $f(x,y) = (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$ donc $f(\cdot,y) \in \mathcal{L}^1$ et $\mathrm{G}(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = 0$ car $\int_0^1 \varphi_p(x)dx = 0$ pour tout $p \geq 1$.

3. Montrer que $\mathrm{F} : x \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dy$ et $\mathrm{G} : y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dx$ sont intégrables sur $[0,1]$. Calculer alors $\int_{[0,1]} \mathrm{F}(x)\,dx$ et $\int_{[0,1]} \mathrm{G}(y)\,dy$. Peut on appliquer à f le théorème de Fubini ?

   Corrigé – *A la question précédente, on a vu que $\mathrm{F} = 21_{[0,1/2[}$, on a donc $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$ et $\int_0^1 \mathrm{F}(x)dx = 1$. On a vu aussi que $\mathrm{G} = 0$ et donc $\mathrm{G} \in \mathcal{L}^1$ et $\int_0^1 \mathrm{G}(y)dy = 0$.*

   Comme $\int_0^1 \mathrm{F}(x)dx \neq \int_0^1 \mathrm{G}(y)dy$, les conditions pour appliquer le théorème de Fubini ne peuvent pas être vérifiées. La condition non vérifiée est l'intégrabilité de $|f|$. On peut, par exemple, remarquer que $|f(x,y)| = n^2(n+1)^2$ sur I_n^2 et l'intégrale de $|f|$ sur I_n^2 est donc égale à 1, ce qui donne

$$\int_{[0,1]^2} |f(x,y)|dxdy \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathrm{I}_n^2} |f(x,y)|dxdy = +\infty.$$

Exercice 7.10 (Intégrale de Dirichlet)

1. Vérifier que si $n \geq 1$,, $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx.$

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $\frac{\sin x}{x} = 1$ pour $x = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $[0, n]$, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré $([0, n], \mathcal{B}([0, n]), \lambda)$.*

Pour tout $x > 0$, on a $e^{x\cdot} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Pour calculer $\int_0^\infty e^{-xt} dt$, on remarque que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^p e^{-xt} dt = [\frac{-e^{-xt}}{x}]_0^p = \frac{1}{x} - \frac{e^{-xp}}{x}$. Quand $p \to \infty$, on en déduit, avec le théorème de convergence monotone, que $\int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. On obtient bien :

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt} dt) \sin x dx.$$

2. Calculer $\mathrm{F}_n(t) = \displaystyle\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ $(t \geq 0)$.

Corrigé – *Pour $t = 0$, on a $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \int_0^n \sin x dx = 1 - \cos n$. On a donc $\mathrm{F}_n(0) = 1 - \cos n$.*

Soit maintenant $t > 0$. Comme les fonctions $x \mapsto e^{-xt}$ et $x \mapsto \sin x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut calculer $\int_0^n e^{-xt} \sin x dx$ en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-xt} \sin x dx &= -\int_0^n te^{-xt} \cos x dx - [e^{-xt} \cos x]_0^n \\ &= -\int_0^n t^2 e^{-xt} \sin x dx - [te^{-xt} \sin x]_0^n - [e^{-xt} \cos x]_0^n.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(t^2 + 1) \int_0^n e^{-xt} \sin x dx = 1 - te^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n.$$

et donc :

$$\mathrm{F}_n(t) = \int_0^n e^{-xt} \sin x dx = \frac{1 - te^{-nt} \sin n - e^{-nt} \cos n}{t^2 + 1}.$$

3. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^\infty \mathrm{F}_n(t) dt$. ($\mathrm{F}_n$ est définie à la question précédente.)

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.*

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$, $te^{-nt} \leq te^{-t} \leq 1/e$. On en déduit :

$$|\mathrm{F}_n(t)| \leq (2 + \frac{1}{e}) \frac{1}{t^2 + 1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}+ \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(en fait, on a même $0 \leq \mathrm{F}_n(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$.) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}_+$, ceci donne $\mathrm{F}_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin comme $F_n(t) \to \frac{1}{t^2+1}$ *quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $t > 0$*, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, il donne :*

$$\int_0^\infty F_n(t)dt \to \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{2}, \text{ quand } n \to +\infty.$$

4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On définit* H *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$H(x,t) = e^{-xt}\sin x 1_{[0,n]}(x)1_{[0,\infty]}(t).$$

La fonction H *est* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*-mesurable et elle appartient à* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ *car, par le théorème de Fubini-Tonelli :*

$$\int |H(x,t)|d\lambda_2(x,t) \leq \int_0^n |\sin x|(\int_0^\infty e^{-xt}dt)dx = \int_0^n \frac{|\sin x|}{x}dx < \infty,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ *est continue que* $[0,n]$ *en posant* $\frac{|\sin x|}{x} = 1$ *pour* $x = 0$*, elle est donc bien intégrable pour l'espace mesuré* $([0,n],\mathcal{B}([0,n]),\lambda)$*.*

On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la fonction H*, il donne, avec la première question :*

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n(\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x dx = \int_0^\infty(\int_0^n e^{-xt}\sin x dx)dt$$
$$= \int_0^\infty F_n(t)dt.$$

La question 3 donne alors $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty F_n(t)dt = \frac{\pi}{2}$.

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.11 (Propriétés élémentaires de λ_N) Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1,\ldots,A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

Corrigé – *On va démontrer cette question en supposant tout d'abord que* $\lambda(A_i) < \infty$ *pour tout* i*. Le cas général s'obtient alors en utilisant* $A_i \cap [-p,p]$ *au lieu de* A_i *et en faisant ensuite tendre* p *vers l'infini. On obtient bien la propriété voulue (en convenant que* $0\times\infty = 0$*). Cette méthode est décrite dans la remarque 7.5.*

On démontre donc, par récurrence sur N*, la propriété suivante :*

$$\begin{aligned}&A_1,\ldots,A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(A_i) < \infty \text{ pour tout } i \Rightarrow\\ &\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).\end{aligned} \tag{7.18}$$

La propriété (7.18) est vraie pour $N = 2$*. En effet, on sait que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(proposition 7.2) et que* $\lambda_2 = \lambda\otimes\lambda$ *(définition 7.15). On a donc bien (avec la définition*

d'une mesure produit, théorème 7.3) :

$$A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(A_1) < \infty, \lambda(A_2) < \infty$$
$$\Rightarrow A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \text{ et } \lambda_2(A_1 \times A_2) = \lambda(A_1)\lambda(A_2).$$

On suppose maintenant que la propriété (7.18) est vraie pour un certain $N \geq 2$*, et on la démontre pour* $N + 1$.

Soit donc $A_1, \ldots, A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda(A_i) < \infty$ *pour tout* i.
Par (7.18), on a $\prod_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $\lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(A_i)$*. On rappelle que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(proposition 7.2) et que* $\lambda_{N+1} = \lambda_N \otimes \lambda$ *(définition 7.15).*
On en déduit que $\prod_{i=1}^{N+1} A_i = (\prod_{i=1}^{N} A_i) \times A_{N+1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N+1})$ *et*

$$\lambda_{N+1}(\prod_{i=1}^{N+1} A_i) = \lambda_N(\prod_{i=1}^{N} A_i)\lambda(A_{N+1}) = \prod_{i=1}^{N+1} \lambda(A_i).$$

ce qui donne bien (7.18) avec $N + 1$ *au lieu de* N *et termine donc la démonstration par récurrence.*

2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]\alpha_i, \beta_i[).$$

Corrigé – *Cette question est une conséquence immédiate de la précédente en prenant* $A_i =]\alpha_i, \beta_i[$.

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.

Corrigé – *Comme* K *est compact, il est borné. Il existe donc* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *t.q.* $K \subset \prod_{i=1}^{N}]-a, a[$*. On en déduit que* $\lambda_N(K) \leq \lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]-a, a[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]-a, a[) = (2a)^N < \infty$.

4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.

Corrigé – *Soit* $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in O$*. Comme* O *est ouvert, il existe* $\varepsilon > 0$ *t.q.* $\prod_{i=1}^{N}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\subset O$*. On a donc* $\lambda_N(O) \geq \lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[) = (2\varepsilon)^N > 0$.

5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Corrigé – *Soit* $O = \{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^N ; f(x) \neq g(x)\}$*. Comme* f *et* g *sont continues,* O *est ouvert. Comme* $f = g$ *p.p., on a nécessairement* $\lambda_N(O) = 0$*. Enfin, la question précédente donne alors que* $O = \emptyset$ *et donc que* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.

6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Corrigé – *Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme f est continue, on a f mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne, on dit aussi que f est borélienne). Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $f = 0$ sur K^c avec $K = \prod_{i=1}^N [-a, a]$. Enfin, f est bornée, il existe donc M t.q. $|f(x)| \le M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On en déduit que $\int |f| d\lambda_N \le M(2a)^N < \infty$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.*

Exercice 7.12 (Régularité de λ_N) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :
$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \le \varepsilon.$$

Corrigé – *On reprend ici la démonstration de la régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (théorème 2.43).*

On appelle T l'ensemble des $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé vérifiant $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$. On va montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[, -\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (voir l'exercice 2.7, il est même démontré qu'on peut, dans la définition de $\mathcal{C}$, se limiter au cas où les a_i et b_i sont dans $\mathbb{Q}$), ceci donnera $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

On démontre tout d'abord que $\mathcal{C} \subset T$. Soit $-\infty < a_i < b_i < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $A = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $(2/n_0) < b_i - a_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Pour $n \ge n_0$, on pose $F_n = \prod_{i=1}^N [a_i + (1/n), b_i - (1/n)]$ et $O = A$. On a bien F_n fermé, O ouvert et $F_n \subset A \subset O$. On remarque ensuite que $O \setminus F_n \subset C_n$ avec :
$$C_n = \bigcup_{q=1}^N C_{n,q}, \;\; C_{n,q} = \prod_{i=1}^N I_{i,q}^{(n)},$$
$$I_{i,q}^{(n)} =]a_i, b_i[\text{ si } i \ne q, \; I_{q,q}^{(n)} =]a_q, a_q + \frac{1}{n}[\cup]b_q - \frac{1}{n}, b_q[.$$
Soit $q \in \{1, \ldots, N\}$. On a $C_{n+1,q} \subset C_{n,q}$ (pour tout $n \ge n_0$), $\bigcap_{n \ge n_0} C_{n,q} = \emptyset$ et, comme m est finie sur les compacts,
$$m(C_{n,q}) \le m(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]) < \infty.$$
On peut donc utiliser la propriété de continuité décroissante d'une mesure. On obtient $m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a alors aussi $m(C_n) \le \sum_{q=1}^N m(C_{n,q}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Il existe donc n t.q. $m(C_n) < \varepsilon$. On prenant $F = F_n$, on a bien alors O ouvert, F fermé et $m(O \setminus F) \le \varepsilon$, ce qui montre que $A \in T$ et donc que $\mathcal{C} \subset T$.

On montre maintenant que T est une tribu. On remarque tout d'abord que $\emptyset \in T$ (il suffit de prendre $F = O = \emptyset$) et que T est stable par passage au complémentaire (car, si $F \subset A \subset O$, on a $O^c \subset A^c \subset F^c$ et $F^c \setminus O^c = O \setminus F$). Il reste à montrer que T est stable par union dénombrable.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *et* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*. On veut montrer que* $A \in T$*. On va commencer par traiter le cas (simple) où* $m(A) < \infty$ *puis le cas (plus difficile) où* $m(A) = \infty$*.*

Premier cas. *On suppose que* $m(A) < \infty$*. La démonstration est ici identique à celle faite pour* $N = 1$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe* O_n *ouvert et* F_n *fermé t.q.* $F_n \subset A_n \subset O_n$ *et* $m(O_n \setminus F_n) \le (\varepsilon/2^n)$*. On pose* $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ *et* $\tilde{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$*. On a* $\tilde{F} \subset A \subset O$*,* $m(O \setminus \tilde{F}) \le 2\varepsilon$*, car* $(O \setminus \tilde{F}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(O_n \setminus F_n)$*, et* O *ouvert mais* $\tilde{F}$ *n'est pas nécessairement fermé…*

Cependant, puisque $m(A) < \infty$*, on a aussi* $m(\tilde{F}) < \infty$*. Par continuité croissante de* m *on a* $m(\bigcup_{p=0}^{n} F_n) \to m(\tilde{F})$*, quand* $n \to \infty$*, d'où (puisque* $m(\tilde{F}) < \infty$*)* $m(\tilde{F}) - m(\bigcup_{p=0}^{n} F_n) \to 0$*. On prend alors* $F = \bigcup_{p=0}^{n} F_n$ *avec* n *assez grand pour que* $m(\tilde{F}) - m(F) \le \varepsilon$*. On a bien* $F \subset A \subset O$*,* O *ouvert,* F *fermé et* $m(O \setminus F) \le 3\varepsilon$*. Ceci prouve que* $A \in T$*.*

Deuxième cas. *On suppose maintenant que* $m(A) = \infty$ *(et le raisonnement précédent n'est plus correct si* $m(\tilde{F}) = \infty$*). On raisonne en trois étapes, en adaptant la démonstration faite pour* $N = 1$ *:*

(a) *Soit* $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$*. On remarque d'abord que* $A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\in T$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. En effet, soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varepsilon > 0$*. Il existe* O *ouvert et* F *fermé t.q.* $F \subset A_n \subset O$ *et* $m(O \setminus F) \le \varepsilon$*. Pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, on a donc*

$$F_k = F \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1 - \frac{1}{k}] \subset A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\subset O_k$$
$$= O \cap \prod_{i=1}^{N}]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[.$$

On a F_k *fermé,* O_k *ouvert et* $(O_k \setminus F_k) \subset (O \setminus F) \cup D_k$*, avec :*

$$D_k = \bigcup_{q=1}^{N} D_{k,q}, \quad D_{k,q} = \prod_{i=1}^{N} J_{i,q}^{(k)},$$
$$J_{i,q}^{(k)} =]p_i - \frac{1}{k}, p_i + 1[\text{ si } i \ne p,$$
$$J_{q,q}^{(k)} =]p_q - \frac{1}{k}, p_q[\cup]p_q + 1 - \frac{1}{k}, p_q + 1[.$$

En utilisant la continuité décroissante de m *et le fait que* m *est finie sur les compacts (ce qui donne* $m(D_k) \le m(\prod_{i=1}^{N}[p_i - 1, p_i + 1]) < \infty$*), on démontre (comme pour les* C_n *précédemment) que* $m(D_k) \to 0$ *quand* $k \to \infty$*. Il existe donc* $k \in \mathbb{N}^*$ *t.q.* $m(D_k) \le \varepsilon$ *et donc* $m(O_k \setminus F_k) \le m(O \setminus F) + m(D_k) \le 2\varepsilon$*. Ce qui donne bien que* $A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\in T$*.*

(b) *Soit* $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$*. Comme* $m(A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[) < \infty$*, on peut maintenant utiliser le premier cas avec* $A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[)$*. Il donne que* $A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\in T$ *pour tout* $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$*.*

(c) *On montre enfin que* $A \in T$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Pour tout* $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{Z}^N$*, il existe un ouvert* O_p *et un fermé* F_p *t.q.* $F_p \subset A \cap \prod_{i=1}^{N}[p_i, p_i + 1[\subset O_p$ *et* $m(O_p \setminus F_p) \le \varepsilon/(2^{|p|})$*, en posant* $|p| = \sum_{i=1}^{N} |p_i|$*. On prend* $O = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^N} O_p$ *et* $F = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}^N} F_p$*. On obtient* $F \subset A \subset O$*,* $m(O \setminus F) \le 3^N \varepsilon$ *et* O *est ouvert. Il reste à montrer que* F *est fermé.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{F}$ *t.q.* $x_n \to x$ *(dans* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$*) quand* $n \to +\infty$*. On veut montrer que* $x \in \mathrm{F}$*. Il existe* $p = (p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}}) \in \mathbb{Z}^{\mathrm{N}}$ *t.q.* $x \in \prod_{i=1}^{\mathrm{N}}]p_i - 1, p_i + 1[$*. Il existe donc* $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $x_n \in \prod_{i=1}^{\mathrm{N}}]p_i - 1, p_i + 1[$ *pour tout* $n \geq n_0$*. Comme* $x_n \in \bigcup_{q\in\mathbb{Z}^{\mathrm{N}}} \mathrm{F}_q$ *et que* $\mathrm{F}_q \subset \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} [q_i, q_i + 1[$ *pour tout* $q = (q_1, \ldots, q_{\mathrm{N}})^t \in \mathrm{Z}^{\mathrm{N}}$*, on a donc* $x_n \in \bigcup_{q\in\mathrm{E}_p} \mathrm{F}_q$*, pour tout* $n \geq n_0$*, où* $\mathrm{E}_q = \{q = (q_1, \ldots, q_{\mathrm{N}})^t \in \mathbb{Z}^{\mathrm{N}}\,;\ q_i \in \{p_i, p_i - 1\}$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}\}$*. Comme* E_q *est de cardinal fini et que* F_q *est fermé pour tout* q*, l'ensemble* $\bigcup_{q\in\mathrm{E}_p} \mathrm{F}_q$ *est donc aussi fermé, on en déduit que* $x \in \bigcup_{q\in\mathrm{E}_p} \mathrm{F}_q \subset \mathrm{F}$ *et donc que* F *est fermé.*

Ceci montre bien que $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *et termine la démonstration du fait que* T *est une tribu. Comme cela a déjà été dit, on en déduit que* $\mathrm{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$*.*

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Déduire de la question précédente que $m(\mathrm{A}) = \inf\{m(\mathrm{O}), \mathrm{O}$ ouvert t.q. $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}\}$.

Corrigé – *Par monotonie de* m *on a* $m(\mathrm{A}) \leq m(\mathrm{O})$ *si* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}$*, donc* $m(\mathrm{A}) \leq \inf\{m(\mathrm{O}), \mathrm{O}$ *ouvert t.q.* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}\}$*. Il reste donc à montrer que* $m(\mathrm{A}) \geq \inf\{m(\mathrm{O}), \mathrm{O}$ *ouvert t.q.* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}\}$*.*

Soit $\varepsilon > 0$*, d'après la question précédente, il existe* O *ouvert et* F *fermé t.q* $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{O}$ *et* $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \leq \varepsilon$*. On a donc aussi* $m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \leq \varepsilon$ *et donc* $m(\mathrm{O}) = m(\mathrm{A}) + m(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A}) \leq m(\mathrm{A}) + \varepsilon$*. Ceci montre bien que* $\inf\{m(\mathrm{O}), \mathrm{O}$ *ouvert t.q.* $\mathrm{A} \subset \mathrm{O}\} \leq m(\mathrm{A})$*.*

Exercice 7.13 (Fonction de Carathéodory)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x,s)$ est borélienne (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $s \mapsto f(x,s)$ est continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit f_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x,s) = f(x, \frac{i}{n})$ si $\frac{i}{n} \leq s < \frac{i+1}{n}$, $i \in \mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $f_n^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *Pour* $i \in \mathbb{Z}$*, on note* φ_i *la fonction (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*)* $x \mapsto f(x, i/n)$*. (Noter que* n *est fixé pour cette question.) Cette fonction* φ_i *est borélienne par hypothèse.*
On remarque maintenant que $f_n^{-1}(\mathrm{B}) = \cup_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$*.*
En effet, soit $(x,s) \in f_n^{-1}(\mathrm{B})$*. Il existe* $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $s \in [i/n, (i+1)/n[$ *et donc* $f_n(x,s) = f(x, \frac{i}{n}) = \varphi_i(x)$*. On a donc* $x \in \varphi_i^{-1}(\mathrm{B})$ *et*

$$(x,s) \in \varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[\subset \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}[.$$

Réciroquement, si il existe $i \in \mathbb{Z}$ *tel que* $(x,s) \in \varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$*, on a alors* $f_n(x,s) = f(x, i/n) = \varphi_i(x) \in \mathrm{B}$ *et donc* $(x,s) \in f_n^{-1}(\mathrm{B})$*.*
On a donc bien montré que $f_n^{-1}(\mathrm{B}) = \cup_{i\in\mathbb{Z}} \varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[$*.*
Comme, pour tout $i \in \mathbb{Z}$*,* φ_i *est borélienne, on a* $\varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et donc* $\varphi_i^{-1}(\mathrm{B}) \times [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*. La stabilité de* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *par union dénombrable donne alors* $f_n^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*.*

2. Montrer que, pour tout $x, s \in \mathbb{R}$, $f_n(x,s) \to f(x,s)$ quand $n \to +\infty$. En déduire que f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *Soient $x, s \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe i_n tel que $i_n/n \le s < (i_n+1)/n$ et on a $f_n(x) = f(x, i_n/n)$ et donc $f_n(x,s) - f(x,s) = f(s, i_n/n) - f(x)$.*

   Comme $|i_n/n - s| \le 1/n$, on a $\lim_{n\to+\infty} i_n/n = s$ et donc, grâce à la continuité de $f(x,\cdot)$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x,s) = f(x,s)$.

   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers f. La 1ere question montre que f_n est borélienne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que f est aussi borélienne (voir la proposition 3.19 sur la stabilité de l'ensemble des focntions mesurables).

Exercice 7.14 (Fonction de Carathéodory et composition)

Soit $\mathrm{N}, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x,\cdot)$ est continue pour tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que la fonction a est borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. (Noter que ceci peut être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments, un exemple est donné dans l'exercice 7.4.)

   Corrigé – *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une partition dénombrable de $\mathbb{R}^p$ formée de boréliens de diamètre inférieur à $1/n$ (une telle partition est possible en utilisant, par exemple, un quadrillage de $\mathbb{R}^p$.*

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{A}_{k,n}$, $k \in \mathbb{N}$, les éléments de cette partition (avec $\mathrm{A}_{k,n}$ non vide pour tout k). Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on choisit un point $s_{k,n} \in \mathrm{A}_{k,n}$ et on définit la fonction a_n de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ par

   $$a_n(x,s) = a(x, s_{k,n}) \text{ si } s \in \mathrm{A}_{k,n}.$$

   Si $s \in \mathrm{A}_{k,n}$, on a $|s - s_{k,n}| \le 1/n$ (car le diamètre de $\mathrm{A}_{k,n}$ est inférieur à $1/n$). Comme a est continue par rapport à son deuxième argument, on a pour tout $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^p$, $lim_{n\to+\infty} a_n(x,s) = a(x,s)$.

   On remarque maintenant que a_n est (pour tout n) une fonction borélienne. En effet $a_n(x,s) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(x, s_{k,n}) 1_{\mathrm{A}_{k,n}}(s)$ qui est bien une fonction borélienne comme limite d'une somme et de produits de fonctions boréliennes (voir la proposition 3.19). On a utilisé ici le fait que $a(\cdot, s)$ est borélienne, de Ω dans $\mathbb{R}^q$, pour tout $s \in \mathbb{R}^p$.

   Finalement, a est borélienne comme limite de fonctions boréliennes.

   Remarque : En pratique, on peut remplacer l'hypothèse "$a(x,\cdot)$ est continue pour tout $x \in \Omega$" par l'hypothèse "$a(x,\cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$". Le raisonnement précédent permet alors de montrer qu'il existe $\bar{a}$ borélienne telle que $a = \bar{a}$ p.p., ce qui est suffisant du point de vue de la théorie de l'intégration.

2. Soit v est une fonction borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^q$.

Corrigé – *On note b la fonction de Ω dans $\Omega \times \mathbb{R}^p$ définie par $b(x) = (x, v(x))$. La fonction b est borélienne car ses deux composantes sont boréliennes (voir la proposition 4.63). On en déduit que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est borélienne car cette fonction est la composition de b avec a (c'est-à-dire la fonction $x \mapsto a(b(x))$) qui sont boréliennes.*

3. Soient v_1, v_2 deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $v_1 = v_2$ p.p.. Montrer que les fonctions $x \mapsto a(x, v_1(x))$ et $x \mapsto a(x, v_2(x))$ sont égales p.p. sur Ω.

   Corrigé – *Soit $A \in B(\mathbb{R})$ ($A \subset \Omega$) tel que $\lambda(A) = 0$ et $v_1 = v_2$ sur $\Omega \setminus A$. On a alors $a(x, v_1(x)) = a(x, v_2(x))$ pour tout $x \in \Omega \setminus A$ et donc $a(x, v_1(x)) = a(x, v_2(x))$ p.p. sur Ω.*

Exercice 7.15 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la mesure de Lebesgue)

Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ($N \geq 1$) est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas $N = 1$, théorème 5.20.]

Corrigé – *On reprend la démonstration du théorème 5.20, les modifications à apporter sont mineures. Le point essentiel est la régularité de λ_N (proposition 7.17).*

Etape 1. *On suppose ici que $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(A) < +\infty$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Comme λ_N est une mesure régulière (proposition 7.17), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $F_n = F \cap B_n$, ou B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n. Comme dans le cas $N = 1$, Il existe n_0 tel que $\lambda_N(F \setminus F_{n_0}) \leq \varepsilon$. On pose $K = F_{n_0}$ et on obtient donc $K \subset F \subset A \subset O$, ce qui donne

$$\lambda_N(O \setminus K) \leq \lambda_N(O \setminus F) + \lambda_N(F \setminus K) \leq 2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda_N(O \setminus K) \leq 2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq 2\varepsilon$.

On pose

$$d = d(K, O^c) = \inf\{d(x, y), x \in K, y \in O^c\}.$$

On montre, comme dans le cas $N = 1$ que $d > 0$ et on définit alors la fonction φ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \varphi(x) = \frac{1}{d}(d - d(x, K))^+ \text{ avec } d(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}.$$

La fonction φ est continue car $x \mapsto d(x, K)$ est continue (et même lipschitzienne car $|d(x, K) - d(y, K)| \leq |x - y|$). Elle est à support compact car il existe $A > 0$ tel que $K \subset B_A$ et on remarque alors que $\varphi = 0$ sur B^c_{A+d}. On a donc $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi = 1$ sur K, $\varphi = 0$ sur O^c et $0 \leq \varphi \leq 1$ (partout). On en déduit que $f - \varphi = 0$ sur $K \cup O^c$ et $0 \leq |f - \varphi| \leq 1$, ce qui donne

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \lambda_N(O \setminus K) \leq 2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Les étapes suivantes (étapes 2, 3 et 4) sont identiques à celles du cas $N = 1$ en remplaçant $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et λ par λ_N.

Exercice 7.16 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1 pour une mesure finie sur les compacts) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x - y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.9.]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.17 (Invariance par translation de λ_N) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   Corrigé – *On pose* $T = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   Comme φ est bijective, il est facile de montrer que T est une tribu. En effet, il suffit de remarquer que $\varphi(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$, $\varphi(A^c) = (\varphi(A))^c$ et $\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

   Comme φ est continue, φ transforme les compacts en compacts. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$, on a donc $\mathcal{C} \subset T$ (on rappelle que les compacts sont des boréliens). Comme l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^N$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (noter que tout ouvert peut s'écrire comme une réunion dénombrable de compacts), on a donc $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne bien $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : la proposition 2.48 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit.]

   Corrigé – *On procède par récurrence sur* N. *La proposition 2.48 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $N = 1$ en posant $\lambda_1 = \lambda$. On suppose maintenant que le résultat est vrai pour $N-1$ avec un certain $N \geq 2$, c'est-à-dire que $\lambda_{N-1}(\psi(B)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$ et ψ définie par $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$ pour tout $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, et on démontre le résultat pour* N.

   Soit donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ et φ définie par

   $$\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t \text{ pour tout } x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N.$$

   Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$. On montre tout d'abord que m est une mesure. On a bien $m(\emptyset) = 0$ car $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. Puis, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ avec $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. On a

   $$\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n) \text{ avec } \varphi(A_n) \cap \varphi(A_m) = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ (car } \varphi \text{ est bijective).}$$

   Donc, $\lambda_N(\varphi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_N(\varphi(A_n))$ et donc $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$. Ce qui prouve la σ-additivité de m et donc le fait que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   On montre maintenant que $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ pour tout $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et pour tout $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$. Soit donc $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ et $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ et $\lambda(A_2) < \infty$. On a

   $$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)).$$

On pose $\psi(y) = (\alpha_1 y_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_{N-1} y_{N-1} + \beta_{N-1})^t$, *pour tout* $y = (y_1, \ldots, y_{N-1})^t \in \mathbb{R}^{N-1}$, *et* $\tau(z) = \alpha_N z + \beta_N$, *pour tout* $z \in \mathbb{R}$. *On a donc* $\varphi(A_1 \times A_2) = \psi(A_1) \times \tau(A_2)$. *L'hypothèse de récurrence et la proposition 2.48 donne que* $\lambda_{N-1}(\psi(A_1)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et que* $\lambda(\tau(A_2)) = \alpha_N \lambda(A_2) < \infty$. *Comme* $\lambda_N = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$ *(car c'est la définition de* λ_N*) on en déduit :*

$$\lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(\psi(A_1))\lambda(\tau(A_2)) = \prod_{i=1}^{N-1} |\alpha_i| \lambda_{N-1}(A_1) \alpha_N \lambda(A_2),$$

et donc :

$$m(A_1 \times A_2) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A_1 \times A_2)) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2).$$

On peut maintenant conclure. Comme m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$*vérifiant* $m(A_1 \times A_2) = \lambda_{N-1}(A_1)\lambda(A_2)$ *pour tout* $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1})$ *et pour tout* $A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.* $\lambda_{N-1}(A_1) < \infty$ *et* $\lambda(A_2) < \infty$, *la partie unicité du théorème 7.3 donne que* $m = \lambda_{N-1} \otimes \lambda$, *c'est-à-dire* $m = \lambda_N$. *On a donc bien* $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^{N} |\alpha_i| \lambda_N(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 7.18 (Changement de variable simple) Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que

$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^{N} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$

[Utiliser l'exercice 7.17.]

Corrigé – *Soit* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $f = 1_A$. *On a alors* $f \circ \varphi = 1_B$ *avec* $B = \varphi^{-1}(A)$. *En appliquant l'exercice 7.17à l'inverse de* φ, *noté* ψ, *on a donc* $\lambda_N(B) = \lambda_N(\psi(A)) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(A)$, *c'est-à-dire :*

$$\int f d\lambda_N = \lambda_N(A) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \lambda_N(B) = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{E}_+ \setminus \{0\}$. *Il existe donc* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *t.q.* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, *avec* $f_i = 1_{A_i}$. *On a alors, par linéarité de l'intégrale :*

$$\int f d\lambda_N = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i d\lambda_N = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i \circ \varphi d\lambda_N$$
$$= (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \int \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \circ \varphi d\lambda_N = (\prod_{i=1}^{N} |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

(Ce qui est, bien sûr, aussi vrai si $f = 0$.*)*

2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

   Corrigé – *Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ et $f_n \circ \varphi \uparrow f \circ \varphi$ quand $n \to +\infty$ (ce qui donne, en particulier que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$). La question précédente donne :*

$$\int f_n d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f_n \circ \varphi d\lambda_N.$$

   La définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne alors, quand $n \to +\infty$:

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

   Corrigé – *Comme f est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ et φ est mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}$ étant munis de leur tribu borélienne), on a bien $f \circ \varphi$ mesurable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.*

   En appliquant la question précédente à la fonction $|f|$ on obtient que $\int |f| \circ \varphi d\lambda_N = \int |f \circ \varphi| d\lambda_N < \infty$ car $\int |f| d\lambda_N < \infty$. On a donc $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$.

   Enfin, en remarquant que $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$ et en utilisant la question précédente avec f^+ et f^-, on obtient :

$$\int f^+ d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^+ \circ \varphi d\lambda_N,$$
$$\int f^- d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f^- \circ \varphi d\lambda_N.$$

   En faisant la différence, on en déduit :

$$\int f d\lambda_N = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|) \int f \circ \varphi d\lambda_N.$$

Exercice 7.19 (Primitives de fonctions L^p)

Soit $p \in [1, \infty[$. On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in [0,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda).$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \leq C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \leq C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0,1]$, $x < y$.

Corrigé – *On note* $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$. F *(et* G*) sont bien définies partout sur* $[0,1]$ *car* $f1_{[0,x]} \in L^1$ *(et* $g1_{[0,x]} \in L^1$*) pour tout* $x \in [0,1]$ *(on confond, comme d'habitude, un élément de* L^1 *ou* L^p *avec l'un de ses représentants).*

Soit $x, y \in [0,1]$*,* $x < y$*. En utilisant l'inégalité de Hölder avec* f *et* $1_{[x,y]}$*, on obtient, avec* $q = p/(p-1)$ *:*

$$|F(y) - F(x)| = |\int f1_{[x,y]}d\lambda| \le \|f\|_p\|1_{[x,y]}\|_q \le \|f\|_p|y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.19}$$

On a de même :

$$|G(y) - G(x)| \le \|g\|_p|y-x|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{7.20}$$

Ce qui donne les inégalités demandées en prenant $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$.

Les inégalités (7.19) et (7.20) donnent aussi la continuité (uniforme) de F *et* G *lorsque* $p > 1$ *(et donc* $1 - (1/p) > 0$*), mais pas pour* $p = 1$.

Pour $p = 1$*, on montre la continuité de* F *(et de* G *par un raisonnement semblable) en remarquant que, pour* $x, y \in [0,1]$*,* $x < y$ *:*

$$|F(y) - F(x)| \le \int |f|1_{[x,y]}d\lambda \to 0, \text{ quand } \lambda([x,y]) = y - x \to 0,$$

ceci découle de l'exercice 4.16 et donne même la continuité uniforme de F *comme cela a été démontré dans l'exercice 5.5.*

2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]

Corrigé – *On pose toujours* $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$*. Pour* $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$*, on a, avec* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} > 0$ *:*

$$|F(x) - F(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, \ |G(x) - G(\frac{k}{n})| \le C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}.$$

On en déduit que $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$ *avec :*

$$A_{n,k} = [F(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, F(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}],$$

$$B_{n,k} = [G(\frac{k}{n}) - C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}, G(\frac{k}{n}) + C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}}].$$

On a bien $\lambda(A_{n,k}) = \lambda(B_{n,k}) = 2C(\frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x)); x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to +\infty$.]

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$H_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \times B_{n,k} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La question précédente donne $E \subset H_n$. On en déduit que

$$E \subset H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

On utilise maintenant l'hypothèse $p > 2$ pour montrer que $\lambda_2(H) = 0$ (et donc que E est négligeable). En effet, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda_2(H) \leq \lambda_2(H_n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_2(A_{n,k} \times B_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(A_{n,k})\lambda(B_{n,k}) \leq n4C^2 \frac{1}{n^{2/q}} = 4C^2 n^{1-\frac{2}{q}},$$

avec $C = \max(\|f\|_p, \|g\|_p)$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Comme $p > 2$, on a $q < 2$ et donc $n^{1-\frac{2}{q}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ceci donne que $\lambda_2(H_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et donc que $\lambda_2(H) = 0$.

Exercice 7.20 (Une CNS pour qu'une fonction soit borélienne)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $A(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y < f(x)\}$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que f est boélienne si et seulement si $A(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

1. On suppose dans cette question que f est borélienne. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $F(x,y) = y - f(x)$. Montrer que F est borélienne est en déduire que $A(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

   Corrigé – *On remarque que $F = F_1 - F_2$ avec $F_1(x,y) = y$ et $F_2(x,y) = f(x)$. la fonction F_1 est continue et donc borélienne. La fonction F_2 est aussi borélienne car si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $F_2^{-1}(B) = f^{-1}(B) \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car f est borélienne. On en déduit que la fonction F est borélienne car elle est égale à différence de fonctions boréliennes.*

   Pour montrer que $A(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ il suffit de remarquer que $A(f) = F^{-1}(\mathbb{R}_-^\star)$ et d'utiliser le fait que F est borélienne.

2. On suppose dans cette question que $A(f) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $B = \{f > \alpha\}$ et $C = A(f) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \alpha < y\}$.

   (a) Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \alpha < y < f(x)\}$.

   Corrigé – *Il suffit de remarquer que C est l'intersection de deux boréliens de $\mathbb{R}^2$. Comme $A(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $y < f(x)\}$, on a bien $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\alpha < y < f(x)\}$.*

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

   $$\varphi(x,y) = (x, \alpha + n(y - \alpha)).$$

On pose $C_n = \{\varphi(x,y), (x,y) \in C\}$. Montrer que $C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que

$$C_n = \{(x,z), \alpha < z < \alpha + n(f(x) - \alpha\}.$$

[On pourra remarquer que φ est bijective continue et que sa réciproque est aussi continue.]

Corrigé – *On note ψ la fonction récripoque de la fonction φ. La fonction ψ est continue et donc borélienne. On en déduit que* $C_n = \psi^{-1}(C) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Puis, on remarque que

$$(x,z) \in C_n \iff (x, \frac{z-\alpha}{n} + \alpha) \in C.$$

On a donc

$$C_n = \{(x,z), \alpha < \frac{z-\alpha}{n} + \alpha < f(x)\} = \{(x,z), 0 < z - \alpha < n(f(x) - \alpha)\}$$
$$= \{(x,z), \alpha < z < \alpha + n(f(x) - \alpha)\}.$$

(c) Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}^\star} C_n = B \times D$ avec $D = \{y \in \mathbb{R}, y > \alpha\}$ (où les C_n sont définis à la question précédente). En déduire que $B \in B(\mathbb{R})$. [On rappelle que si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $z \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S(z) = \{x \in \mathbb{R}$, t.q. $(x,z) \in E$ est un borélien de $\mathbb{R}$.]

Corrigé – *Il est clair que* $C_n \supset B \times D$. *Puis, si $(x,z) \in B \times d$, on a $f(x) > \alpha$ et $z > \alpha$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ (pouvant dépendre de z) t.q. $(x,z) \in C_n$. On a donc* $\cup_{n\in\mathbb{N}^\star} C_n = B \times D$.
Comme $C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout n, on en déduit de $B \times D \in B(\mathbb{R}^2)$. *Comme* $D \neq \emptyset$, *ceci montre que* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(il suffit de prendre $z \in B$ et de remarquer que* $B = S(z) = \{x \in \mathbb{R}$ *t.q.* $(x,z) \in B \times D\}$. *La première étape de la démonstration d'existence de la mesure produit, théorème 7.3, donne que* $S(z) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*)*

(d) Montrer que f est borélienne.

Corrigé – *On a montré que $f^{-1}(]\alpha,+\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Ceci est suffisant pour en déduire que f est borélienne.*

7.7.4 Convolution

Exercice 7.21 (Propriétés élémentaires de la convolution) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f * g = g * f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variable simples (propositions 7.20 et 7.21).]

Corrigé – *On confond, comme d'habitude f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f * g$ (qui est définie comme un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$) la fonction définie par*

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y) \text{ si } f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N).$$

On sait que cette fonction est définie p.p. car $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. On choisit de manière analogue comme représentant de $g * f$ la fonction définie par

$$g * f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda_N(y) \text{ si } g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ un point pour lequel $f * g$ est définie. On a donc $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose $h(\cdot) = f(\cdot)g(x-\cdot)$. On utilise alors la proposition 7.21 (changement de variable simple) avec φ définie par $\varphi(y) = -y + x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$. Elle donne $h \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et :

$$\int h(\varphi(y))d\lambda_N(y) = \int h(y)d\lambda_N(y).$$

Comme $h(\varphi(y)) = f(\varphi(y))g(x-\varphi(y)) = f(x-y)g(y)$, on en déduit que $g * f$ est définie au point x et que $g * f(x) = f * g(x)$. Ceci montre bien que $f * g = g * f$ p.p..

2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f * g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0,\alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$. Montrer que $f * g = 0$ p.p. sur $B(0,a+b)^c$.]

Corrigé – *Comme pour la question précédente, on confond f (et g) avec l'un de ses représentants, et on choisit comme représentant de $f * g$ la fonction définie par $f * g(x) = \int f(y)g(x-y)d\lambda_N(y)$ si $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$.*

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$. ($\mathbb{R}^N$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$.) Soit $x \in B(0,a+b)^c$. On va montrer que $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. (et donc que $f * g(x) = 0$, noter aussi que $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car f et g le sont).

Comme $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$, on a aussi $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$. Comme $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$, on a $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. sur $B(x,b)^c$ (car $y \in B(x,b)^c \iff (x-y) \in B(0,b)^c$). On a donc :

$$f(\cdot)g(x-\cdot) = 0 \text{ p.p. sur } B(0,a)^c \cup B(x,b)^c. \tag{7.21}$$

Or $B(0,a) \cap B(x,b) = \emptyset$ car $y \in B(0,a) \cap B(x,b)$ implique $\|y\| < a$ et $\|x-y\| < b$ et donc $\|x\| = \|x-y+y\| < a+b$, ce qui contredit $x \in B(0,a+b)^c$. On a donc $B(0,a)^c \cup B(x,b)^c = (B(0,a) \cap B(x,b))^c = \mathbb{R}^N$ et (7.21) donne alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = 0$ p.p. et donc $f * g$ est définie au point x et $f * g(x) = 0$.

On a bien montré que $f * g = 0$ p.p. sur $B(0,a+b)^c$ et donc que $f * g$ est à support compact.

Exercice 7.22 (Convolution $L^p - C_c^\infty$)

Soit $1 \le p \le \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, B(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors
$$f * \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot) d\lambda_N.$$

Corrigé – *On rappelle que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ et $f 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. On a donc $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (pour tout $1 \le p \le \infty$) car si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$, on a bien $f \in \mathcal{M}$ et, grâce à l'inégalité de Hölder, $f 1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ (et $\|f 1_K\|_1 \le \|f\|_p \|1_K\|_q < \infty$,avec $q = p/(p-1)$).*

On suppose donc dans la suite de ce corrigé que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ car cette hypothèse est plus générale que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$. Pour simplifier la rédaction, on se limite au cas $N = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ est mesurable (c'est-à-dire ici borélienne car $\mathbb{R}$ est muni de sa tribu de Borel) car f est mesurable et $\rho(x - \cdot)$ est mesurable (car continue). Comme ρ est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$. On a donc $\rho(x - \cdot) = 0$ sur K_x^c avec $K_x = [x - a, x + a]$, ce qui permet de montrer que $f(\cdot)\rho(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f(\cdot)\rho(x - \cdot)| \le |f 1_{K_x}| \|\rho\|_u$, avec $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\} < \infty$, et $f 1_{K_x} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

La fonction $f * \rho$ est donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Corrigé – *Comme dans la question précédente, on va utiliser $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\rho = 0$ sur $[-a, a]^c$ et $\|\rho\|_u = \max\{|\rho(z)|, z \in \mathbb{R}\}$ (on va aussi utiliser les normes des dérivées de ρ, $\|\rho^{(k)}\|_u$). On raisonne maintenant en trois étapes.*

Etape 1. *On commence par montrer que $f * \rho$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La continuité de $f * \rho$ en x_0 découle du théorème de continuité sous le signe $\int$, théorème 4.52. En effet, on pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$:*
$$F(x, y) = f(y)\rho(x - y).$$
On a $F(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f * \rho(x) = \int F(x, \cdot) d\lambda$. La fonction F vérifie alors les 2 hypothèses suivantes :

(a) $x \mapsto F(x, y)$ est continue en x_0, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|F(x, y)| \le G(y)$ pour tout $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, en prenant $G = |f 1_K| \|\rho\|_u$ avec $K = [x_0 - 1 - a, x_0 + 1 + a]$.

Comme K est compact, on a $G \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et le théorème 4.52 donne bien la continuité de $f * \rho$ en x_0.

Etape 2. *On montre maintenant que $f * \rho$ est dérivable en tout point et que $(f * \rho)' = f * \rho'$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour montrer la dérivabilité de $f * \rho$ en x_0, on utilise le théorème*

de dérivabilité sous le signe $\int$, *théorème 4.53. On reprend la même fonction* F *que dans l'étape 1, elle vérifie les 2 hypothèses suivantes :*

(a) $x \mapsto \mathrm{F}(x,y)$ *est dérivable pour tout* $x \in]x_0-1, x_0+1[$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$,

(b) $|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(x,y)| = |f(y)\rho'(x-y)| \le \mathrm{H}(y)$ *pour tout* $x \in]x_0-1, x_0+1[$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *en prenant* $\mathrm{H} = |f 1_{\mathrm{K}}| \|\rho'\|_u$ *avec* $\mathrm{K} = [x_0-1-a, x_0+1+a]$.

Comme K *est compact, on a* $\mathrm{H} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et le théorème 4.53 donne bien la dérivabilité de* $f * \rho$ *en* x_0 *et le fait que* $(f*\rho)'(x_0) = f*\rho'(x_0)$.

Etape 3. *On montre enfin que* $f*\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Pour cela, on va montrer, par récurrence sur k, que* $f*\rho \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $(f*\rho)^{(k)} = f*\rho^{(k)}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *(ce qui donne bien* $f*\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$*).*

L'étape 1 montre que $f*\rho \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *(et on a bien* $(f*\rho)^{(0)} = f*\rho = f*\rho^{(0)}$*). On suppose maintenant que* $f*\rho \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $(f*\rho)^{(k)} = f*\rho^{(k)}$ *pour un certain* $k \in \mathbb{N}$. *L'étape 2 appliquée à* $\rho^{(k)}$ *(qui appartient aussi à* $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$*) au lieu de* ρ *donne alors que* $f*\rho^{(k)}$ *est dérivable et que sa dérivée est* $f*\rho^{(k+1)}$. *L'étape 1 appliquée à* $\rho^{(k+1)}$ *donne que* $f*\rho^{(k+1)} \in \mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *On a donc bien finalement montré que* $f*\rho \in \mathrm{C}^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $(f*\rho)^{(k+1)} = f*\rho^{(k+1)}$, *ce qui termine la récurrence.*

3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f*\rho$ est aussi à support compact.

Corrigé – *Comme* f *et* ρ *sont à support compact, on démontre que* $f*\rho$ *est aussi à support compact, comme cela a été fait dans l'exercice 7.21. Plus précisément, si* $f = 0$ *p.p. sur* $\mathrm{B}(0,a)^c$ *et* $\rho = 0$ *sur* $\mathrm{B}(o,b)^c$, *on a* $f*\rho = 0$ *sur* $\mathrm{B}(0,a+b)^c$ *(voir l'exercice 7.21).*

Exercice 7.23 (Inégalité de Young) Soient $1 < p < +\infty, f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ et $g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$. Montrer que $f*g$ est définie p.p., que $f*g \in \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ et que $\|f*g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$. [Écrire

$$\int \Big(\int |f(x-y)g(y)| dy \Big)^p dx = \int \Big(\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy \Big)^p dx,$$

avec $q = p/(p-1)$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli.]

Corrigé – *Pour simplifier les notations, on ne traite ici que le cas* $\mathrm{N} = 1$. *On suppose aussi que* f *et* g *ne sont pas nulles p.p. (sinon, il est immédiat que* $f*g$ *est définie partout et* $f*g(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*).*

On confond f *et* g *avec l'un de leurs représentants.*

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, *on pose* $\mathrm{H}(x,y) = g(y)f(x-y)$. *La première partie de la démonstration de la proposition sur la convolution (proposition 7.22) montre que* H, *et donc* $|\mathrm{H}|$, *est* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*-mesurable. On peut alors utiliser les deux premières conclusions du théorème de*

Fubini-Tonelli (théorème 7.7) pour affirmer que $|g(\cdot)f(x-\cdot)| \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et que* $\varphi \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *avec* φ *définie par* $\varphi(x) = \int |g(\cdot)f(x-\cdot)|d\lambda$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Par composition de fonctions mesurables, on a donc aussi* $\varphi^p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Soit $x \in \mathbb{R}$*. Les fonctions* $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}}$ *et* $|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)|$ *sont aussi mesurables. On peut alors utiliser l'inégalité de Hölder avec* $q = p/(p-1)$*. elle donne :*

$$
\begin{aligned}
(\varphi(x))^p &= \left(\int |f(x-\cdot)|^{\frac{1}{q}}|f(x-\cdot)|^{\frac{1}{p}}|g(\cdot)|d\lambda\right)^p \\
&\le \left(\int |f(x-\cdot)|d\lambda\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda\right) \qquad (7.22)\\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\left(\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda\right).
\end{aligned}
$$

Noter que (7.22) est vraie si $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et si* $|f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$*. Dans ce dernier cas on obtient seulement* $\varphi(x)^p \le \infty$*. On a aussi utilisé la proposition 7.21 pour dire que* $\int |f(x-\cdot)|d\lambda = \int |f|d\lambda = \|f\|_1$.

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) avec les fonctions $|f|$ *et* $|g|^p$*. Il donne :*

$$
\begin{aligned}
\int \varphi(x)^p d\lambda(x) &\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int\left(\int |f(x-\cdot)||g(\cdot)|^p d\lambda\right)d\lambda(x)\\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int\left(\int |f(x-y)||g(y)|^p d\lambda(x)\right)d\lambda(y) \qquad (7.23)\\
&\le \|f\|_1^{\frac{p}{q}}\|f\|_1\|g\|_p^p = \|f\|_1^p\|g\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Ceci donne que $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *et, en particulier que* $\varphi(x) < \infty$ *p.p., c'est-à-dire* $\lambda(\mathrm{A}) = 0$ *avec* $\mathrm{A} = \{\varphi = \infty\}$ *(noter que* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *puisque* $\varphi \in \mathcal{M}_+$*). Pour tout* $x \in \mathrm{A}^c$*, on a donc* $g(\cdot)f(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ *et on peut définir* $g * f(x)$ *par* $g * f(x) = \int g(y)f(x-y)d\lambda(y)$.

La fonction $g * f$ *est donc définie p.p.. On remarque maintenant qu'elle est égale p.p. à une fonction mesurable. En effet, les fonctions* H^+ *et* H^- *sont* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*-mesurables (d'après la première partie de la démonstration de la proposition 7.22, on rappelle que* $\mathrm{H}(x,y) = g(y)f(x-y)$*). Les deux premières conclusions du théorème 7.7) donnent alors* $(g(\cdot)f(x-\cdot)^{\pm} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et que* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *avec* φ_1 *et* φ_2 *définies par, pour* $x \in \mathbb{R}$,

$$
\varphi_1(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^+ d\lambda, \;\; \varphi_2(x) = \int (g(\cdot)f(x-\cdot))^- d\lambda.
$$

On pose alors $h = \varphi_1 - \varphi_2$ *sur* A^c *et* $h = 0$ *sur* A*. On a bien que* h *est mesurable (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) et* $h = g * f$ *p.p..*

On remarque enfin que $h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *car* $|h| \le \varphi$ *p.p. et* $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$*. On en déduit bien que* $g * f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *(avec la confusion habituelle entre* $g * f$ *et la classe de* h *dans* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$*).*

Le fait que $\|g * f\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$ *est conséquence immédiate de (7.23) puisque* $g * f \le \varphi$ *p.p..*

Enfin, le raisonnement fait dans la première question de l'exercice (7.21) montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *si et seulement* $f(x-\cdot)g(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *et que ces*

deux fonctions ont alors même intégrale. Ceci permet de montrer que $f * g$ est aussi définie p.p. et que $f * g = g * f$ p.p.

Exercice 7.24 (Itérations de convolution) Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in L^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On pose $f^{*1} = f$ et pour $n > 1$, $f^{*n} = f^{*(n-1)} * f$.

Pour $\alpha \geq 0$, on pose $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)|dt$.

1.(a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.

Corrigé – *On montre par récurrence que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appartient à L^1 et que $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*
En effet, on a bien $f^{*1} = f \in L^1$ et $f^{*1} = f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.
Puis on suppose (hypothèse de récurrence) que $f^{*n} \in L^1$ et $f^{*n} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On remarque alors que f^{*n+1} est bien définie comme étant le produit de convolution de deux éléments de L^1 et appartient à L^1 (proposition 7.22). Puis pour $x < 0$, on a $f^{*n}(x - \cdot)f(\cdot) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$ (en remarquant en $x - y < 0$ pour $y > 0$) et donc $f^{*n+1}(x) = 0$. Ce qui termine la récurrence.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $n \geq 1$.

Corrigé – *Soit $\alpha \geq 0$. On montre par récurrence sur n que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$. Cette inégalité est vraie pour $n = 1$ puisque c'est la définition de g et que $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*
On suppose maintenant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq (g(\alpha))^n$. On a alors, en utilisant le thèorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) puis le changement de variable $t - s = \tau$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|f^{*(n+1)}(t)|dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}|\int_{\mathbb{R}} f^{*n}(t-s)f(s)ds|dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t}(\int_{\mathbb{R}} |f^{*n}(t-s)||f(s)|ds)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha(t-s)}|f^{*n}(t-s)|dt)ds
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\tau}|f^{*n}(\tau)|d\tau)ds \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha s}|f(s)|(g(\alpha))^n ds \leq (g(\alpha))^{n+1}.$$

(c) Montrer que $\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \leq e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \geq 0$ tout $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$.

Corrigé – *If suffit ici de remarquer que $e^{-\alpha x} \leq e^{-\alpha t}$ pour $0 < t < x$, on en déduit, pour tout n, avec la question précédente,*

$$e^{-\alpha x}\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \leq \int_0^x e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \leq g(\alpha)^n.$$

Ce qui donne bien l'inégalité recherchée.

2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   Corrigé – *On pose* $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $y \mapsto h(x-y)f^{*n}(y)$ *est intégrable (car elle est mesurable de dominée par* $M|f^{*n}|$ *qui est intégrable). La fonction* $h * f^{*n}$ *est donc définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Cette fonction est bornée car* $|h * f^{*n}(x)| \le M\|f^{*n}\|_1 < +\infty$. *Enfin, elle est continue d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, théorème 4.52.*
   On suppose maintenant que, $h = 0$ *sur* $\mathbb{R}_-$. *Comme* $f^{*n} = 0$ *p.p. sur* $\mathbb{R}_-$, $h * f^{*n}(x) = 0$ *pour tout* $x \le 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit maintenant $x > 0$. *On a, avec la question précédente, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \ge 0$,
   $$|h * f^{*n}(x)| = |\int_0^x h(x-t)f^{*n}(t)dt| \le M\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \le Me^{\alpha x}g(\alpha)^n. \qquad (7.24)$$
   Il suffit maintenant de remarquer que $\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) = 0$ *(c'est une conséquence du théorème de convergence dominée car* $\lim_{\alpha\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$ *et* $|e^{-\alpha t} f(t)| \le |f((t)|$ *pour tout* $t > 0$*). On peut donc choisir* $\alpha \ge 0$ *tel que* $g(\alpha) < 1$. *On déduit alors de l'inégalité* (7.24) $\lim_{n\to+\infty} h * f^{*n}(x) = 0$.

Exercice 7.25 Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose
$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Corrigé – *Selon le théorème 7.3,* $\mu\otimes\nu$ *est mesure finie sur les boréliens de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mu\otimes\nu(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})$ *(cf. égalité* (7.1) *avec* $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$*)*
   On remarque maintenant que si φ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire mesurable quand* $\mathbb{R}$ *est muni de la tribu de Borel) la fonction* $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ *est borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *car c'est la composée de l'application continue (donc borélienne)* $(x,y) \mapsto x+y$ *(de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$*) avec* φ. *Si* φ *est de plus positive ou bornée* $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)d(\mu\otimes\nu)(x,y)$ *est alors bien définie (et appartient à* $\mathbb{R}$ *ou éventuellement* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *dans le cas* φ *positive non bornée).*
   Comme $\mu * \nu(A) = \mu\otimes\nu(\mathbb{R}^2) < +\infty$, *il suffit de vérifier la* σ*-additivité de* $\mu * \nu$ *pour montrer que* $\mu * \nu$ *est une mesure. Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *disjoints deux à deux, et* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. *Comme* $1_A = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}$, *le téorème de convergence monotone (ou sa conséquence, corollaire 4.18) donne*
   $$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x+y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^2} 1_{A_n}(x+y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)$$
   $$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu * \nu(A_n).$$

2. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\,d(\mu * \nu)(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y), \qquad (7.25)$$

pour toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, borélienne positive ou borélienne bornée.

Corrigé – *L'égalité* (7.25) *est vrai si* $\varphi = 1_A$, $A \in \mathcal{B}(R)$ *(par la définition de* $\mu * \nu$*). Par "linéarité positive" (proposition 4.10) pour les deux mesures* $\mu * \nu$ *et* $\mu \otimes \nu$ *elle est aussi vraie si* φ *est étagée positive, c'est-à-dire* $\varphi \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(en fait, on peut aussi remarquer sur* $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ *est étagée positive de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *et utiliser la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{E}_+$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont toujours munis de leur tribu boréleinne).*

Soit maintenant φ *borélienne positive de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. La fonction* φ *est alors limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives et on obtient* (7.25) *avec le théorème de convergence monotone pour les deux mesures* $\mu * \nu$ *et* $\mu \otimes \nu$*. (En fait, on peut aussi utiliser directement la définition de l'intégrale sur* $\mathcal{M}_+$*.)*

Enfin, si φ *est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borélienne bornée, elle est donc intégrable pour la mesure* $\mu * \nu$ *(car c'est une mesure finie). En utilisant* (7.25) *avec* φ^+ *et* φ^-*, on en déduit que la fonction* $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ *est intégrable pour la mesure* $\mu \otimes \nu$ *et que* (7.25) *est vraie.*

3. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.

Corrigé – *Il suffit ici de remarquer que* $\mu * \nu(\mathbb{R}) = \mu \otimes \nu(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R}) = 1$ *si* μ *et* ν *sont des probabilités.*

4. Montrer que si μ et ν sont des probabiltés de densités respectives f et g (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), alors $\mu * \nu$ est la probabilité de densité $f * g$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé – *On reprend ici le preuve faite dans le paragraphe 7.5. Soit* φ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *borélienne bornée. En utilisant* $\mu = f\lambda$, $\nu = g\lambda$ *et le théorème de Fubini, on obtient*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y) d(\mu \otimes \nu) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y) f(x) dx) g(y) dy.$$

Le changement de variable $x + y = z$ *dans l'intégrale sur* x *puis le théorème de Fubini donnent*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f(z-y) dz) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} f(z-y) g(y) dy) \varphi(z) dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f * g(z) \varphi(z) dz.$$

Ceci prouve bien que $\mu * \nu = (f * g)\lambda$.

7.7.5 Changement de variable

Exercice 7.26 (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)

On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 7.27 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ (on rappelle que $dx\,dy$ désigne $d\lambda_2(x,y)$).
[On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]

Corrigé – *Pour $x,y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}1_{\mathbb{R}_+}(x)1_{\mathbb{R}_+}(y)$. On a $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (noter que f est le produit de fonctions mesurables). On peut donc lui appliquer la formule (7.10) :*

$$\int f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\right)d\theta.$$

On a donc :

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr.$$

Puis, comme $\int_0^n e^{-r^2}rdr = \frac{1}{2}(1-e^{-n^2})$ et que, par le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-r^2}rdr = \int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr,$$

on en déduit $\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = \frac{1}{2}$ et donc

$$\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}dx$.

Corrigé – *On applique le théorème de Fubini–Tonelli (théorème 7.7) à la fonction f définie à la question précédente. Il donne :*

$$\int f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right)dx,$$

et donc

$$\frac{\pi}{4} = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}d\lambda_2(x,y) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\right)e^{-x^2}dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

On en déduit que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 7.28 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) On note $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$ la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (*i.e.* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid |x| = 1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, on pose $\widetilde{\mathrm{A}} = \{tx,\ t \in [0,1],\ x \in \mathrm{A}\}$. Montrer que si A est un borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, alors $\widetilde{\mathrm{A}}$ est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

On définit alors, quand A est un borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{N}\lambda_{\mathrm{N}}(\widetilde{\mathrm{A}})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$.

Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(x)\,dx = \int_0^{\infty}\left(\int_{\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{\mathrm{N}-1}\,d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \to |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ ou sur B_1, avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \,;\, |x| \le 1\}$.

Corrigé – *Pour* $R \in \mathbb{R}_+$, *on note* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \,;\, |x| \le R\}$.

1. *On montre tout d'abord que* $\widetilde{A}$ *est un borélien de* $\mathbb{R}^N$ *si* A *est un borélien de* S^{N-1}. *Pour cela, on pose* $T = \{A \in \mathcal{B}(S^{N-1})\,;\, \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\}$.

   On montre que T *est une tribu. En effet,* $\widetilde{A} = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *si* $A = \emptyset$ *et donc* $\emptyset \in T$. *Puis, on remarque que* T *est stable par complémentaire car, pour* $A \in T$, $\widetilde{S^{N-1} \setminus A} = B_1 \setminus \widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *ce qui montre que* $S^{N-1} \setminus A \in T$. *Enfin, il est facile de voir que* T *est stable par union dénombrable car, pour* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$, *on a* $\widetilde{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$. *On a bien montré que* T *est une tribu.*

   Soit $\mathcal{C}$ *l'ensemble des fermés de* S^{N-1}. *Si* $A \in \mathcal{C}$, *on voit que* $\widetilde{A}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^N$. *En effet, si* $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1] \times A$ *est t.q.* $t_n x_n \to y$ *dans* $\mathbb{R}^N$, *on peut supposer, par compacité de* $[0,1]$ *et de* S^{N-1}, *après extraction d'une sous-suite encore notée* $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *que* $t_n \to t \in [0,1]$ *et* $x_n \to x \in S^{N-1}$ *quand* $n \to +\infty$. *On en déduit que* $y = tx \in \widetilde{A}$, *ce qui prouve que* $\widetilde{A}$ *est fermé. Comme les fermés sont des boréliens, on a donc* $\mathcal{C} \subset T$.

   Pour conclure, il suffit de remarquer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ *(sur* S^{N-1}*) est* $\mathcal{B}(S^{N-1})$. *On en déduit bien que* $\mathcal{B}(S^{N-1}) = T$.

2. *Il est facile de montrer que* σ *est une mesure. Il suffit en effet de remarquer que* $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$ *(et donc* $\sigma(\emptyset) = 0$*) et que, pour* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ *t.q.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *si* $n \ne m$, *on a, avec* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\widetilde{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A_n}$ *et* $\widetilde{A_n} \cap \widetilde{A_m} = \emptyset$ *si* $n \ne m$. *On déduit alors la* σ*-additivité de* σ *de la* σ*-additivité de* λ_N.

3. *On va montrer maintenant :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi) \right) \rho^{N-1}\,d\rho, \tag{7.26}$$

   pour tout $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. *Cette démonstration est difficile (le reste de la démonstration sera plus facile). On raisonne en trois étapes.*

   Etape 1. *Pour* $A \in \mathcal{B}(S^{N-1})$ *et pour* $0 \le r < R < \infty$, *on pose* $A_{r,R} = \{\rho\xi,\ \rho \in [r,R[,\ \xi \in A\}$. *Dans cette étape, on prend* $f = 1_E$ *avec* $E = A_{r,R}$ *et on montre alors que les deux membres de (7.26) sont bien définis et sont égaux.*

   Pour montrer que $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *il suffit de remarquer que* $A_{r,R} = A_R \setminus A_r$ *avec*

$$A_a = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}_a} t\widetilde{A} \text{ où } \mathbb{Q}_a = \{t \in \mathbb{Q}_+^*, t < a\} \text{ si } a > 0, \text{ et } A_0 = \emptyset.$$

   Comme $\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, *on a* $t\widetilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $t > 0$ *(voir la proposition 7.20) et donc* $A_a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $a \ge 0$. *On en déduit que* $A_{r,R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

   On calcule maintenant $\lambda_N(A_{r,R})$ *(qui est le membre de gauche de (7.26)). D'après la proposition 7.21, on a* $\lambda_N(t\widetilde{A}) = t^N \lambda_N(\widetilde{A})$ *pour tout* $t > 0$. *la continuité croissante d'une mesure donne alors* $\lambda_N(A_a) = a^N \lambda_N(\widetilde{A})$ *pour tout* $a > 0$ *et donc :*

$$\lambda_N(A_{r,R}) = \lambda_N(A_R \setminus A_r) = \lambda_N(A_R) - \lambda_N(A_r) = (R^N - r^N)\lambda_N(\widetilde{A}) = \frac{R^N - r^N}{N}\sigma(A).$$

Soit $\rho > 0$.

- *Si* $\rho \notin [r, \mathrm{R}[$, *on a* $f(r\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$. *On a donc*
$$f(\rho\cdot) = 1_{\emptyset} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}, \mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1})) \text{ et } \int f(\rho\cdot)d\sigma = 0.$$
- *Si* $\rho \in [r, \mathrm{R}[$, *on a* $f(r\xi) = 1$ *pour tout* $\xi \in \mathrm{A}$ *et* $f(r\xi) = 0$ *pour tout* $\xi \in \mathrm{S}^{\mathrm{N}-1} \setminus \mathrm{A}$. *On a donc*
$$f(\rho\cdot) = 1_{\mathrm{A}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}, \mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1})) \text{ et } \int f(\rho\cdot)d\sigma = \sigma(\mathrm{A}).$$

On en déduit que la fonction $\rho \mapsto \int f(\rho\cdot)d\sigma$ *est égale à* $\sigma(\mathrm{A})1_{[r,\mathrm{R}[}$, *elle appartient donc à* $\mathcal{M}_+(\mathrm{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathrm{R}_+^*), \lambda)$ *et on a :*
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\int_{\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{\mathrm{N}-1}\,d\rho &= \int_{\mathbb{R}_+^*} \sigma(\mathrm{A})1_{[r,\mathrm{R}[}(\rho)\rho^{\mathrm{N}-1}d\rho\\ &= \sigma(\mathrm{A})\int_r^{\mathrm{R}} \rho^{\mathrm{N}-1}d\rho\\ &= \sigma(\mathrm{A})\frac{\mathrm{R}^{\mathrm{N}} - r^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}}.\end{aligned}$$

On a bien montré que les deux membres de (7.26) étaient bien définis et étaient égaux.

Etape 2. *On pose* $\mathcal{D} = \{\mathrm{A}_{r,\mathrm{R}},\ 0 \le r < \mathrm{R} < \infty,\ \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1})\}$. *On montre ici que* $\mathcal{D}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

On a déjà vu que $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. *Donc,* $\mathrm{T}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. *Pour montrer l'inclusion inverse, on va montrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'éléments de* $\mathcal{D}$.

On commence par remarquer qu'il existe une partie dénombrable de $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$, *dense dans* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$ *(ceci découle de la séparabilité de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$*). Soit* S *une telle partie. On peut alors démontrer (on ne détaille pas ici cette démonstration, assez simple) que si* $x \in \mathrm{O}$, O *ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, *il existe une boule ouverte de* $\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}$ *dont le centre est dans* S *et donc le rayon est rationnel, on note* A *cette boule, et il existe* $r, \mathrm{R} \in \mathbb{Q}$ *t.q.* $x \in \mathrm{A}_{r,\mathrm{R}} \subset \mathrm{O}$. *On en déduit facilement que* O *est une union au plus dénombrable d'éléments de* $\mathcal{D}$ *(voir l'exercice 2.7 pour des résultats semblables). Ce résultat montre que les ouverts de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *sont dans* $\mathrm{T}(\mathcal{D})$ *et donc que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset \mathrm{T}(\mathcal{D})$.

On a bien finalement $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) = \mathrm{T}(\mathcal{D})$.

Etape 3. *On montre dans cette étape que (7.26) est vraie pour tout* $f = 1_{\mathrm{E}}$ *avec* $\mathrm{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

En admettant que le deuxième membre de (7.26) est bien défini pour tout $\mathrm{E} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, *on peut définir une mesure* m *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *en posant*
$$m(\mathrm{E}) = \int_0^\infty \left(\int_{\mathrm{S}^{\mathrm{N}-1}} 1_{\mathrm{E}}(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{\mathrm{N}-1}\,d\rho.$$

On a montré que $m = \lambda_{\mathrm{N}}$ *sur* $\mathcal{D}$ *(Etape 1) et que* $\mathcal{D}$ *engendre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *(Etape 2). Le fait que deux mesures sur une tribu* T *soient égales sur une famille engendrant* T *est insuffisant pour dire qu'elles sont égales sur* T *(voir exercice 2.21), mais cela est*

suffisant si cette famille est une semi–algèbre (une famille $\mathcal{C}$ *est une semi–algèbre si* $\emptyset, \emptyset^c \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie, et le complémentaire de tout élément de* $\mathcal{C}$ *est une réunion finie disjointe d'éléments de* $\mathcal{C}$*), et si les mesures sont finies. C'est ainsi que nous allons montrer que (7.26) est vraie pour tout* $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $R > 0$. *On note* $\mathcal{D}_R = \{E \in \mathcal{D}\,;\ E \subset B_R\}$ *et* $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}(B_R) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)\,;\ A \subset B_R\}$. *L'étape 2 donne que la tribu engendrée (sur* B_R*) par* $\mathcal{D}_R$*, notée* $T(\mathcal{D}_R)$*, est égale à* $\mathcal{B}_R$.

On remarque tout d'abord que si $C \in \mathcal{D}_R$, $(B_R \setminus C)$ *est la réunion disjointe d'au plus 3 éléments de* $\mathcal{D}_R$*. On en déduit, comme dans l'exercice 7.2, que l'algèbre engendrée par* $\mathcal{D}_R$ *sur* B_R *(voir la définition 2.5 pour la définition d'une algèbre), notée* $\mathcal{A}_R$*, est l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de* $\mathcal{D}_R$*. Soit* $E \in \mathcal{A}_R$*. Il est alors facile de montrer (par linéarité de l'intégrale et avec l'étape 1) que les deux membres de (7.26) sont bien définis et égaux si* $f = 1_E$.

On note M_R *l'ensemble des éléments* $E \in \mathcal{B}(B_R)$ *t.q. les deux membres de (7.26) soient bien définis et égaux si* $f = 1_E$*. Une application facile du théorème de convergence monotone donne que* M_R *est une classe monotone. (en fait, si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ *est une suite décroissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite* $1_{B_R} - 1_{E_n}$ *alors que si* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_R$ *est une suite croissante, on applique le théorème de convergence monotone à la suite* 1_{E_n}*).* M_R *est donc une classe monotone qui contient* $\mathcal{A}_R$, M_R *contient donc la classe monotone engendrée par* $\mathcal{A}_R$*, or, le lemme sur les classes monotones (exercice 2.13) montre que cette classe monotone est égale à la tribu engendrée par* $\mathcal{A}_R$*, elle même égale à la tribu engendrée par* $\mathcal{D}_R$*. Ceci montre que* $M_R = \mathcal{B}(B_R)$ *et donc que les deux membres de (7.26) sont bien définis et égaux si* $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(B_R)$.

En appliquant une nouvelle fois le théorème de convergence monotone, il est alors facile de conclure que les deux membres de (7.26) sont bien définis et égaux si $f = 1_E$ *avec* $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

4. *La fin de la démonstration est maintenant facile (elle utilise un raisonnement souvent utilisé dans des exercices précédents). Par linéarité de l'intégrale, on montre que les deux membres de (7.26) sont bien définis et égaux si* $f \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, puis, par convergence monotone, si* $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*. Enfin, on traite le cas* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ *en décomposant* $f = f^+ - f^-$.

5. *Comme application simple de (7.26) pour* $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$*, on trouve que* $x \to |x|^\alpha$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}^N \setminus B_1$ *si et seulement si* $\alpha + N - 1 < -1$ *et est intégrable sur* B_1 *si et seulement si* $\alpha + N - 1 > -1$.

Exercice 7.29 (Changement de variable $W^{1,1}$ croissant) Soit $f \in \mathcal{L}^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

Corrigé – *Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on a $\varphi(y) - \varphi(x) = \int_x^y f(t)dt$. On en déduit que φ est continue (sur $\mathbb{R}$) et même uniformément continue en utilisant la proposition 4.50. On en déduit aussi que φ est strictement croissante car $f > 0$ p.p..*

On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f d\lambda$) et on note $\psi : \mathrm{I}_m \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de φ. La fonction ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$ et on a $\varphi(\psi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathrm{I}_m$ et $\psi(\varphi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \mathcal{P}(\mathrm{I}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pour $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(\mathrm{A}) = \{\varphi(x), x \in \mathrm{A}\}$. Pour $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}_m$, on note $\psi(\mathrm{A}) = \{\psi(x), x \in \mathrm{A}\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$ et que $\{\psi(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Corrigé – *Les fonctions φ et ψ sont continues, elles sont donc boréliennes (c'est-à-dire que l'image réciproque, par φ ou ψ, d'un borélien est un borélien).*

   Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, Comme $\varphi(\mathrm{A}) = \psi^{-1}(\mathrm{A})$ et que ψ est borélienne, on a donc $\varphi(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis, comme $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{I}_m$ on a $\varphi(\mathrm{A}) \subset \mathrm{I}_m$ et donc $\varphi(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$. Réciproquement, si $\mathrm{C} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$, on a $\mathrm{C} = \varphi(\varphi^{-1}(\mathrm{C}))$ et donc $\mathrm{C} = \varphi(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} = \varphi^{-1}(\mathrm{C})$. Comme φ est borélienne, on a $\mathrm{A} = \varphi^{-1}(\mathrm{C}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{C} \in \{\varphi(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On a bien montré que $\{\varphi(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)$.

   De manière semblable on montre que $\{\psi(\mathrm{A}), \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathrm{I}_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{I})) = \int_{\mathrm{I}} f d\lambda$.

   Corrigé – *Soit a, b les bornes de I, avec $a \le b$. L'ensemble $\varphi(\mathrm{I})$ est alors un intervalle dont les bornes sont $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. On a donc, en utilisant aussi la définition de φ,*

$$\lambda(\varphi(\mathrm{I})) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f d\lambda = \int_{\mathrm{I}} f d\lambda.$$

4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \int_{\mathrm{O}} f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\mathrm{O} \text{ ouvert}, \lambda(\mathrm{O}) \le \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(\mathrm{O})) \le \varepsilon.$$

   Corrigé – *L'ouvert O est une union dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (lemme 2.44). Il existe donc une suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints deux à deux t.q. $\mathrm{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n$ (noter que certains intervalles ouverts peuvent être vides). On a alors $\varphi(\mathrm{O}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\mathrm{I}_n)$ et les $\varphi(\mathrm{I}_n)$ sont aussi disjoints deux à deux (par injectivité de φ). On a donc, par σ-additivité de λ et par la question précédente,*

$$\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\varphi(\mathrm{I}_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{I}_n} f d\lambda = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_n} f d\lambda = \int_{\mathrm{O}} f d\lambda.$$

On utilise maintenant la proposition 4.50. Soit $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \lambda(\mathrm{A}) \le \delta \Rightarrow \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda \le \varepsilon \tag{7.27}$$

On en déduit, en particulier, que si O *est un ouvert et que* $\lambda(\mathrm{O}) \le \delta$*, on a alors* $\int_{\mathrm{O}} f\,d\lambda \le \varepsilon$ *et donc* $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) \le \varepsilon$*.*

5. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]

   Corrigé – *On commence par remarquer que* $\varphi(\mathrm{A}) \subset \mathrm{I}_m$ *et donc* $\lambda(\varphi(\mathrm{A}) \le \lambda(\mathrm{I}_m) = \int f\,d\lambda < +\infty$*. On a aussi* $0 \le \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda \le \int f\,d\lambda < +\infty$*.*

   Soit $\varepsilon > 0$*. On va montrer que* $|\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda| \le 2\varepsilon$*. Pour cela, on utilise* δ *donné par (7.27). La régularité de* λ *donne l'existence de* O *ouvert contenant* A *et* F *fermé inclus dans* A *t.q.* $\lambda(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}) \le \delta$*. On en déduit, grâce à (7.27), en remarquant que* $\mathrm{O} \setminus \mathrm{F}$ *est un ouvert,*

$$0 \le \lambda(\varphi(\mathrm{O})) - \lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \lambda(\varphi(\mathrm{O} \setminus \mathrm{A})) \le \lambda(\varphi(\mathrm{O} \setminus \mathrm{F})) = \int_{\mathrm{O}\setminus\mathrm{F}} f\,d\lambda \le \varepsilon.$$

   On a aussi, toujours, grâce à (7.27),

$$0 \le \int_{\mathrm{O}} f\,d\lambda - \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda = \int_{\mathrm{O}\setminus\mathrm{A}} f\,d\lambda \le \varepsilon.$$

   Comme la question précédente donne $\lambda(\varphi(\mathrm{O})) = \int_{\mathrm{O}} f\,d\lambda$*, on en déduit que*

$$|\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda| \le 2\varepsilon.$$

   Il reste à remarquer que $\varepsilon > 0$ *est arbitraire pour conclure que* $\lambda(\varphi(\mathrm{A})) - \int_{\mathrm{A}} f\,d\lambda$*.*

6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.

   (a) Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_{\mathrm{B}}$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{7.28}$$

   [Prendre $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

   Corrigé – *Puisque* $g = 1_{\mathrm{B}}$*, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_{\mathrm{B}\cap]\varphi(a),\varphi(b)[} d\lambda = \lambda(\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[).$$

   Comme $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{I}_m$*, on a*

$$\mathrm{B}\cap]\varphi(a), \varphi(b)[) = (\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[.$$

   Puis, comme $\varphi \circ \psi$ *est l'identité sur* I_m *on en déduit, avec* $\mathrm{A} = \psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]a, b[$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[&= \varphi(\psi((\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m)\cap]\varphi(a), \varphi(b)[)) \\ &= \varphi(\psi(\mathrm{B} \cap \mathrm{I}_m) \cap \psi(]\varphi(a), \varphi(b)[)) = \varphi(\mathrm{A}).\end{aligned}$$

On a donc, avec la question précédente et la définition de A,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \lambda(\varphi(\mathrm{A})) = \int_{\mathrm{A}} f d\lambda = \int_{\psi(\mathrm{B}\cap \mathrm{I}_m)\cap]a,b[} f d\lambda$$
$$= \int_a^b 1_{\psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)}(s)f(s)ds.$$

Pour conclure, il reste à remarquer que $s \in \psi(\mathrm{B}\cap\mathrm{I}_m)$ *si et seulement si* $\varphi(s) \in \mathrm{B}$.
On obtient bien ainsi

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b 1_{\mathrm{B}}(\varphi(s))f(s)ds = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds.$$

(b) Montrer que (7.28) est encore vraie si g appartient à $\mathcal{E}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis si g appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corrigé – *Si* $g \in \mathcal{E}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\mathrm{B}_1,\ldots \mathrm{B}_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *t.q.*

$$g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{B}_i}.$$

Pour chaque i*, la question précédente donne*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g_i(t)dt = \int_a^b g_i(\varphi(s))f(s)ds.$$

On multiplie les termes de cette égalité par a_i*, on somme sur* i *et on obtient bien (7.28).*

Soit maintenant $g \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Il existe une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q.* $g_n \uparrow g$ *(convergence simple en croissant). Par convergence monotone on peut passer à la limite quand* $n \to +\infty$ *dans (7.28) écrit avec* g_n *au lieu de* g*. On obtient bien ainsi (7.28).*

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Montrer $g\circ\varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et que (7.28) est vraie.

Corrigé – *On applique la question précédente à* g^+ *et* g^- *(parties positive et négative de* g*), c'est-à-dire qu'on écrit (7.28) avec* g^+ *et* g^-*. On en déduit que les fonctions* $g^{\pm}1_{]\varphi(a),\varphi(b)[}f$ *sont intégrables et donc que leur différence est intégrable. Ceci donne que* $g1_{]\varphi(a),\varphi(b)[}f$ *est intégrable (pour* λ*). Puis en faisant la différence de (7.28) avec* g^+ *avec (7.28) avec* g^-*, on obtient bien (7.28) avec* g*.*

N.B. On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.28) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a,b[$, appartient à un espace appelé $\mathrm{W}^{1,1}(]a,b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

Chapitre 8

Densité, séparabilité et compacité

Ce chapitre est consacré en majeure partie aux espaces $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_{\mathrm{N}})$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\mathrm{N} \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω, λ_{N} désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ (aussi notée λ_{N}) et $1 \leq p \leq \infty$.

On notera toujours $\mathrm{L}^p(\Omega) = \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_{\mathrm{N}})$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $\mathrm{L}^p(\Omega)$

Nous avons vu au chapitre précédent que les espaces L^p sont très intéressants car ils sont en particulier complets. Cependant, les éléments de ces espaces sont des objets avec lesquels il est malaisé de travailler. Pour démontrer des propriétés sur ces objets, on travaille très souvent par densité : on travaille sur des fonctions régulières, qui sont faciles à manipuler, et on passe ensuite à la limite, à condition d'avoir établi au préalable un résultat de densité, qui nous permet justement ce passage à la limite.

8.1.1 Densité des fonctions $\mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\Omega)$

Définition 8.1 (Fonction à support compact) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* f *est à support compact (dans* Ω*) s'il existe un compact* $\mathrm{K} \subset \Omega$ *tel que* $f = 0$ *sur* $\Omega \setminus \mathrm{K}$.

On note souvent $\mathrm{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\mathrm{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 ($C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ *si*

- f *est de classe* C^∞ *(de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*).*
- f *est à support compact (dans* Ω*).*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Remarque 8.3 Si $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.

Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0,\varepsilon[$ et pour $x \in]1-\varepsilon,1[$, alors $f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème 8.4 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *(par exemple,* $\Omega = \mathbb{R}^N$*). Alors :*

$C_c(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *c'est-à-dire :*

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.5 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.17), voir l'exercice 8.1. ■

Une conséquence importante du théorème 8.4 est la continuité en moyenne que l'on donne maintenant.

Théorème 8.5 (Continuité en moyenne) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$*,et* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ *quand* $h \to 0$*, c'est-à-dire :*

$$\int |f(x+h)-f(x)|^p dx \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.5, elle est proposée dans l'exercice 8.2.

Remarque 8.6 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $N = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$,

en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.4) :

$$\forall \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2},$$
$$\forall h > 0,\ \|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1.$$

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8.7 (Espace L^1_{loc} des fonctions localement intégrales) *Soient* $N \geq 1$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est localement intégrable sur* Ω *si* $f1_K \in L^1(\Omega)$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. sur* K*") pour tout compact* $K \in \Omega$.

On note $L^1_{loc}(\Omega)(= L^1_{loc}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\lambda_N))$ *l'ensemble des fonctions localement intégrables sur* Ω.

Remarque 8.8 Soient $N \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p, proposition 6.25).

Définition 8.9 (Famille régularisante) *Soit* $N \geq 1$ *et soit* $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *t.q.* $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N ; \rho(x) \neq 0\} \subset B_1$ *et* $\int \rho(x)dx = 1$. *On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ *définie par :* $\rho_n(x) = n^N\rho(nx), x \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8.10 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que

$$\{x \in \mathbb{R}^N\ ;\ \rho_n(x) \neq 0\} \subset B_{\frac{1}{n}} \text{ et } \int \rho_n(x)dx = 1.$$

Notons qu'il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.9. Pour $N = 1$, par exemple, il suffit de prendre

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1}) \text{ si } x \in]-1,1[, \\ 0 \text{ si } x \notin]-1,1[, \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x)dx = 1$.

Lemme 8.11 (Régularisation par convolution) *Soient* $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante et* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $f * \rho_n$ *est définie partout sur* $\mathbb{R}^N$ *et* $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. *De plus, s'il existe* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *p.p. sur* B_a^c, *on a alors* $f * \rho_n = 0$ *sur* $B^c_{a+\frac{1}{n}}$ *(*$f * \rho_n$ *est donc à support compact).*

DÉMONSTRATION – La démonstration du fait que $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.22. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.22 et 7.21. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.21 donne le support indiqué ici pour $f * \rho_n$. ■

Proposition 8.12 (Densité de $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Soit $N \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille régularisante. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors,*

$$f * \rho_n \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théorème 8.5). On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f * \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x)\int \rho_n(y))dy \\ &= \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy, \end{aligned}$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Höder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{p}} \rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy(\int \rho_n(y)dy)^{\frac{p}{q}} \tag{8.1}$$

$$\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy. \tag{8.2}$$

On remarque maintenant que l'application $(x, y)^t \mapsto (f(y) - f(x))$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (munis de leurs tribus boréliennes respectives) ; ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.11 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x, y)^t \mapsto (x, x-y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (car continue). Par composition, l'application $(x, y)^t \mapsto (f(x-y) - f(x))$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x, y)^t \mapsto |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)$ est mesurable (positive) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\begin{aligned} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx &\leq \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy \right) dx \\ &= \int \left(\int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dx \right) dy \qquad (8.3) \\ &= \int_{B_{\frac{1}{n}}} \|f(\cdot - y) - f\|_p^p \rho_n(y)dy. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le théorème 8.5. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^N, \ |h| \leq \eta \ \Rightarrow \|f(\cdot - h) - f\|_p \leq \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \leq \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ∎

La proposition 8.12 nous dit que l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^N)$. Il est très souvent plus facile de travailler avec des fonctions à support compact. De fait, les deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$:

Théorème 8.13 (Densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$) *Soient* $N \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de troncature et régularisation.

Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on dit que f est à support compact s'il existe K compact de $\mathbb{R}^N$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c. On note A l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à support compact.

Etape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{B_n}$. Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \leq |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, on a bien montré la densité de A dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2. Soit maintenant $f \in A$. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f * \rho_n$ où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.11 donne que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et la proposition 8.12 donne que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. ∎

On rappelle (remarque 8.6) que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (et donc aussi $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.13) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l'exercice 7.16 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1, \infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.14 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION – Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N ; d(x,\Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f 1_{K_n} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le lemme 8.11 et la proposition 8.12 donnent que $g * \rho_n \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$ et $(g * \rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g * \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration.

■

Ici aussi, le théorème 8.14 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l'exercice 7.16).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.15 *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* p *tel que* $1 \leq p < +\infty$. *Alors, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est séparable.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 8.5.

Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.6 montre que, par exemple, $L^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ n'est pas séparable. Une adaptation simple de la démonstration de l'exercice 8.6 montre aussi que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$), muni de la norme de la convergence uniforme, n'est pas séparable. Par contre l'espace $C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 quand le norme de la variable tend vers l'infini), muni de la même norme, est séparable. Ceci est une conséquence des deux premières questions de l'exercice 8.5 (car C_c est dense dans C_0).

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite

qui converge. Notons que cette notion de compacité séquentielle est équivalente à la notion de compacité de Borel -Lebesgue (*i.e.* de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore s'il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par un théorème de Riesz (différent des deux théorèmes de Riesz donnés dans ce livre !) que la boule unité fermée d'un e.v.n. E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \le p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.16 (Kolmogorov) *Soit* $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *et* $1 \le p < +\infty$*; on considère ici l'espace mesuré* $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. *Soit* $A \subset L^p(\Omega)$*;* A *est relativement compacte si et seulement si :*

1. *Il existe* $C \in \mathbb{R}$ *t.q.* $\|f\|_p \le C$ *pour tout* $f \in A$,
2. *la partie* A *est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *t.q. :*
$$\text{pour tout } f \in A,\ |h| \le \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \le \varepsilon,$$
3. *la partie* A *est équi-petite à l'infini, c'est-à-dire que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $a \in \mathbb{R}_+$, *t.q.*
$$\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p \, dm \le \varepsilon \text{ pour tout } f \in A,$$

où $\tilde{f}$ *est la prolongée de* f *par* 0 *en dehors de* Ω.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ et le théorème d'Ascoli que nous rappelons ci après (théorème 8.17). Elle est laissée à titre d'exercice, le cas $p = 1$ et $\Omega =]0,1[$ est donné dans l'exercice 8.9. ∎

Dans le cas où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, le théorème 8.16 peut s'énoncer plus simplement sans introduire $\tilde{f}$. Ceci est développé dans l'exercice 8.10.

Théorème 8.17 (Ascoli) *Soient* K *une partie compacte de* $\mathbb{R}$ *et* A *une partie de l'espace vectoriel* $C(K, \mathbb{R})$ *muni de la norme uniforme ;* A *est relativement compacte si et seulement si* A *est bornée et uniformément équicontinue, i.e.*

$\forall \ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall \ x, y \in K, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon, \forall \ f \in A.$

Corollaire 8.18 *Soient* $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < +\infty$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. *On suppose que la famille* $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *vérifie les conditions* 1, 2 *et* 3 *du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une sous-suite, notée* $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, *et il existe* $f \in L^p(\Omega)$ *t.q.* $f_{\varphi(n)} \to f$ *dans* $L^p(\Omega)$ *quand* $n \to +\infty$.

8.4 Compacité faible-$*$

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible-$*$ dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.19 (Compacité faible-$*$ séq. des bornés de E' si E est séparable) *Soit* F *un espace de Banach séparable et* F' *son dual topologique. Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite bornée de* F'. *Alors, il existe une sous-suite* $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $T \in F'$ *t.q. la sous-suite* $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T $*$*-faiblement dans* F' *(i.e.* $T_{n_k}(u) \to T(u)$ *(dans* $\mathbb{R}$*) pour tout élément* u *de* F.*)*

DÉMONSTRATION – La démonstration va se faire en trois étapes. L'étape principale est probablement la deuxième étape (qui décrit le procédé diagonal).

On commence par remarquer que, comme F est séparable, il existe une partie A de F, dénombrable et dense. Comme A est dénombrable, il existe uns suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $A = \{f_p, p \in \mathbb{N}^*\}$. On note aussi $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{F'}$ (on a $C < +\infty$ car la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F').

Etape 1. Dans cette première étape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

L'existence de ψ_1 découle du fait que la suite $(T_n(f_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ (en effet, on a $|T_n(f_1)| \leq C\|f_1\|_F$). Puis, pour $p \geq 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le fait que la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)}(f_{p+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 2 (procédé diagonal). On note φ_n l'application $\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n$. La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \varphi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On va montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)) = \varphi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite de la suite $(T_{\varphi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $n = p$. Ceci prouve que $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 3. On utilise maintenant la densité de A dans F. L'étape 2 nous donne, pour tout $g \in A$, la convergence dans $\mathbb{R}$ de la suite $(T_{\psi(n)}(g))_{n\in\mathbb{N}}$. La densité de A dans F et le fait que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F′ nous permet d'en déduire que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in F$. En effet, soit $f \in F$. Pour tout $g \in A$ et tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$|T_{\psi(n)}(f) - T_{\psi(m)}(f)| \le 2C\|f - g\|_F + |T_{\psi(n)}(g) - T_{\psi(m)}(g)|.$$

On en déduit facilement que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc est convergente.

Pour tout $f \in F$, on note $T(f)$ la limite (dans $\mathbb{R}$) de la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme les applications T_n sont linéaires, l'application T est aussi linéaire (de F dans $\mathbb{R}$). Puis, comme $\|T_n\|_{F'} \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $|T(f)| \le C\|f\|_F$ pour tout $f \in F$. On a donc $T \in F'$ et, finalement, $T_{\psi(n)} \to T$ ∗-faiblement dans F′, quand $n \to +\infty$. Ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 8.19 s'applique aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$. En effet, grâce au théorème 6.70 et à la proposition 8.15, l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de $\mathbb{R}^N$). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.20 (Compacité faible-∗ séquentielle des bornés de L^∞) *Soit $d \ge 1$. On note L^∞ l'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty$ t.q. $u_n \to u$ ∗-faiblement dans L^∞.*

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.21 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p) *Soit $d \ge 1$ et soit $p \in]1, +\infty[$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv) dm \to 0$ pour tout $v \in L^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.*

On donne maintenant une conséquence, très utile pour les probabilités, de la proposition 8.19. Cette conséquence a déjà été évoquée dans la remarque 6.97.

Proposition 8.22 (Convergence étroite d'une suite tendue) *Soit $d \geq 1$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) < +\infty$. Il existe alors une sous-suite, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ notée m t.q.*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

De plus, si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, on a alors $m_n \to m$ étroitement. (Ce dernier résultat est aussi vrai si on remplace l'hypothèse "$(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue" par "$m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$").

DÉMONSTRATION – On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \{\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ \varphi(x) \to 0$ quand $|x| \to \infty\}$. On munit $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|\varphi\|_u = \sup\{|\varphi(x)|,\ x \in \mathbb{R}^d\}$. L'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, muni de cette norme, est un espace de Banach séparable (alors que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ muni de cette même norme n'est pas séparable).

On note E l'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (muni de la norme de la convergence uniforme). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in E$, on pose $L_n(\varphi) = \int \varphi dm_n$. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans E', car on a

$$\|L_n\|_{E'} \leq m_n(\mathbb{R}^d).$$

Il existe donc une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $L \in E'$ t.q.

$$\int \varphi dm_n \to L(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in E.$$

L'application L est donc une application linéaire positive (c'est-à-dire $\varphi \geq 0 \Rightarrow L(\varphi) \geq 0$) de E dans $\mathbb{R}$. D'après le chapitre 5, il existe alors une mesure finie m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $L(\varphi) = \int \varphi dm$ pour tout $\varphi \in E$ (en fait le théorème 5.12 donne ce résultat pour $d = 1$, la démonstration est semblable pour $d > 1$). Ceci donne bien le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

Il est intéressant de noter que si m_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ une probabilité, la mesure m n'est pas forcément une probabilité et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas converger étroitement vers m. (Un exemple pour $d = 1$ consiste à prendre $m_n = \delta_n$ et $m = 0$.)

Toutefois, si on suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (ou si on suppose que $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$), la proposition 6.96 (ou la proposition 6.89 pour le cas $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$) donne la convergence étroite de m_n vers m, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

■

Du point de vue des probabilités, la conséquence de la proposition 8.22 est que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. dont la suite des lois est tendue, il existe alors une v.a.r.

X et une sous-suite de la suite X_n telle que cette sous-suite converge en loi vers X (cf. proposition 9.21 pour le cas de vecteurs aléatoires).

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) Soient, $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.5 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.17.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne) Soient $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.5]

Exercice 8.3 (Convergence après translation)

On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que* $u_n(\cdot+h_n)-u = u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)+u(\cdot+h_n)-u$ *et donc*

$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$

Comme $\|u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)\|_p = \|u_n-u\|_p$, *on a donc*

$$\|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq \|u_n-u\|_p + \|u(\cdot+h_n)-u\|_p.$$

Soit $\varepsilon > 0$, *comme* $u_n \to u$ *dans* L^p, *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n-u\|_p \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $u \in L^p$, *la continuité en moyenne (théorème 8.5) donne l'existence de* $\delta > 0$ *tel que*

$$|h| \leq \delta \Rightarrow \|u(\cdot+h)-u\|_p \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, *il existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|h_n| \leq \delta$ *pour* $n \geq n_2$. *On a donc*

$$n \geq \max\{n_1,n_2\} \Rightarrow \|u_n(\cdot+h_n)-u\|_p \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot+h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a $N = 1$).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $u_n = u$ *pour tout* n *et, par exemple,* $u = 1_{\mathbb{R}_+}$. *Pour tout* $h \neq 0$, *on a* $\|u(\cdot+h)-u\|_\infty = 1$. *Il suffit donc de prendre, par exemple,* $h_n = 1/n$.

Exercice 8.4 (Non densité de C_c dans L^∞) On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé – *Soit* $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On va montrer que* $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ *pour tout* $0 < \varepsilon < 1/2$ *(ce qui donne bien finalement* $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$*).*

Soit donc $0 < \varepsilon < 1/2$.

On suppose tout d'abord que $\varphi(0) \geq \frac{1}{2}$. *Il existe alors, par continuité de* φ, $\delta > 0$ *t.q.* $\varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ *pour tout* $x \in [-\delta, 0]$. *On a donc* $\varphi(x) - f(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ *pour presque tout* $x \in [-\delta, 0]$, *ce qui prouve que*

$$\lambda(\{|\varphi - f| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([-\delta, 0]) = \delta > 0.$$

On a donc $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

On suppose maintenant que $\varphi(0) \leq \frac{1}{2}$. *De manière analogue, il existe* $\delta > 0$ *t.q.* $\varphi(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$ *pour tout* $x \in [0, \delta]$. *On a alors* $f(x) - \varphi(x) \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ *pour presque tout* $x \in [0, \delta]$, *ce qui prouve que* $\lambda(\{|f - \varphi| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon\}) \geq \lambda([0, \delta]) = \delta > 0$. *On a donc aussi* $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitrairement petit, on a bien montré que* $\|f - \varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$.

2. Montrer que $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

Corrigé – *Pour* $h > 0$, *on a* $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| = 1$ *p.p. sur* $[-h, 0]$ *et donc* $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([-h, 0]) = h > 0$, *ce qui prouve que* $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. *Comme il est clair que* $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ *p.p., on a finalement* $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Pour $h < 0$, *on a* $|f(\cdot + h) - f(\cdot)|_\infty = 1$ *p.p. sur* $[0, -h]$ *et donc* $\lambda(\{|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \geq 1\}) \geq \lambda([0, -h]) = -h > 0$, *ce qui prouve que* $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty \geq 1$. *Comme il est clair aussi que* $|f(\cdot + h) - f(\cdot)| \leq 1$ *p.p., on a finalement* $\|f(\cdot + h) - f\|_\infty = 1$.

Exercice 8.5 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$, on note : $I_q^n = [-n + \frac{q}{n}, -n + \frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n, n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *A* $f \in A_n$, *on associe l'ensemble des valeurs prises par* f *sur les intervalles* I_q^n, $q = 0, 1, \ldots, 2n^2 - 1$. *On construit ainsi une bijection de* A_n *dans* $\mathbb{Q}^{2n^2}$, *ce qui prouve que* A_n *est dénombrable car* $\mathbb{Q}^{2n^2}$ *est dénombrable.*

On en déduit que A *est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.*

2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$.

 Corrigé – *Soit $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$.*

 Comme f est à support compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ t.q. $f = 0$ sur $[-a,a]^c$.

 Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ t.q. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

 On choisit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n \geq a$ et $1/n \leq \delta$. On construit alors $g \in A_n$ de la manière suivante :

$$g(x) = 0, \text{ si } x \in [-n,n[^c,$$
$$g(x) = r_q, \text{ si } x \in [-n+\tfrac{q}{n}, -n+\tfrac{q+1}{n}[, \; q \in \{0,1,\ldots,2n^2-1\},$$

 avec $r_q \in \mathbb{Q}$ t.q. $|f(-n+\frac{q}{n}) - r_q| \leq \varepsilon$ et $r_q = 0$ si $f(-n+\frac{q}{n}) = 0$.

 On a $g \in A$ (car $g \in A_n$), $|g(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout x et $|g(x) - f(x)| = 0$ si $x \in [-a-1, a+1]^c$. On en déduit :

$$\int |g(x) - f(x)|^p dx \leq 2(a+1)2^p \varepsilon^p.$$

 On peut donc trouver $g \in A$ arbitrairement proche de f en norme L^p.

3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.4).

 Corrigé – *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 8.4, il existe $g \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\|g - f\|_p \leq \varepsilon$. Par la question précédente, il existe $h \in A$ t.q. $\|g - h\|_p \leq \varepsilon$. On a donc $\|f - h\|_p \leq 2\varepsilon$. Ce qui prouve que A est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Comme A est dénombrable, on en déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.*

Exercice 8.6 (Non séparabilité de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$) On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R},T,\lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]

 Corrigé – *Soit P une partie $\mathbb{N}$. On construit $\varphi(P) \in B$ en prenant $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \in P$, $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ si $n \notin P$ et $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$.*

 φ est bien injective car, si $P,Q \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $P \neq Q$, il existe $n \in P$ t.q. $n \notin \mathbb{Q}$ (ou il existe $n \in Q$ t.q. $n \notin \mathcal{P}$). On a alors $\varphi(P) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(Q) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ (ou $\varphi(P) = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ et $\varphi(Q) = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$). On en déduit que $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\|_\infty \geq 1$ car $\lambda(]n,n+1[) > 0$, et donc $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

 Comme $\mathcal{P}(N)$ est non dénombrable (et non fini), l'ensemble B est aussi non dénombrable (et non fini).

2. Soit A une partie dense de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.

Corrigé – *Soit* $f \in \mathrm{B}$. *Par densité de* A *dans* $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathrm{T}, \lambda)$, *il existe* $g \in \mathrm{A}$ *t.q.* $\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. *On peut donc construire (grâce à l'axiome du choix) une application* ψ *de* B *dans* A *t.q.* $\|f - \psi(f)\|_\infty \leq \frac{1}{4}$ *pour tout* $f \in \mathrm{B}$.

On monte maintenant que ψ *est injective. En effet, soit* $f_1, f_2 \in \mathrm{B}$ *t.q.* $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. *On a alors, avec* $g = \psi(f_1) = \psi(f_2)$, $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \|f_1 - g\|_\infty + \|f_2 - g\|_\infty \leq \frac{1}{2}$. *Ceci prouve que* $f_1 = f_2$ *car* $\|f_1 - f_2\|_\infty \geq 1$ *si* $f_1 \neq f_2$ *(il suffit de remarquer qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $|f_1 - f_2| = 1$ *p.p. sur* $]n, n+1[$*).*

3. Montrer que $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathrm{T}, \lambda)$ n'est pas séparable.

Corrigé – *Si* $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathrm{T}, \lambda)$ *est séparable, il existe* A *(au plus) dénombrable, dense dans* $\mathrm{L}^\infty_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathrm{T}, \lambda)$. *La question précédente permet de construire une injection de* B *de* A, *ce qui est en contradiction avec le fait que* B *est non dénombrable (et non fini).*

Exercice 8.7 (Convolution $\mathrm{L}^p - \mathrm{L}^q$**)** Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x - \cdot)$ est intégrable.

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *L'application* $f(\cdot)g(x-\cdot)$ *est mesurable car les applications* f *et* $g(x - \cdot)$ *sont mesurables. Puis, on déduit de l'inégalité de Hölder (inégalité (6.1)) que* $f(\cdot)g(x - \cdot) \in \mathcal{L}^1$ *et :*

$$\|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1 \leq \|f\|_p \|g(x - \cdot)\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

On peut donc définir $(f * g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $|(f * g)(x)| = |\int f(\cdot)g(x - \cdot)d\lambda| \leq \int |f(\cdot)g(x - \cdot)|d\lambda = \|f(\cdot)g(x - \cdot)\|_1$. *En utilisant l'inégalité montrée dans la question précédente, on a donc :*

$$|(f * g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(c) Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $x, h \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &\leq \int |f(\cdot)g(x+h-\cdot) - f(\cdot)g(x - \cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f\|_p \|g(x+h-\cdot) - g(x - \cdot)\|_q = \|f\|_p \|g(\cdot - h) - g\|_q. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^q *(voir exercice 6.5,, le cas général de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *est donné dans le théorème 8.5) donne que* $\|g(\cdot - h) - g\|_q \to 0$, *quand* $h \to 0$. *Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de* $f * g$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^q$. Montrer qu'on peut définir $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $\mathrm{F}*\mathrm{G} = f*g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. [Il suffit donc de démontrer que $f*g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]

Corrigé – *Soit $f_1, f_2 \in \mathrm{F}$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$. Comme $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) = f_2(\cdot)g_2(x-\cdot)$ p.p. et donc $f_1*g_1(x) = f_2*g_2(x)$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut donc définir $\mathrm{F}*\mathrm{G}(x)$ en posant $\mathrm{F}*\mathrm{G}(x) = f*g(x)$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ (car $f*g(x)$ ne dépend pas du choix de f et g dans F et G).

(b) Montrer que l'application $(\mathrm{F},\mathrm{G}) \mapsto \mathrm{F}*\mathrm{G}$ est bilinéaire continue de $\mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (on rappelle que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

Corrigé – *On note $\|\cdot\|_u$ la norme de la convergence uniforme (on rappelle que, sur $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle coïncide avec la norme $\|\cdot\|_\infty$).*

Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^q$. Si $f \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$, on a déjà vu que, pour tout $x \in \mathrm{R}$:

$$|\mathrm{F}*\mathrm{G}(x)| = |f*g(x)| \leq \|f\|_p\|g\|_q = \|\mathrm{F}\|_p\|\mathrm{G}\|_q.$$

On en déduit $\|\mathrm{F}*\mathrm{G}\|_u = \sup\{|\mathrm{F}*\mathrm{G}(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|\mathrm{F}\|_p\|\mathrm{G}\|_q$, ce qui prouve bien la continuité de la forme bilinéaire $(\mathrm{F},\mathrm{G}) \mapsto \mathrm{F}*\mathrm{G}$ de $\mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(c) Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^q$. Montrer que $\mathrm{F}*\mathrm{G} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $\mathrm{F}*\mathrm{G}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(\mathrm{F}*\mathrm{G})(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

Corrigé – *On considère tout d'abord le cas $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On sait déjà que $f*g$ est continue (par exemple, parce que $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$). D'autre part, comme f et g sont à support compact, il existe $a > 0$ et $b > 0$ t.q. $f = 0$ sur $\mathrm{B}^c(0,a)$ et $g = 0$ sur $\mathrm{B}^c(0,b)$. On en déduit que $f*g = 0$ sur $\mathrm{B}^c(0,a+b)$ (ceci est démontré, par exemple, dans l'exercice 7.21). On a donc $f*g \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Soit maintenant $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^p$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^q$. Le théorème de densité dans les espaces L^p (exercice 6.5, ou encore théorème 8.4 pour un cas plus général) donne l'existence de deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to \mathrm{F}$ dans L^p et $g_n \to \mathrm{G}$ dans L^q, quand $n \to +\infty$. La continuité de la forme bilinéaire $(\mathrm{F},\mathrm{G}) \mapsto \mathrm{F}*\mathrm{G}$ de $\mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ montre alors que $f_n*g_n \to \mathrm{F}*\mathrm{G}$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (c'est-à-dire uniformément), quand $n \to +\infty$. Or $f_n*g_n \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a donc $\mathrm{F}*\mathrm{G} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f*g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f*g \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Corrigé – *On procède ici comme dans le cas $1 < p, q < \infty$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est mesurable car produit d'applications mesurables. Puis, l'inégalité de Hölder pour le cas $p = 1$, $q = \infty$ (proposition (6.26)) donne $f(\cdot)g(x-\cdot) \in \mathcal{L}^1$ et :

$$\|f(\cdot)g(x-\cdot)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g(x-\cdot)\|_\infty = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

On peut donc définir $(f * g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Ceci donne $\sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ et donc que $f * g$ est bornée.

Pour montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$, on utilise l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue pour écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f * g(x) = \int f(x-\cdot)g(\cdot)d\lambda.$$

Soit $x, h \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &\leq \int |f(x+h-\cdot)g(\cdot) - f(x-\cdot)g(\cdot)|d\lambda \\ &\leq \|f(x+h-\cdot) - f(x-\cdot)\|_1 \|g\|_\infty = \|f(\cdot - h) - f\|_1 \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.21) donne que $\|f(\cdot - h) - f\|_1 \to 0$, quand $h \to 0$. Ceci prouve la continuité (et même la continuité uniforme) de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc bien $f * g$ continue et bornée, c'est-à-dire $f * g \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^\infty$. Montrer que $(\mathrm{F} * \mathrm{G})(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $\mathrm{F} * \mathrm{G} = f * g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$.

Corrigé – *La démonstration est identique à celle du cas $1 < p, q < \infty$. Elle n'est pas redonnée ici.*

(c) L'application $(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \mapsto \mathrm{F} * \mathrm{G}$ est-elle continue de $\mathrm{L}^1 \times \mathrm{L}^\infty$ dans C_b ?

Corrigé – *La réponse est oui car nous avons vu que $\|f * g\|_u = \sup\{|(f * g)(x)|, x \in \mathbb{R}\} \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*

(d) A-t-on $\mathrm{F} * \mathrm{G} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{L}^\infty$?

Corrigé – *La réponse est non. On prend, par exemple, $\mathrm{G} = 1$ p.p. et $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$, $\mathrm{F} \neq 0$. On a alors $\mathrm{F} * \mathrm{G}(x) = \int \mathrm{F} d\lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $\mathrm{F} * \mathrm{G}(x) \not\to 0$, quand $x \to \pm\infty$, et $\mathrm{F} * \mathrm{G} \notin \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Exercice 8.8 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

— $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,

— $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,

— $\int \rho(x)dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

Corrigé – *La fonction $f\varphi$ est mesurable car produit de fonctions mesurables. Elle est intégrable car on a*

$$|f(x)\varphi(x)| \le |f(x)| \|\varphi\|_u,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (avec $\|\varphi\|_u = \max\{|\varphi(x)|, x \in \mathbb{R}\} < \infty$ car $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est inclus dans $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et donc :

$$\int |f(x)\varphi(x)| dx \le \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Ce qui donne bien $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f * \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x - y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n est fixé). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (car $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) et $f\varphi = f(\cdot)\rho_n(x - \cdot)$.*

La première question donne $f(\cdot)\rho_n(x - \cdot) = f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $f * \rho_n(x)$ est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par f donne :

$$f * \rho_n(x) = \int f(y)\rho_n(x - y)dy = \int f(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

Corrigé – *La proposition 8.12 donne $f * \rho_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ quand $n \to +\infty$. Comme $f_n = 0$ p.p., on en déduit que $f = 0$ p.p.*

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

Corrigé – *Soit K un compact de Ω t.q. $\varphi = 0$ sur K^c. On a alors $g\varphi = g1_K\varphi$. Comme $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, la question 1(a) donne $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.*

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x-y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g * \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

Corrigé – *Soit $x \in \Omega_n$. On pose $\varphi(y) = \rho_n(x-y)$ pour $y \in \mathbb{R}^d$ (n et x sont fixés). On a donc $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$; comme $\rho_n(z) = 0$ si $|z| \geq 1/n$, on a $\varphi = 0$ sur K^c où K est la boule fermée de centre x et de rayon $1/n$, c'est-à-dire $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{B}}(x, 1/n)$. Comme $x \in \Omega_n$, on a $\mathrm{K} \subset \Omega$. La fonction φ (ou, plus précisément, la restriction de φ à Ω) appartient donc à $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$).*

On a $g\varphi = g(\cdot)\rho_n(x-\cdot)$. On conclut comme dans la question 1(b) :
La question 2(a) donne $g(\cdot)\rho_n(x-\cdot) = g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $g * \rho_n(x)$ est donc bien défini. De plus, l'hypothèse satisfaite par g donne :

$$g * \rho_n(x) = \int g(y)\rho_n(x-y)dy = \int g(y)\varphi(y)dy = 0$$

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g1_{\mathrm{K}} = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Corrigé – *On note α la distance de K à Ω^c, c'est-à-dire $\alpha = \inf\{|y-z|, y \in \mathrm{K}, z \in \Omega^c\}$. Cette distance est strictement positive car K est compact, Ω^c est fermé et $\mathrm{K} \cap \mathrm{O}^c = \emptyset$ (le fait que cette distance est strictement positive est démontré, par exemple, dans la démonstration du théorème 5.20). Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $1/n_0 < \alpha$, de sorte que $\mathrm{K} \subset \Omega_n$ pour tout $n \geq n_0$ (avec Ω_n défini dans la question 2(b)).*

La question 2(b) donne alors que, pour tout $n \geq n_0$, $g * \rho_n$ est bien défini sur K et $g * \rho_n = 0$ sur K.

Pour passer à limite sur n (et montrer que $g = 0$ p.p. sur K), on pose $\tilde{\mathrm{K}} = \{z \in \mathbb{R}^d ; d(z, \mathrm{K}) \leq 1/n_0\}$ (où $d(z, \mathrm{K})$ est la distance de z à K, c'est-à-dire $d(z, \mathrm{K}) = \inf\{|z-y|, y \in \mathrm{K}\}$). $\tilde{\mathrm{K}}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ et comme $1/n_0 < \alpha$, on a $\tilde{\mathrm{K}} \subset \Omega$. On en déduit :

$$g1_{\tilde{\mathrm{K}}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d).$$

La proposition 8.12 donne alors $g1_{\tilde{\mathrm{K}}} * \rho_n \to g1_{\tilde{\mathrm{K}}}$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$, quand $n \to +\infty$. On a donc aussi, en prenant la restriction à K de ces fonctions :

$$(g1_{\tilde{\mathrm{K}}} * \rho_n)_{|\mathrm{K}} \to g_{|\mathrm{K}} \text{ dans } \mathrm{L}^1(\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathrm{K}), \lambda_d), \text{ quand } n \to +\infty. \tag{8.4}$$

Soit $n \geq n_0$. On remarque que $g1_{\tilde{\mathrm{K}}} * \rho_n = g * \rho_n$ sur K. En effet, pour $x \in \mathrm{K}$ et $y \notin \tilde{\mathrm{K}}$, on a $|x-y| > 1/n_0 \geq 1/n$ et donc $\rho_n(x-y) = 0$. On en déduit, pour tout $x \in \mathrm{K}$,

$$g1_{\tilde{\mathrm{K}}} * \rho_n(x) = \int g1_{\tilde{\mathrm{K}}}(x)\rho_n(x-y)dy = \int g(x)\rho_n(x-y)dy = g * \rho_n(x).$$

On a bien montré que $g1_{\tilde{\mathrm{K}}} * \rho_n = g * \rho_n$ sur K. Comme $g * \rho_n = 0$ sur K (question 2(b)), on déduit de (8.4) que $g = 0$ p.p. sur K.

Pour montrer que $g = 0$ p.p. sur Ω, on remarque que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathrm{K}_n$, avec $\mathrm{K}_n = \overline{\Omega}_n \cap \mathrm{B}_n$ (où $\overline{\Omega}_n$ est l'adhérence de Ω_n et B_n est la boule fermée de centre 0 et de rayon n). Comme K_n est un compact de Ω, la démonstration précédente donne $g = 0$ p.p. sur K_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 8.9 (Théorème de compacité dans L^1, Kolmogorov)

On pose $L^1(]0,1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). Pour $f \in L^1(]0,1[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0,1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,\varepsilon)$, où $B(f,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (Condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise la précompacité pour* $\varepsilon = 1$. *Il existe* $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.*

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,1).$$

En posant $M = \max\{\|f_i\|_1,\ i = 1,\ldots,p\}$ *on a donc* $\|f\|_1 \le M$ *pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *ce qui prouve que* $\mathcal{A}$ *est une partie bornée de* $L^1(]0,1[)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \le \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \le \varepsilon. \tag{8.5}$$

Corrigé – *On utilise encore la précompacité, il existe* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ *t.q.* $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,\varepsilon)$.

Le théorème de continuité en moyenne (théorème 5.21) donne que pour $i \in \{1,\ldots,p\}$ *il existe* $\alpha_i > 0$ *t.q.*

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha_i \Rightarrow \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 \le \varepsilon.$$

On pose $\alpha = \min\{\alpha_i,\ i = 1,\ldots,p\}$. *On a bien* $\alpha > 0$ *et pour tout* $f \in \mathcal{A}$, *il existe* $i \in \{1,\ldots,p\}$ *t.q.* $f \in B(f_i,\varepsilon)$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 &\le \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}_i(\cdot + h\|_1 + \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 + \|\tilde{f}_i - \tilde{f}\|_1\\ &= \|\tilde{f}_i(\cdot + h) - \tilde{f}_i\|_1 + 2\|f - f_i\|_1.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$h \in \mathbb{R},\ |h| \le \alpha \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \le 3\varepsilon,$$

ce qui termine cette question.

Partie II (Condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.5).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \tag{8.6}$$

[On pourra remarquer que $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{A}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a (avec le changement de variable $z = ny$)*

$$\tilde{f} * \rho_n(x) = \int \tilde{f}(x-y)\rho_n(y)dy = \int \tilde{f}(x-y)n\rho(ny)dy = \int \tilde{f}(x - \frac{z}{n})\rho(z)dz.$$

Ce qui donne bien, comme $\int \rho(x)dx = 1$, $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$ et donc

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy.$$

L'application $(x,y) \mapsto \tilde{f}(x-y/n)$ est borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car c'est la composée de $(x,y) \mapsto x-y/n$ qui est continue donc borélienne et de $s \mapsto \tilde{f}(s)$ qui est borélienne). Par stabilité de l'ensemble des fonctions boréliennes, l'application $(x,y) \mapsto |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)$ est donc aussi borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue étant σ-finie, on peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir

$$\|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|\rho(y)dy \Big)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x)|dx \Big)\rho(y)dy.$$

En prenant $n_0 \geq 1/\alpha$, où α est donné par (8.5), on obtient (8.6).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} * \rho_n$.

(a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1,$$

$$x,y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x-y|.$$

En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli (théorème 8.17).]

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\tilde{f} * \rho_n(x)| \le n\|f\|_1\|\rho\|_\infty$. On peut donc prendre $C_1 = n\|\rho\|_\infty \sup_{f\in\mathcal{A}}\|f\|_1$.*

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(z)n(\rho(nx-nz)-\rho(ny-nz))dz$ et donc, avec le théorème des accroissements finis appliqué à ρ,

$$|\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f} * \rho_n(y)| \le \|f\|_1 n^2\|\rho'\|_\infty |x-y|.$$

On peut donc prendre $C_2 = n^2\|\rho'\|_\infty \sup_{f\in\mathcal{A}}\|f\|_1$.

L'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est donc borné dans $C([0,1],\mathbb{R})$ et est composé de fonctions uniformément équicontinues. Le théorème d'Ascoli donne alors sa compacité dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *Il suffit ici d'utiliser la caractérisation de la relative compacité par la précompacité et le fait que pour toute fonction bornée sur $[0,1]$, on a $\|g\|_1 \le \|g\|_\infty$.*

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Corrigé – *On utilise encore la caractérisation de la relative compacité par la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (8.6), il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{A}$ (où f_n est la restriction à $[0,1]$ de $\tilde{f} * \rho_n$). Puis, comme l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0,1[)$, il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ et $f^{(1)}, \ldots, f^{(p)} \in \mathcal{A}$ t.q. $\{f_n, f \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{i=1}^p B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$.*

Soit $f \in \mathcal{A}$, il existe $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $f_n \in B(f_n^{(i)}, \varepsilon)$, on a alors

$$\|f - f^{(i)}\|_1 \le \|f - f_n\|_1 + \|f_n - f_n^{(i)}\|_1 + \|f_n^{(i)} - f^{(i)}\|_1 \le 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^p B(f^{(i)}, 3\varepsilon)$ et donc que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Exercice 8.10 (Théorème de Kolmogorov, autre énoncé) Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[, \mathcal{B}(]0,T[), \lambda)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_1 < +\infty$).

On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+}\eta(h) = 0$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $d, h \in]0,T[$ t.q. $d + h \le T$. Montrer que

$$\int_0^d |u_n(t)|dt \le \int_0^d |u_n(t+h)|dt + \int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)|dt. \qquad (8.7)$$

Corrigé – *Pour tout* $t \in]0,d[$ *on a* $|u_n(t)| \le |u_n(t+h)| + |u_n(t+h) - u_n(t)|$. *En intégrant cette inégalité entre* 0 *et* d, *on obtient bien* (8.7).

2. Soit $h_0 \in]0,T[$ et $d \in]0, T - h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^d |u_n(t)|dt \le d\|u_n\|_1 + h_0\eta(h_0). \tag{8.8}$$

Corrigé – *Comme d'habitude, on choisit pour* u_n *l'un de représentants, de sorte que* $u_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[),\lambda)$ *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*).*

L'inégalité (8.7) *est vraie pour tout* $h \in]0,h_0[$. *En intégrant* (8.7) *entre* 0 *et* h_0 *et en remarquant que* $\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \le \eta(h) \le \eta(h_0)$ *(car* $h \le h_0$ *et* $d \le T - h_0 \le T - h$*) on obtient*

$$\begin{aligned} h_0 \int_0^d |u_n(t)|dt &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)|dt\Big)dh + \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)|dt\Big)dh \\ &\le \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)|dt\Big)dh + h_0\eta(h_0). \end{aligned}$$

La mesure de Lebesgue est σ*-finie et l'application* $(t,h) \mapsto u_n(t+h)$ *est borélienne de* $]0,d[\times]0,h_0[$ *dans* $\mathbb{R}$ *(car c'est la composée de* $(t,h) \mapsto t+h$ *qui est continue donc borélienne et de* $s \mapsto u_n(s)$ *qui est borélienne). On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir que*

$$\begin{aligned} \int_0^{h_0} \Big(\int_0^d |u_n(t+h)|dt\Big)dh &= \int_0^d \Big(\int_0^{h_0} |u_n(t+h)|dh\Big)dt \\ &\le \int_0^d \Big(\int_0^T |u_n(s)|ds\Big) \le d\|u_n\|_1. \end{aligned}$$

On en déduit (8.8).

3. Montrer que $\int_0^d |u_n(t)|dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.

Corrigé – *Soit* $\varepsilon > 0$. *On choisit d'abord* $h_0 \in]0,T[$ *t.q.* $\eta(h_0) \le \varepsilon$. *Puis, avec* $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1$, *on pose* $\delta = \min\{T - h_0, \varepsilon h_0/C\}$. *On obtient alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \le d \le \delta \Rightarrow \int_0^d |u_n(t)|dt \le 2\varepsilon.$$

On a donc $\int_0^d |u_n(t)|dt \to 0$ *quand* $d \to 0^+$, *uniformément par rapport à* n.

Une démonstration analogue donne aussi que $\int_{T-d}^T |u_n(t)|dt \to 0$ *quand* $d \to 0^+$, *uniformément par rapport à* n *(il suffit de raisonner avec* $v_n(t) = u_n(T-t)$*).*

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
   [Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 8.16, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]

Corrigé – *On prolonge u_n par 0 hors de $]0,\mathrm{T}[$ (et on note toujours u_n la fonction prolongée). Pour appliquer le théorème 8.16, il suffit de montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \to 0 \text{ quand } h \to 0^+, \text{ uniformément par rapport à } n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, on remarque que pour $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \\
&\quad \leq \int_{-h}^{0} |u_n(t+h)| dt + \int_{0}^{\mathrm{T}-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt + \int_{\mathrm{T}-h}^{\mathrm{T}} |u_n(t)| dt \\
&\quad = \int_{0}^{h} |u_n(t)| dt + \int_{0}^{\mathrm{T}-h} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt + \int_{\mathrm{T}-h}^{\mathrm{T}} |u_n(t)| dt.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_1 > 0$ t.q. $\eta(h_1) \leq \varepsilon$. Puis, avec la question précédente, il existe $h_2 > 0$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \leq h \leq h_2 \Rightarrow \int_{0}^{h} |u_n(t)| dt \leq \varepsilon \text{ et } \int_{\mathrm{T}-h}^{\mathrm{T}} |u_n(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Avec $h_3 = \min\{h_1, h_2\}$, on a donc (pour tout $n \in \mathbb{N}$)

$$0 \leq h \leq h_3 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |u_n(t+h) - u_n(t)| dt \leq 3\varepsilon.$$

Ceci termine la question.

Chapitre 9

Vecteurs aléatoires

9.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 9.1 (Vecteur aléatoire) *Soit $d \geq 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle vecteur aléatoire (souvent noté v.a.) de dimension d une application mesurable de Ω dans $\mathbb{R}^d$ (où $\mathbb{R}^d$ est muni de la tribu borélienne).*

Noter que la notation “v.a.” signifie indifféremment “variable(s) aléatoire(s)” ou “vecteur(s) aléatoire(s)”.

Proposition 9.2 *Soit $d > 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$. On note $X_1, \ldots, X_d$ les composantes de X (de sorte de $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$). On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \ldots, d$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :*

1. $\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_d)$.

2. X est un v.a. si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, une v.a.r..

DÉMONSTRATION – On rappelle que $\sigma(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ et que, pour tout i, $\sigma(X_i) = \{X_i^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. On note $\mathcal{C} = \{\prod_{i=1}^d A_i,\ A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $i\}$. On rappelle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (voir l'exercice 7.11) et que $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (c'est même encore vrai si on se limite à prendre pour A_i des intervalles, ouverts, voir l'exercice 2.7).

On note T la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_d)$. Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En prenant $B = \prod_{j=1}^d A_j$ avec $A_j = \mathbb{R}$ si $j \neq i$ et $A_i = A$, on a $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$ (car $B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) et $X^{-1}(B) = X_i^{-1}(A)$. On en déduit $X_i^{-1}(A) \in \sigma(X)$ et donc $\sigma(X_i) \subset \sigma(X)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Comme $\sigma(X)$ est une tribu, on a donc $T \subset \sigma(X)$.

On montre maintenant l'inclusion inverse (c'est-à-dire $T \supset \sigma(X)$). On remarque que, si $B \in \mathcal{C}$ on a $B = \prod_{i=1}^{d} A_i$ avec des A_i appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a donc $X^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^{d} X_i^{-1}(A_i) \in T$ (car $X_i^{-1}(A_i) \in \sigma(X_i) \subset T$). Or, il est facile de voir que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, t.q. $X^{-1}(B) \in T\}$ est une tribu. Cette tribu contient $\mathcal{C}$, elle contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On vient donc de montrer que $\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, t.q. $X^{-1}(B) \in T\} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que $X^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, ou encore que $\sigma(X) \subset T$. On a bien, finalement, $\sigma(X) = T$, ce qui donne le premier item de la proposition.

Le deuxième item est un conséquence facile du premier. En effet, si X est un v.a., on a pour tout i, $\sigma(X_i) \subset \sigma(X) \subset \mathcal{A}$ et donc X_i est une v.a.r.. Réciproquement ; si X_i est, pour tout i, une v.a.r., on a $\sigma(X_i) \subset \mathcal{A}$ pour tout i. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, on a donc $\mathcal{A} \supset T$ et comme $T = \sigma(X)$ on en déduit que X est un v.a.. ■

La démonstration de la proposition 9.2 n'utilise pas vraiment le fait que les X_i soient des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle se généralise donc facilement au cas où les X_i sont des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_i}$.

Proposition 9.3 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^*$. soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i une application de Ω dans $\mathbb{R}^{d_i}$. On note $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$, de sorte que X est une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$ avec $d = d_1 + \ldots + d_p$. Soit $d \geq 1$ et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}^d$. On note $\sigma(X)$ la tribu engendrée par X (et $\sigma(X_i)$, pour $i = 1, \ldots, p$ la tribu engendrée par X_i). On a alors :*

1. *$\sigma(X)$ est la plus petite tribu contenant les tribus $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_p)$.*
2. *X est un v.a. (de dimension d) si et seulement si X_i est, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, un v.a. (de dimension d_i).*

Définition 9.4 (Loi d'un v.a.) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. On appelle loi de probabilité de X, et on note cette loi P_X, la probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ image par X de P (c'est-à-dire $P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{X \in A\})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$). Si $(X_1, \ldots, X_d)$ sont les composantes de X, La probabilité P_X est aussi appelée loi conjointe de $(X_1, \ldots, X_d)$.*

Un exemple important est la loi normale multidimensionnelle.

Définition 9.5 (Loi normale multidimensionnelle) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice (à coefficients réels, de taille $d \times d$) s.d.p. (c'est-à-dire symétrique définie positive). Le v.a. X a pour*

loi $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ (loi normale de paramètre m et D) si $\mathrm{P_X} = f\lambda_d$ avec :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{det(\mathrm{D})}}\exp(-\frac{1}{2}(x-m)^t\mathrm{D}^{-1}(x-m)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

Si D est seulement semi–définie positive (c'est-à-dire $\mathrm{D}u \cdot u \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) au lieu d'être définie positive (c'est-à-dire $\mathrm{D}u \cdot u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$), la loi normale $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ est aussi définie, voir la proposition 9.33, mais ce n'est pas une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue), voir l'exercice 10.14 (et l'exercice 9.17 qui donne un exemple de loi normale bidimensionnelle qui n'est pas de densité).

La fonction f donnée dans la défintion 9.5 est bien positive et d'intégrale (de Lebesgue) égale à 1 (ceci sera d'aileurs démontré dans la proposition 9.33). Nous verrons aussi dans la proposition 9.33 que si X est un v.a. suivant une loi normale multidimensionnelle, X est un v.a. gaussien. L'extension de la définition de la loi normale multidimensionnelle au cas D non inversible permettra alors de dire que les v.a. gaussiens sont exactement ceux qui suivent une loi normale multidimensionnelle (proposition 9.33).

Le fait que les composantes du v.a. X suivent une loi normale ne donne pas que X suit une loi normale multidimensionnelle (voir, par exemple, l'exercice 10.15). Mais, si les composantes du v.a. X suivent une loi normale et sont indépendantes, le v.a. X suit alors une loi normale multidimensionnelle (cf. l'exercice 9.10 ou l'exercice 10.15).

Définition 9.6 (I-ème projecteur) *Soit $d \geq 1$. On appelle i-ème projecteur de $\mathbb{R}^d$ l'application π_i, de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, qui a un vecteur de $\mathbb{R}^d$ fait correspondre sa i-ème composante dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 9.7 (Probabilité marginale) *Soit $d > 1$.*

1. *Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et $i \in \{1, \ldots, d\}$. On appelle i-ème probabilité marginale de p, la probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ défini par $p_i(\mathrm{B}) = p(\pi_i^{-1}(\mathrm{B}))$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (On a donc, par exemple, $p_1(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \times \mathbb{R}^{d-1})$.)*
2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X un vecteur aléatoire de dimension d. On appelle i-ème loi de probabilité marginale du vecteur aléatoire X (ou i-ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X) la probabilité marginale de $\mathrm{P_X}$ (c'est donc aussi la mesure image de $\mathrm{P_X}$ par le i-ème projecteur π_i). La remarque suivante montre que cette probabilité marginale est en fait la loi de X_i notée $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_i}$.*

Remarque 9.8 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ espace probabilisé, $d \geq 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d. On note q_i la i-ème probabilité marginale du vecteur aléatoire X. Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, par définition de la loi marginale, on a :

$$q_i(\mathrm{B}) = \mathrm{P}_\mathrm{X}(\pi_i^{-1}(\mathrm{B})) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\pi_i^{-1}(\mathrm{B}))).$$

Comme $\mathrm{X}_i = \pi_i \circ \mathrm{X}$, on a donc :

$$q_i(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_i^{-1}(\mathrm{B})).$$

La probabilité q_i est donc aussi la loi de la variable aléatoire X_i.

Remarque 9.9 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ espace probabilisé, $d > 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d. La connaissance de P_X entraîne la connaissance des $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_i}$. La réciproque est en général fausse.

On définit la densité d'une loi de manière analogue au cas scalaire.

Définition 9.10 (Loi de densité) *Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(d \geq 1)$, on dit que p est une probabilité de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) s'il existe une application borélienne f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $p = f\lambda_d$.*

De même que dans le cas scalaire, on a un théorème qui donne la correspondance entre l'intégrale par rapport à la probabilité P d'une fonction de la v.a.r. X et l'intégrale de cette fonction par rapport à la probabilité P_X :

Théorème 9.11 (Loi image) *Soit $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X un v.a. de dimension d et P_X la loi de X. Soit φ une application borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On a alors (On rappelle que $\varphi(\mathrm{X})$ désigne $\varphi \circ \mathrm{X}$) :*

1. *$\varphi(\mathrm{X}) \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ si et seulement si $\varphi \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathrm{P}_\mathrm{X})$,*
2. *L'égalité*
$$\int_\Omega \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mathrm{P}_\mathrm{X},$$
est vraie si φ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ou si φ est bornée ou encore si $\varphi(\mathrm{X}) \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Définition 9.12 (Fonction de répartition)

Soit $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)^t$ un v.a. de dimension d et P_X la loi de X. On appelle fonction de répartition du vecteur aléatoire X la fonction définie de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, 1]$ par : $\mathrm{F}_\mathrm{X}(t_1, \ldots, t_d) = \mathrm{P}(\{\mathrm{X}_1 \leq t_1, \ldots, \mathrm{X}_d \leq t_d\})$.

Proposition 9.13 *Soit* $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X *un v.a. de dimension* d *de fonction de répartition* $\mathrm{F_X}$. *Alors :*

1. $0 \leq \mathrm{F_X}(t) \leq 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^d$ *;*

2. Si $t, t' \in \mathbb{R}^d$, $t \leq t'$ *(i.e.* $t_i \leq t'_i$, *pour tout* $i = 1, \ldots, d$*),* $\mathrm{F_X}(t) \leq \mathrm{F_X}(t')$ *;*

3. $\mathrm{F_X}$ *est continue à droite en tout point ;*

4. $\mathrm{F_X}(t_1, \ldots, t_d) \to 1$ *lorsque* $(t_1, \ldots, t_d) \to (+\infty, \ldots, +\infty)$ *;*

5. $\mathrm{F_X}(t_1, \ldots, t_d) \to 0$ *lorsque* $t_i \to -\infty$ *(à i fixé).*

La démonstration découle facilement des propriétés d'une mesure (monotonie, continuité croissante et continuité décroissante).

Proposition 9.14 *Soit* $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X *un v.a. de dimension* d *de fonction de répartition* $\mathrm{F_X}$. *Si* $\mathrm{F_X} \in C^d(\mathbb{R}^d, [0, 1])$, *alors* $\mathrm{P_X}$ *est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) et cette densité, notée* f_X, *vérifie*

$$f_\mathrm{X} = \frac{\partial^d \mathrm{F_X}}{\partial x_1 \ldots \partial x_d} \ \lambda_d\text{-}p.p.. \tag{9.1}$$

DÉMONSTRATION – On suppose que $d = 1$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la définition de $\mathrm{F_X}$ donne $\mathrm{P_X}(]a, b]) = \mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a)$. Mais, comme $\mathrm{F_X}$ est de classe C^1, on a $\mathrm{F_X}(b) - \mathrm{F_X}(a) = \int_a^b \mathrm{F'_X}(t)dt$. En notant m la mesure de densité $\mathrm{F'_X}$ par rapport à λ, on a donc $\mathrm{P_X}(]a, b]) = m(]a, b])$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ce qui est suffisant pour dire que $\mathrm{P_X} = m$ (en utilisant, par exemple, la proposition 2.31).

Pour $d > 1$, on note m la mesure de densité $\partial^d \mathrm{F_X}/\partial x_1 \ldots \partial x_d$ par rapport à λ_d. Un raisonnement voisin du précédent donne $m(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i]) = \mathrm{P_X}(\prod_{i=1}^d]a_i, b_i])$ pour tout $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, d$. On en déduit $m = \mathrm{P_X}$ avec la proposition 2.31.

■

Définition 9.15 (Espérance) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension* d. *On suppose que* $\mathrm{E}(|\mathrm{X}_i|) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$. *L'espérance de* X, *notée* E(X), *est alors le vecteur de* $\mathbb{R}^d$ *dont les composantes sont les espérances des* X_i, *c'est-à-dire* $\mathrm{E(X)} = (\mathrm{E}(\mathrm{X}_1), \ldots, \mathrm{E}(\mathrm{X}_d))^t$.

Remarque 9.16 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d t.q. $\mathrm{E}(|\mathrm{X}_i|) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. L'application $u \cdot \mathrm{X}$ (qui à $\omega \in \Omega$ associe $u \cdot \mathrm{X}(\omega)$, on rappelle que $\xi \cdot \eta$ est le produit scalaire canonique de ξ et η dans $\mathbb{R}^d$) est une v.a.r. intégrable et il est clair que $\mathrm{E}(u \cdot \mathrm{X}) = u \cdot \mathrm{E(X)}$. L'application $u \mapsto \mathrm{E}(u \cdot \mathrm{X})$ est donc l'application linéaire sur $\mathbb{R}^d$ représentée par E(X).

Définition 9.17 (Variance, covariance) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ *un vecteur aléatoire de dimension* d*. On suppose que* $E(X_i^2) < \infty$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*. On définit alors la matrice de covariance de* X*, notée* $Cov(X)$*, comme la matrice dont le coefficient* i, j *est donné par :*

$$Cov(X)_{i,j} = E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))) \text{ pour tout } i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

On a donc $C_{i,i} = Var(X_i)$ *et* $C_{i,j} = Cov(X_i, X_j)$ *(noter d'ailleurs que* $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i)$*). Enfin, on peut aussi noter que* $Cov(X)$ *est l'espérance de la matrice* $(X - E(X))(X - E(X))^t$*.*

Remarque 9.18 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)^t$ un vecteur aléatoire de dimension d t.q. $E(X_i^2) < \infty$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on a donc $E((u \cdot X)^2) < \infty$ et il est facile de voir (voir l'exercice 9.6) que $\mathrm{Var}(u \cdot X) = u^t \mathrm{Cov}(X) u$. La matrice $\mathrm{Cov}(X)$ est donc la matrice de la forme quadratique $u \mapsto \mathrm{Var}(u \cdot X)$, définie sur $\mathbb{R}^d$. Cette matrice est donc symétrique et semi–définie positive. On peut aussi noter que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, on a $u^t \mathrm{Cov}(X) v = E((u \cdot X - u \cdot E(X))(v \cdot X - v \cdot E(X)))$.

Comme dans le cas des v.a.r., on définit la convergence en loi de v.a. à partir de la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent pour des probabilités) des lois des v.a.. La convergence étroite est définie dans la définition 6.88.

Définition 9.19 (Convergence en loi de v.a.) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de dimension* d *et* X *un v.a. de dimension* d*. On dit que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si :*

$$\int_\Omega \varphi(X_n) dP \to \int_\Omega \varphi(X) dP \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

(Ce que est équivalent à dire que $P_{X_n} \to P_X$ *étroitement.)*

Comme pour les v.a.r., il est possible de définir la convergence en loi pour une suite de v.a. définies sur des espaces probabilisés différents (c'est-à-dire que X_n *est définie sur l'espace probabilisé* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ *dépendant de n, et* X *est définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*). Il suffit que tous les v.a. aient même dimension. Nous utiliserons parfois implicitement cette définition plus générale.*

Ici, comme dans le cas des v.a.r., on remarque que la convergence en loi donne la tension de la suite des lois. Ceci est donné dans la proposition 9.20.

Proposition 9.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$, $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de dimension* d *et* X *un v.a. de dimension* d. *On suppose que* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi. La suite* $(\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est alors tendue, c'est-à-dire*

$$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{P}(\{|\mathrm{X}_n| > a\}) = 0 \text{ uniformément par rapport à } n.$$

DÉMONSTRATION – Le résultat est donnée par proposition 6.95 en prenant $m_n = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$. ■

La proposition 9.20 admet une réciproque partielle qui est due à la proposition 8.22. Nous donnons maintenant cette réciproque (partielle).

Proposition 9.21 *Soit* $d \geq 1$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. de dimension* d. *On suppose que la suite des lois des* X_n *est tendue. Il existe alors un v.a.* X *(de dimension* d*) et une sous-suite de la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que cette sous-suite converge en loi vers* X.

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on note m_n la loi de X_n. Comme $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite tendue de probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la proposition 8.22 donne l'existence d'une probabilité m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $m_n \to m$ étroitement. En prenant un v.a. X t.q. $\mathrm{P}_{\mathrm{X}} = m$ (X n'est pas nécessairement défini sur le même espace probabilisé), on a donc la convergence en loi de X_n vers X. ■

9.2 Indépendance

Définition 9.22 *Soit* $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^*$. *soit* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *un espace probabilisé et, pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i *un v.a. de dimension* d_i. *Les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ *sont dits indépendants si les tribus* $\sigma(\mathrm{X}_1), \ldots, \sigma(\mathrm{X}_p)$ *(engendrées par* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$*) sont indépendantes (cf définition 2.57, p. 69)*

La proposition suivante donne des opérations possibles sur l'indépendance.

Proposition 9.23 *Soit* $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{N}^*$. *soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable et, pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$, X_i *un v.a. de dimension* d_i. *On suppose que les v.a.* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_p$ *sont indépendants. On se donne maintenant une suite strictement croissante* $p_0, \ldots, p_q$ *(*$q \geq 2$*) t.q.* $1 = p_0 < \ldots < p_q = p + 1$ *et, pour* $i \in \{1, \ldots, q\}$, *on note* Y_i *le v.a.* $(\mathrm{X}_{p_{i-1}}, \ldots, \mathrm{X}_{p_i - 1})^t$, *qui est donc un v.a. de dimension* $r_i = d_{p_{i-1}} + \ldots + d_{p_i - 1}$. *On a alors*

1. Les v.a. $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_q$ *sont indépendantes,*

2. *Si* φ_i *est, pour tout* $i \in \{1,\ldots,q\}$*, une application borélienne de* $\mathbb{R}^{r_i}$ *dans* $\mathbb{R}^{s_i}$ *(avec* $s_i \in \mathbb{N}^*$*), les v.a.* $\varphi_1(Y_1)$, …, $\varphi_q(Y_q)$ *sont indépendants.*

DÉMONSTRATION – le premier item est une conséquence immédiate de la proposition 2.60 (sur l'indépendance de tribus) et de la proposition 9.3. Le second item est une conséquence immédiate du premier car $\sigma(\varphi_i(Y_i)) \subset \sigma(Y_i)$ pour tout i. ■

Remarque 9.24 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et X, Y deux v.a. (pas nécessairement de même dimension). La proposition 9.23 montre que si X et Y sont indépendants, toute composante de X est indépendante de toute composante de Y. Réciproquement, si toute composante de X est indépendante de toute composante de Y, on en déduit que X et Y sont indépendants. Ceci est encore une conséquence simple de la proposition 2.60.

On donne maintenant une généralisation de la proposition 4.59.

Proposition 9.25 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $n \geq 2$ *et* $X_1,\ldots,X_n$ *des v.a. indépendants, de dimension* $d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Soit, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$*, une fonction borélienne, notée* φ_i*, de* $\mathbb{R}^{d_i}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. On a alors :*
$$E(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} E(\varphi_i(X_i)). \tag{9.2}$$
(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. *Soit, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$*,* φ_i *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^{d_i}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi(X_i)$ *est intégrable pour tout* $i = 1,\ldots,n$*. La v.a.r.* $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i)$ *est alors intégrable et l'égalité (9.2) est vraie.*

3. *Soit, pour tout* $i \in \{1,\ldots,n\}$*,* φ_i *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}^{d_i}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors, l'égalité (9.2) est vraie.*

N.B. Comme dans la proposition 4.59, l'item 3 *est donc une condition nécessaire suffisante pour que les v.a.* $X_1,\ldots,X_n$ *soient indépendants.*

La démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.59, sans difficulté supplémentaire.

Remarque 9.26 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. La proposition 9.25 donne aussi des résultats quand les fonctions φ_i sont à la valeurs dans $\mathbb{R}^{r_i}$ avec $r_i \neq 1$. Par exemple, soit X, Y deux v.a. indépendants de dimensions d. On suppose X et Y intégrables (c'est-à-dire $E(|X|) < \infty$ et $E(|Y|) < \infty$). La v.a.r. $X \cdot Y$ est alors intégrable et $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$.

Plus généralement, soit X est un v.a. de dimension d, Y est un v.a. de dimension $\bar{d}$, X, Y indépendants. On suppose que φ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^r$ et ψ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^{\bar{d}}$ dans $\mathbb{R}^r$ t.q. $\varphi \circ X$ et $\psi \circ Y$ soient intégrables. On a alors $\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y$ intégrable et $E(\varphi \circ X \cdot \psi \circ Y) = E(\varphi \circ X) \cdot E(\psi \circ Y)$.

Enfin, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendants de dimension d ($d \geq 1$), la formule donnée dans la proposition 6.100 se généralise et donne :

$$\mathrm{Cov}(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i).$$

Pour le montrer, il suffit de traiter le cas $n = 2$ (qui est traité dans l'exercice 9.8) et de faire une récurrence sur n.

On donne maintenant la généralisation de la proposition 4.61.

Proposition 9.27 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. de dimension $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^\star$. Ces v.a. sont indépendants si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_i,\ i = 1, \ldots n\}$ t.q. $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}^{d_i}, \mathbb{R})$ pour tout i,*

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(X_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} E(\varphi_i(X_i)), \tag{9.3}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

Ici encore, la démonstration suit pas à pas celle de la proposition 4.61, sans difficulté supplémentaire.

Théorème 9.28 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X, Y deux v.a.r.. Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. $(X, Y)^t$ (ou du couple (X, Y)) est $P_{(X,Y)^t} = P_X \otimes P_Y$.*
2. *Soit $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 2$) n v.a. de dimension $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^\star$.*
   On pose $Z = (X_1, \ldots, X_n)^t$ (Z est donc un v.a. de dimension $d_1 + \ldots + d_n$). Les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la loi du v.a. Z est $P_Z = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$.

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item fait partie de l'exercice 9.9. le second item est une généralisation assez simple (en faisant, par exemple, une récurrence sur n pour se ramener au cas $n = 2$). ■

On utilise souvent en théorie des probabilités une suite (finie ou infinie) de v.a.r. indépendantes ayant des lois prescrites. Le théorème suivant montre qu'il existe effectivement un espace probabilisé et une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur cet espace ayant des lois prescrites.

Théorème 9.29 (Existence de v.a.r. indépendantes de lois prescrites)

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de probabilités sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On a alors :*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, il existe un espace probabilisé, noté* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*, et une suite finie de v.a.r. indépendantes, notées* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$*, t.q.* $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_k} = p_k$ *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$*.*
2. *Il existe un espace probabilisé, noté* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*, et une suite de v.a.r. indépendantes, notée* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *t.q.* $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_n} = p_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

DÉMONSTRATION – Nous démontrons ici le premier item. Le second (plus difficile) sera admis. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un raisonnement par récurrence utilisant le théorème d'existence (et unicité) de la mesure produit (théorème 7.3) permet de construire une mesure p sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant, pour toute famille $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ de boréliens de $\mathbb{R}$:

$$p(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i(\mathrm{A}_i).$$

On a donc $p = p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$.

On prend alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), p)$ et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, X_i est l'application qui a $\omega \in \mathbb{R}^n$ associe sa i-ième composante. Enfin, on note $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)^t$, de sorte que X est un v.a. de dimension n.

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{X}(\omega) = \omega$, ceci prouve que $\mathrm{P}_\mathrm{X} = \mathrm{P}$. Puis, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathrm{X}(\omega) = \omega_i$ (où ω_i désigne la i-ième composante de ω). On en déduit que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}_i} = p_i$. Enfin, comme $p = p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$, on a aussi $\mathrm{P}_\mathrm{X} = p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_n}$. Le théorème 9.28 donne donc que les v.a.r. $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont indépendantes. ■

On s'intéresse maintenant à la somme de variables aléatoires indépendantes.

Proposition 9.30 (Loi de la somme de v.a. indépendantes) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X, Y *deux v.a. indépendants de dimension* d*. Alors,* $\mathrm{P}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}} = \mathrm{P}_\mathrm{X} * \mathrm{P}_\mathrm{Y}$.

DÉMONSTRATION – Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Comme X et Y sont indépendants, on a $\mathrm{P}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})} = \mathrm{P}_\mathrm{X} \otimes \mathrm{P}_\mathrm{Y}$ (par le théorème 9.28) et donc :

$$\int_\Omega \varphi(\mathrm{X}+\mathrm{Y})d\mathrm{P} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x+y)d\mathrm{P}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)d\mathrm{P}_\mathrm{X}(x)d\mathrm{P}_\mathrm{Y}(y).$$

La définition de la convolution de mesure donne (voir la définition 7.26 et la proposition 7.27 :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+y)d\mathrm{P}_\mathrm{X}(x)d\mathrm{P}_\mathrm{Y}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)d(\mathrm{P}_\mathrm{X} * \mathrm{P}_\mathrm{Y})(z).$$

On en déduit que $\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z)d(P_X * P_Y)(z)$, c'est-à-dire $P_{X+Y} = P_X * P_Y$. ■

9.3 Vecteurs gaussiens

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) de densité f avec, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pour introduire les v.a. gaussiens, il est utile de définir aussi la loi normale $\mathcal{N}(m, 0)$. Cette loi normale est la probabilité (sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) δ_m (appelée mesure de Dirac au point m). Comme elle vérifie, pour tout fonction φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\int \varphi d\delta_m = \varphi(m)$, il est facile de vérifier que $\mathcal{N}(m, 0)$ est la limite étroite, quand $\sigma \to 0$, $\sigma > 0$, de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Définition 9.31 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*. le v.a.* X *est un v.a. gaussien si* $u \cdot X$ *est, pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$*, une v.a.r. gaussienne.*

Remarque 9.32 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et X un v.a. de dimension d. On suppose que chaque composante de X est une v.a.r. gaussienne. Alors, le vecteur X n'est pas nécessairement gaussien. Mais, si les composantes de X sont indépendantes, le vecteur X est alors un v.a. gaussien. On peut aussi montrer que si X est un v.a. gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux (ou si on a seulement $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ tels que $i \neq j$), alors les composantes de X sont indépendantes (voir l'exercice 10.15 pour tous ces résultats).

Les v.a. gaussiens sont les vecteurs qui suivent un loi normale multidimensionnelle, dont la définition est donnée dans la définition 9.5, à condition d'étendre convenablement la définition 9.5 au cas D non inversible. C'est l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 9.33 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*.*

1. *Soit* $m \in \mathbb{R}^d$ *et* D *une matrice s.d.p. (de taille* $d \times d$*). Si* $X \sim \mathcal{N}(m, D)$*, où* $\mathcal{N}(m, D)$ *est définie par la définition 9.5, alors* X *est un vecteur gaussien,* $E(X) = m$ *et* $Cov(X) = D$.
2. *Si* X *est un vecteur gaussien, on pose* $m = E(X)$ *et* $D = Cov(X)$*. Alors, la loi de* X *ne dépend que de* m *et* D*. Si* D *est inversible on a* $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ *(où* $\mathcal{N}(m, D)$ *est définie par la définition 9.5).*

Ceci permet de définir $\mathcal{N}(m,\mathrm{D})$ *dans le cas où* D *est seulement symétrique semi–définie positive (et* $m \in \mathbb{R}^d$*). On définit* $\mathcal{N}(m,\mathrm{D})$ *comme étant la loi d'un vecteur gaussien de dimension* d *t.q.* $m = \mathrm{E}(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{D} = Cov(\mathrm{X})$ *(on peut montrer qu'un tel vecteur existe).*

DÉMONSTRATION –

1. Démonstration du premier item.

   On suppose que $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m,\mathrm{D})$ avec $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p.. Comme D est une matrice s.d.p., il existe une matrice diagonale M dont les termes diagonaux sont strictement positifs (ce sont les valeurs propres de M) et une matrice orthogonale P (c'est-à-dire que $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^t$) telles que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^t\mathrm{MP}$. On note N la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines des termes diagonaux de M, de sorte que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{M}$, $\mathrm{D} = \mathrm{P}^t\mathrm{NNP}$ et donc, en notant $\bar{\mathrm{N}} = \mathrm{N}^{-1}$, $\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{P}^t\bar{\mathrm{N}}\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P} = (\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P})^t\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P}$. On remarque aussi que $\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{M})$ et donc $\det(\mathrm{N}) = \sqrt{\det(\mathrm{D})}$.

   On montre tout d'abord que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = m$. On a
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathrm{D})}} \int_{\mathbb{R}^d} x e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\mathrm{D}^{-1}(x-m)}dx,$$
   ce qui donne, avec le changement de variable $x - m = \mathrm{P}^t\mathrm{N}y$, dont le jacobien est $\det(\mathrm{N})$ (c'est-à-dire $\sqrt{\det(\mathrm{D})}$),
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{P}^t\mathrm{N}y e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy + \frac{m}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy.$$
   En notant $y_1,\ldots,y_d$ les composantes de y, on a $y^t y = \sum_{i=1}^d y_i^2$ et donc
   $$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2}dy_i = (2\pi)^{d/2}$$
   et, pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$, $\int_{\mathbb{R}} y_i e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy_i = 0$, ce qui donne, par linéarité de l'intégrale,
   $$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{P}^t\mathrm{N}y e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = \mathrm{P}^t\mathrm{N}\int_{\mathbb{R}^d} y e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = 0.$$
   On obtient bien finalement $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = m$.

   On montre maintenant que $\mathrm{D} = \mathrm{Cov}(\mathrm{X})$. Le simple fait que X soit un vecteur aléatoire de dimension d tel que $\mathrm{E}(|\mathrm{X}|^2) < +\infty$ nous donne que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{Var}(u\cdot\mathrm{X}) = u^t\mathrm{Cov}(\mathrm{X})u$ (voir l'exercice 9.6). Comme D et Cov(X) sont des matrices symétriques, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Var}(u\cdot\mathrm{X}) = u^t\mathrm{D}u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ pour conclure que $\mathrm{D} = \mathrm{Cov}(\mathrm{X})$.

   Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a
   $$\mathrm{Var}(u\cdot\mathrm{X}) = \mathrm{Var}((\mathrm{X}-m)\cdot u) = \mathrm{E}(u^t(x-m)(x-m)^t u) =$$
   $$u^t\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathrm{D})}}(x-m)(x-m)^t e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\mathrm{D}^{-1}(x-m)}dx\Big)u. \quad (9.4)$$

Avec le changement de variable $x - m = \mathrm{P}^t\mathrm{N}y$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\det(\mathrm{D})}}(x-m)(x-m)^t e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\mathrm{D}^{-1}(x-m)}dx = \mathrm{P}^t\mathrm{N}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} yy^t e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy\Big)\mathrm{NP}.$$

Pour $i \neq j$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = 0$ et, pour $i = j$, $\int_{\mathbb{R}^d} y_i^2 e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = (2\pi)^{d/2}$. On en déduit, en notant I_d la matrice identité de taille $d \times d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} yy^t e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy = (2\pi)^{d/2}\mathrm{I}_d,$$

et donc, en revenant à 9.4, $\mathrm{Var}(u \cdot \mathrm{X}) = u^t\mathrm{P}^t\mathrm{NNP} = u^t\mathrm{D}u$. Ce qui prouve bien que $\mathrm{D} = \mathrm{Cov}(\mathrm{X})$.

Il reste à montrer que X est un vecteur gaussien, c'est-à-dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \cdot \mathrm{X}$ est une v.a.r. gaussienne, ce qui est équivalent à montrer que $u \cdot (\mathrm{X} - m)$ est une v.a.r. gaussienne centrée. Le cas $u = 0$ est immédiat (on obtient la loi $\mathcal{N}(0,0)$). On peut donc se limiter à $u \neq 0$ et même u tel que $|u| = 1$ (car si Z est un v.a.r. gaussienne centrée, $\alpha\mathrm{Z}$ est encore une v.a.r. gaussienne centrée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Soit donc $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $|u| = 1$. On va montrer que $u \cdot (\mathrm{X} - m)$ est une v.a.r. gaussienne centrée.

Soit φ une fonction borélienne bornée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a, en utilisant le changement de variables $(x - m) = y$,

$$\mathrm{E}(\varphi(u \cdot (\mathrm{X} - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathrm{D})}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u \cdot y)e^{-\frac{1}{2}y^t\mathrm{D}^{-1}y}dy.$$

Comme $|u| = 1$, on peut choisir une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ pour laquelle u est le premier vecteur. Il existe alors une matrice orthogonale Q (appelée matrice de passage, elle est formée par les vecteurs de cette nouvelle base) telle que, pour tout $y \in \mathrm{R}^d$, $y = \mathrm{Q}z$ avec $z_1 = u \cdot y$. Le changement de variables $y = \mathrm{Q}z$ donne alors dans la formule précédente, en notant que $|\det(\mathrm{Q})| = 1$ et en posant $\bar{\mathrm{D}} = \mathrm{Q}^t\mathrm{D}^{-1}\mathrm{Q}$,

$$\mathrm{E}(\varphi(u \cdot (\mathrm{X} - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathrm{D})}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z_1)e^{-\frac{1}{2}z^t\bar{\mathrm{D}}z}dz.$$

La matrice $\bar{\mathrm{D}}$ est encore une matrice s.d.p.. On peut utiliser sa décomposition de Cholesky (plus exactement la décomposition de Cholesky obtenue en changeant l'ordre des inconnues). Il existe une matrice inversible triangulaire inférieure, notée L, telle que $\bar{\mathrm{D}} = \mathrm{L}^t\mathrm{L}$. Les coefficients diagonaux de L sont strictement positifs et $\det(\mathrm{L}) = \sqrt{\det(\bar{\mathrm{D}})} = 1/\sqrt{\det(\mathrm{D})}$. Le changement de variables $y = \mathrm{L}z$ donne alors, en notant α le terme de L en première ligne et première colonne,

$$\mathrm{E}(\varphi(u \cdot (\mathrm{X} - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{y_1}{\alpha})e^{-\frac{1}{2}y^t y}dy.$$

Enfin, en intégrant (grâce au théorème de Fubini-Tonelli) d'abord par rapport à $y_2, \ldots, y_n$ et en utilisant le changement de variable $y_1 = \alpha x_1$, on obtient

$$\mathrm{E}(\varphi(u \cdot (\mathrm{X} - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \alpha\varphi(x_1)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x_1^2}dx_1.$$

Ceci qui prouve que $u \cdot (\mathrm{X} - m) \sim \mathcal{N}(0, \alpha^{-2})$ et termine la démonstration du premier item.

2. Démonstration du deuxième item. On suppose que X est un vecteur gaussien et on pose $m = E(X)$ et $D = Cov(X)$. On montrera dans la proposition 10.23 que la loi de X ne dépend que de m et D. (On admet ce résultat ici.)

   Si D est inversible (et donc D est s.d.p.), soit Y un v.a. de dimension d tel que $Y \sim \mathcal{N}(m, D)$. D'après le premier item de cette proposition, Y est un vecteur gaussien, $E(Y) = m$ et $Cov(Y) = D$. comme la loi d'un vecteur gaussien ne dépend que de son espérance et de sa covariance, les vecteurs gaussiens X et Y ont même loi. On a donc $X \sim \mathcal{N}(m, D)$

■

Remarque 9.34 La notion de vecteur aléatoire gaussien (et de loi normale multidimensionnelle) généralise la notion de variable aléatoire gaussienne (et de loi normale). Le théorème central limite que nous avons énoncé dans la remarque 6.104 se généralise au cas vectoriel. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de dimension d i.i.d.. On suppose que $E(|X_1|^2) < \infty$. On pose $E(X_1) = m$, $D = Cov(X_1)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors en loi vers tout v.a. Y dont la loi est la normale multidimensionnelle $\mathcal{N}(0, D)$. (Voir la définition 9.5 et la proposition 9.33 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.) Ceci sera démontré au chapitre 10 (théorème 10.24) en utilisant la transformation de Fourier.

9.4 Exercices

9.4.1 Définition, propriétés élémentaires

Exercice 9.1 (Application mesurable)

Soient (E, T) un espace mesurable et $(f_k)_{k=1,...,N}$ une famille de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne. Montrer que l'application f définie de E dans $\mathbb{R}^N$ par : $(x, \ldots, x) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots f_N(x))$ est mesurable.

Exercice 9.2 (Probabilités marginales) Cet exercice montre en particulier (avec les questions 2 et 3) que la connaissance des lois de probabilité marginales ne détermine pas forcément la loi de probabilité.

On note λ_2 la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ et $\delta_{(a,b)}$ la mesure de Dirac en (a, b). Soit p une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$, on note p_1 et p_2 ses probabilités marginales.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $p = \delta_{(a,b)}$ si et seulement si $p_1 = \delta_a$ et $p_2 = \delta_b$.

   Corrigé – *On suppose que $p = \delta_{(a,b)}$. On a alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $p_1(A) = p(A \times \mathbb{R}) = 1$ si $a \in A$ et 0 si $a \notin A$. On en déduit que $p_1 = \delta_a$. Un raisonnement analogue donne $p_2 = \delta_b$.*

   On suppose maintenant que $p_1 = \delta_a$ et $p_2 = \delta_b$. On remarque alors que
   $$\{a,b\}^c \subset (\{a\}^c \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{b\}^c)$$
   et donc
   $$p(\{a,b\}^c) \le p(\{a\}^c \times \mathbb{R}) + p(\mathbb{R} \times \{b\}^c) = p_1(\{a\}^c) + p_2(\{b\}^c) = 0.$$
   On en déduit que $p = \delta_{(a,b)}$.

2. On suppose que $p = \mathcal{U}([0,1]^2)$ (c'est-à-dire $p = 1_{]0,1[^2}\lambda_2$) Montrer que $p_1 = p_2 = \mathcal{U}([0,1])$ (c'est-à-dire $p_1 = p_2 = 1_{]0,1[}\lambda$).

   Corrigé – *Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a*
   $$p_1(B) = p(B \times \mathbb{R}) = \int_{]0,1[^2} 1_B(x) d\lambda_2(x,y) = \lambda(B \cap]0,1[)$$
   et donc $p_1 = 1_{]0,1[}\lambda$. Un raisonnement analogue donne $p_2 = 1_{]0,1[}\lambda$.

3. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on pose $p(A) = \lambda(\{t \in [0,1], (t,t) \in A\})$. Montrer que p est une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1 = p_2 = \mathcal{U}([0,1])$.

   Corrigé – *On remarque tout d'abord que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble $\{t \in [0,1], (t,t) \in A\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ car c'est la projection sur la première coordonnée d'un borélien de $\mathbb{R}^2$. On remarque ensuite que $p(\mathbb{R}^2) = 1$ et que p est σ-additive. Ceci montre que p est une probabilité.*

   On calcule maintenant p_1 et p_2. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a
   $$p_1(B) = p(B \times \mathbb{R}) = \lambda(\{t \in B \cap [0,1]\})$$
   et donc $p_1 = \mathcal{U}([0,1])$. Un raisonnement analogue donne $p_2 = 1_{]0,1[}\lambda$.

   N.B. On peut remarquer que $p \neq \mathcal{U}([0,1]^2)$...

Exercice 9.3 (Somme de v.a.r. avec lois de Poisson) Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. sur l'espace probabilisé (E, T, p) suivant des lois de Poisson de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. (On rappelle que la loi de Poisson de paramètre λ est donnée par $\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$, où δ_k désigne la mesure de Dirac en k).

Exercice 9.4 (Exemple de loi pour le max de deux v.a.r.) On considère deux variables aléatoires réelles X et Y qui ont pour loi de probabilité conjointe la loi dans le plan $\mathbb{R}^2$ de densité $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, σ étant un nombre réel donné non nul. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = \max(|X|, |Y|)$?

Corrigé – *On peut supposer* $\sigma > 0$. *Soit* φ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *borélienne bornée. On va chercher la loi de* Z *en exprimant convenablement* $E(\varphi(Z))$ *grâce à la connaissance de la loi du couple* (X, Y).

$$E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\max(|x|,|y|))\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\Big)dxdy.$$

On en déduit facilement que

$$E(\varphi(Z)) = \frac{8}{2\pi\sigma^2}\int_0^{\infty}\varphi(x)\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\Big(\int_0^x \exp\Big(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\Big)dy\Big)dx.$$

Pour $u \geq 0$, *on pose* $e(u) = \int_0^u \exp(-\frac{\xi^2}{2})d\xi$. *On a alors*

$$E(\varphi(Z)) = \frac{4}{\pi\sigma}\int_0^{\infty}\varphi(x)\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})e(\frac{x}{\sigma})dx.$$

La loi de Z *a donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue de* $\mathbb{R}$ *et cette densité* g *est donnée par*

$$g(x) = \frac{4}{\pi\sigma}1_{\mathbb{R}_+}(x)\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})e(\frac{x}{\sigma}).$$

Exercice 9.5 (Calcul de lois) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et (X, Y) un vecteur aléatoire (de dimension 2) de loi de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

1. Déterminer la densité de la loi de la v.a.r. $X^2 + Y^2$.

Corrigé – *On pose* $Z = X^2 + Y^2$. *Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x^2+y^2)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}d(x,y).$$

On peut passer dans cette intégrale en coordonnées polaires. On obtient

$$E(\varphi(Z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(r^2)e^{-\frac{1}{2}r^2}rd\theta dr = \int_0^{+\infty}\varphi(r^2)e^{-\frac{1}{2}r^2}rdr.$$

Le changement de variable $r^2 = s$ *donne alors*

$$E(\varphi(Z)) = \int_0^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{1}{2}s}\frac{1}{2}ds.$$

La v.a.r. Z *a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction* g *définie par :* $g(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}$ *si* $y > 0$ *et* $g(y) = 0$ *si* $y \leq 0$.

2. Déterminer la densité de la loi de la v.a.r. $|X| + |Y|$.

Corrigé – *On pose* $T = |X| + |Y|$. *Soit* φ *une fonction borélienne bornée positive de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$E(\varphi(T)) = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(|x|+|y|)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}d(x,y).$$

La parité en x et en y de la fonction que l'on intègre sur $\mathbb{R}^2$ nous permet d'écrire

$$E(\varphi(T)) = 4\int_{(\mathbb{R}_+)^2} \varphi(x+y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}d(x,y).$$

Le théorème de Fubini-Tonelli nous donne alors

$$E(\varphi(T)) = 4\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\varphi(x+y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy\Big)dx.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on utilise le changement de variable $x+y=z$ dans l'intégrale par rapport à y. On obtient

$$E(\varphi(T)) = 4\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty}\varphi(z)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)}1_{]x,+\infty[}(z)dz\Big)dx.$$

On remarque maintenant que $\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2) = x^2 - zx + \frac{1}{2}z^2 = (x-\frac{1}{2}z)^2 + \frac{1}{4}z^2$. Ceci donne en réutilisant le théorème de Fubini-Tonelli et le fait que $1_{]x,+\infty[}(z) = 1_{]0,z[}(x)$

$$E(\varphi(T)) = 4\int_0^{+\infty}\varphi(z)e^{-\frac{1}{4}z^2}\Big(\int_0^z \frac{1}{2\pi}e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2)}dx\Big)dz.$$

Le changement de variable $x - \frac{1}{2}z = \frac{t}{\sqrt{2}}$ nous donne

$$\int_0^z \frac{1}{2\pi}e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2)}dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}z}^{\frac{\sqrt{2}}{2}z}\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}z}\frac{1}{\sqrt{2}\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}e(\frac{\sqrt{2}}{2}z),$$

en posant pour $s \geq 0$, $e(s) = \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. On obtient donc

$$E(\varphi(T)) = \int_0^{+\infty}\varphi(z)\frac{2\sqrt{2}}{\pi}e(\frac{\sqrt{2}}{2}z)e^{-\frac{1}{4}z^2}dz.$$

La v.a.r. T a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction g définie par : $g(y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}e(\frac{\sqrt{2}}{2}y)e^{-\frac{1}{4}y^2}$ si $y > 0$ et $g(y) = 0$ si $y \leq 0$.

Exercice 9.6 (Matrice des moments, matrice de covariance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Soit X un vecteur aléatoire de dimension d ($d \geq 1$), dont toutes les coordonnées (notées X_i, $i = 1, \ldots, d$) sont supposées être de carré intégrable. La matrice des moments d'ordre 2 du v.a. X est la matrice $E(XX^t)$, dont le terme (i,j) est le réel $E(X_iX_j)$, et on rappelle que la matrice de covariance de X, notée Cov(X), est la matrice $E((X-E(X))(X-E(X))^t) = E(XX^t) - E(X)E(X)^t$, dont le terme (i,j) est la covariance des v.a.r. X_i et X_j. (La notation X^t désigne le transposé du vecteur X.)

1. Soit $u \in \mathbb{R}^d$, montrer que $u^tE(XX^t)u = E((u \cdot X)^2)$ et que $u^t\text{Cov}(X)u = \text{Var}(u \cdot X)$ (On rappelle que $u \cdot X = \sum_{i=1}^d u_iX_i = u^tX$).

Corrigé – *L'application $Z \mapsto E(Z)$ est linéaire, on en déduit que*

$$u^tE(XX^t)u = E(u^tXX^tu) = E((u \cdot X)^2).$$

Cette égalité appliquée au vu v.a. $X - E(X)$ donne $u^tCov(X)u = Var(u \cdot X)$ car $u \cdot X - E(u \cdot X) = u \cdot (X - E(X))$.

2. Montrer que les matrices $E(XX^t)$ et $Cov(X)$ sont symétriques et semi–définies positives.

   Corrigé – *Il est facile de voir que* $E(XX^t)$ *et* $Cov(X)$ *sont des matrices symétriques (car pour toutes v.a.r.* Y, Z *on a* $E(YZ) = E(ZY)$*). La question précédente donne* $u^t E(XX^t)u \geq 0$ *et* $u^t Cov(X)u \geq 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$*, ce qui signifie que les matrices* $E(XX^t)$ *et* $Cov(X)$ *sont semi–définies positives.*

3. Montrer que si A est une matrice $k \times d$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^k$, $Y = AX + b$, alors $E(Y) = AE(X) + b$ et $Cov(Y) = ACov(X)A^t$.

   Corrigé – *Comme* X *est un v.a. de carré intégrable, la fonction* Y *est aussi un v.a. de carré intégrable. En utilisant la linéarité de l'application* $Z \mapsto E(Z)$*, on calcule son espérance et sa variance :*

$$E(Y) = E(AX + b) = AE(X) + E(b) = AE(X) + b,$$
$$\begin{aligned} Cov(Y) &= E([A(X - E(X))][A(X - E(X))]^t) \\ &= E(A[X - E(X)][X - E(X)]^t A^t) \\ &= AE([X - E(X)][X - E(X)]^t)A^t = ACov(X)A^t. \end{aligned}$$

4. Montrer que si $Cov(X)$ n'est pas inversible, alors le v.a. X prend p.s. ses valeurs dans un sous–espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension (inférieure ou) égale à $d - 1$, et que la loi de X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, notée λ_d (*i.e.* cette loi n'est pas à densité dans $\mathbb{R}^d$).

   Corrigé – *Si* $Cov(X)$ *n'est pas inversible, il existe* $u \in \mathbb{R}^d$*,* $u \neq 0$*, t.q.* $Cov(X)u = 0$*. On a donc* $Var(u \cdot X) = u^t Cov(X)u = 0$*, ce qui donne* $u \cdot X = E(u \cdot X)$ *p.s.. On pose* $\beta = E(u \cdot X)$ *et on a donc :*

$$X \in H \text{ p.s. avec } H = \{v \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } u \cdot v = \beta\}.$$

   Comme $u \neq 0$*, l'ensemble* H *est un sous–espace affine de* $\mathbb{R}^d$ *de dimension égale à* $d - 1$.

   L'ensemble H *étant de dimension* $d - 1$*, on a* $\lambda_d(H) = 0$*. Or on a* $P_X(H) = P(X \in H) = 1 \neq 0$*. On en déduit que* P_X *n'est pas absolument continue par rapport à* λ_d *et donc que* P_X *n'est pas une loi de densité par rapport à* λ_d *(voir le théorème 6.78).*

5. Montrer que si trois points x, y et z de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas alignés, tout v. a. X de dimension 2 tel que $P(X = x) > 0$, $P(X = y) > 0$ et $P(X = z) > 0$ a une matrice de covariance non dégénérée.

   Corrigé – *On raisonne par l'absurde. Soit x, y et z trois points de* $\mathbb{R}^2$ *non alignés et* X *un v.a. de dimension 2 tel que* $P(X = x) > 0$*,* $P(X = y) > 0$ *et* $P(X = z) > 0$*. On suppose que la matrice de covariance de* X *est dégénérée. La question précédente donne alors qu'il existe une droite de* $\mathbb{R}^2$ *(c'est-à-dire un sous–espace affine de* $\mathbb{R}^2$ *de dimension égale à* 1*), notée* D*, t.q.* $X \in D$ *p.s.. Comme* $P(X = x) > 0$*, on a donc* $\{X = x\} \cap D \neq \emptyset$*. En prenant* $\omega \in \{X = x\} \cap D$*, on déduit* $x = X(\omega) \in D$*. On montre de même que* $y, z \in D$*, ce qui est impossible car les trois points x, y et z ne sont pas alignés.*

Exercice 9.7 (Famille de mesures tendue) Soit μ et ν deux probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe p, probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$, t.q.

$$\begin{aligned} &p(A \times \mathbb{R}) = \mu(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ &p(\mathbb{R} \times A) = \nu(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{9.5}$$

(On dit alors que μ et ν sont les probabilités marginales de p.)

Corrigé – *On prend $p = \mu \otimes \nu$. La mesure p est bien une probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$ vérifiant (9.5).*

Dans la suite, on note E l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant (9.5).

2. Soit $p \in E$. Pour $a > 0$, on pose $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x| \leq a\}$ (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$). Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ (ne dépendant que ε, μ et ν) t.q.,

$$p(B_a^c) \leq \varepsilon \text{ pour tout } p \in E.$$

(On dit que l'ensemble E est tendu.)

Corrigé – *Grâce à la continuité décroissante d'une mesure, il existe $n \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de ε et μ) et $m \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de ε et ν) t.q.*

$$\mu(\{x_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_1| \geq n\}) \leq \varepsilon \text{ et } \nu(\{x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_2| \geq m\}) \leq \varepsilon.$$

On choisit alors $a > 0$ t.q. $a \geq \sqrt{2}n$ et $a \geq \sqrt{2}m$ (le nombre a ne dépend donc que ε, μ et ν) de sorte que

$$\begin{aligned} &B_a^c = \{x = (x_1, x_2) \text{ t.q. } x_1^2 + x_2^2 > a^2\} \subset \\ &\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x_1| \geq n\} \cup \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x_2| \geq m\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$B_a^c \subset \Big(\{x_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_1| \geq n\} \times \mathbb{R}\Big) \cup \Big(\mathbb{R} \times \{x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_2| \geq m\}\Big).$$

Soit $p \in E$, par σ-sous additivité de p et en utilisant (9.5), on a donc

$$\begin{aligned} p(B_a^c) &\leq p(\{x_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_1| \geq n\} \times \mathbb{R}) + p(\mathbb{R} \times \{x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_2| \geq m\}) \\ &= \mu(\{x_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_1| \geq n\}) + \nu(\{x_2 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |x_2| \geq m\}) \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui termine cette question.

3. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Monter qu'il existe p dans E et une sous-suite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, t.q.

$$p_n \to p \text{ étroitement, quand } n \to +\infty.$$

[On pourra utiliser les propositions du cours sur les suites de mesures tendues.]

Corrigé – *On utilise ici la proposition 8.22 Comme la suite de probabilités* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est tendue, on obtient l'existence d'une mesure p sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *et d'une sous-suite, encore notée* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, t.q.* $p_n \to p$ *étroitement, quand* $n \to +\infty$*. Comme* $p_n(\mathbb{R}^2) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a aussi* $p(\mathbb{R}^2) = 1$*. La mesure p est donc une probabilité. Il reste à montrer que p vérifie (9.5).*

Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on note* $m(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\times\mathbb{R})$*. Il est facile de voir que m est une probabilité sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Pour* $\varphi = 1_\mathrm{A}$*,* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on a, par définition de m,*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dp(x,y). \tag{9.6}$$

Par linéarité de l'intégrale, (9.6) est encore vraie pour φ *étagée positive (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*). Puis, par convergence monotone, (9.6) est vraie pour* φ *borélienne positive. Enfin, en décomposant* φ *en* $\varphi^+ - \varphi^-$*, on obtient que (9.6) est vraie pour* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(et donc, en particulier, pour* $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*).*

Soit $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. Le raisonnement précédent appliqué à* p_n *au lieu de p donne*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dp_n(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x).$$

Quand $n \to +\infty$*, comme* $p_n \to p$ *étroitement, on en déduit que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dp(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) d\mu(x).$$

c'est-à-dire , avec (9.6),

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu.$$

On en déduit que $m = \mu$ *(en utilisant, par exemple, la proposition 5.8). Ceci prouve que p vérifie la première condition de (9.5). Un raisonnement analogue donne la deuxième condition de (9.5).*

4. (Question indépendante des précédentes) Soit $p \in \mathrm{E}$ et (U,V) un vecteur aléatoire de dimension 2 dont la loi est p. Montrer que la loi de U est μ et que la loi de V est ν.

Corrigé – *Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(en fait, on peut aussi se limiter ici à prendre* φ *dans* $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$*). Comme la loi de* (U,V) *est p, on a*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{U})) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(u) dp(u,v).$$

Puis, comme $p(\mathrm{A}\times\mathbb{R}) = \mu(\mathrm{A})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on en déduit grâce à (9.6) (qui est vraie pour* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*)*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{U})) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(u) d\mu(u).$$

Ceci prouve que la loi de U *est* μ*. Un raisonnement analogue donne que la loi de* V *est* ν*.*

9.4.2 Indépendance

Exercice 9.8 (Covariance d'une somme de v.a.i.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $Cov(X+Y) = Cov(X)+Cov(Y)$.

> **Corrigé** – *Comme* X *et* Y *sont des v.a. indépendants, toute composante de* X *est indépendante de toute composante de* Y *(voir, par exemple, la remarque 9.24). On en déduit :*
>
> $$E([X-E(X)][Y-E(Y)]^t) = E([Y-E(Y)][X-E(X)]^t) = 0$$
>
> *et donc :*
>
> $$\begin{aligned} Cov(X+Y) &= E([X-E(X)+Y-E(Y)][X-E(X)+Y-E(Y)]^t) \\ &= E([X-E(X)][X-E(X)]^t) + E([X-E(X)][Y-E(Y)]^t) \\ &\qquad + E([Y-E(Y)][X-E(X)]^t) + E([Y-E(Y)][Y-E(Y)]^t) \\ &= E([X-E(X)][X-E(X)]^t) + E([Y-E(Y)][Y-E(Y)]^t) \\ &= Cov(X) + Cov(Y). \end{aligned}$$

Exercice 9.9 (Loi d'un couple de v.a. indépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r..

1. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) est $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.

   > **Corrigé** – *On suppose tout d'abord que* X *et* Y *sont indépendantes. Soit* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On a, par définition de* $P_{(X,Y)}$, $P_{(X,Y)}(A \times B) = P(X \in A, Y \in B)$. *Comme* X *et* Y *sont indépendantes, on a* $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(X \in B)$, *ce qui donne :*
   >
   > $$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B).$$
   >
   > *Or,* $P_X \otimes P_Y$ *vérifie aussi* $P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$. *La partie unicité du théorème 7.3 donne alors* $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$.
   >
   > *Réciproquement, on suppose maintenant que* $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$, *on a donc, pour tout* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P(X \in A, Y \in B) = P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$, *ce qui prouve que les tribus engendrées par* X *et* Y *sont indépendantes, c'est-à-dire que* X *et* Y *sont indépendantes.*

2. On suppose que X et Y ont des densités par rapport à λ : $P_X = f\lambda$ et $P_Y = g\lambda$, avec $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et positives p.p.). Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la loi du couple (X, Y) a pour densité la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ par rapport à λ_2.

   > **Corrigé** – *Comme* $P_X = f\lambda$ *et* $P_Y = g\lambda$, *on a, pour tout* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
   >
   > $$P_X \otimes P_Y(A \times B) = P_X(A)P_Y(B) = \int_A f d\lambda \int_B g d\lambda.$$

Le théorème 7.7 donne alors :

$$P_X \otimes P_Y(A \times B) = \int_{A\times B} f(x)g(y)d\lambda_2(x,y).$$

Ce qui donne $P_X \otimes P_Y = F\lambda_2$, *avec* $F(x,y) = f(x)g(y)$ *pour* $x,y \in \mathbb{R}$. *la mesure* $P_X \otimes P_Y$ *est donc la mesure de densité* F *par rapport à* λ_2. *La question 2 est alors une conséquence immédiate de la première question.*

Exercice 9.10 (V.a. suivant une loi normale multi–dimensionnelle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_1,\ldots,X_d)$ $(d > 1)$ un v.a. de dimension d. On suppose que les X_i sont des v.a.r. indépendantes et que $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, avec $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ pour tout i. Montrer que X suit une loi normale multidimensionnelle et donner m et D t.q. $X \sim \mathcal{N}(m, D)$.

Corrigé – *Comme les* X_i $(i = 1,\ldots,d)$ *sont des v.a.r. indépendantes, la loi de* X *est le produit des lois* P_{X_i}, $i = 1,\ldots,d$, *c'est-à-dire* $P_X = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_d}$. *Cette propriété est donnée dans le théorème 9.28 (elle découle du fait que* $P(X_1 \in A_1,\ldots,X_d \in A_d) = P(X_1 \in A_1)\ldots P(X_d \in A_d)$ *si* $A_1,\ldots A_d$ *sont d boréliens de* $\mathbb{R}$*). Ceci donne que pour toute fonction* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$\int_\Omega \varphi(X)dP = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1,\ldots,x_d)dP_{X_1}(x_1)\ldots dP_{X_d}(x_d).$$

Comme, pour $i = 1,\ldots,d$, $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, *on a* $P_{X_i} = f_i\lambda$ *avec, pour* $x \in \mathbb{R}$,

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

On en déduit

$$\int_\Omega \varphi(X)dP = \frac{(2\pi)^{-\frac{d}{2}}}{\prod_{i=1}^d \sigma_i} \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_1,\ldots,x_d) e^{-\sum_{i=1}^d \frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}} dx_1 \ldots dx_d.$$

Ce qui donne :

$$\int_\Omega \varphi(X)dP = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{det D}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)} dx,$$

où dx *désigne l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ *(c'est-à-dire* $dx = d\lambda_d(x)$*),* D *désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont* $\sigma_1^2,\ldots,\sigma_d^2$ *et* $m = (m_1,\ldots,m_d)^t$. *Ceci montre bien que* X *suit une loi normale multi–dimensionnelle avec* $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ *(voir la définition 9.5).*

Exercice 9.11 (Somme de v.a. indépendantes et convolution) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f, par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de X + Y a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y.

Corrigé – *Comme les* X *et* Y *sont des v.a.r. indépendantes, la loi du couple* (X,Y) *est* $P_X \otimes P_Y$ *(théorème 9.28). On a donc, pour toute fonction* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y)dP_{(X,Y)}(x,y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)dP_X(x)dP_Y(y).$$

Comme $P_X = f\lambda$, *on a alors :*

$$\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+y)f(x)dx\right)dP_Y(y).$$

A y *fixé, on utilise le changement de variable* $x+y=z$, *on obtient :*

$$\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(z)f(z-y)dz\right)dP_Y(y),$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini (théorème 7.12) ou le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) si on se limite à des fonctions φ *positives (ce que l'on peut faire) :*

$$\int_\Omega \varphi(X+Y)dP = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(z-y)dP_Y(y)\right)\varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}} g(z)\varphi(z)dz,$$

avec $g(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z-y)dP_Y(y)$ *pour tout* $z \in \mathbb{R}$. *Ceci montre que* $(X+Y)$ *est une v.a.r. dont la loi a pour densité la fonction* g *(par rapport à la mesure de Lebesgue).*

2. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m,s^2)$ $(m,\mu,s,\sigma \in \mathbb{R})$. Montrer que $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu+m,\sigma^2+s^2)$ (le signe "$\sim$" signifie "a pour loi").

Corrigé – *On peut supposer, bien sûr,* $s \geq 0$ *et* $\sigma \geq 0$ *(car* σ *et* σ *n'interviennent que par leur carré). Nous allons commencer par deux cas particuliers faciles.*

Cas 1 *Si* $s=\sigma=0$, *on a* $X=\mu$ *p.s. et* $Y=m$ *p.s. et donc* $X+Y=m+\mu$ *p.s., ce qui donne bien* $X+Y \sim \mathcal{N}(m+\mu,0)$.

Cas 2 *Si* $s=0$ *et* $\sigma>0$, *on a* $Y=m$ *p.s. et donc* $X+Y=X+m$ *p.s.. La densité de* $X+Y$ *(par rapport à Lebesgue) est alors la densité de* X *translatée de* m, *ce qui donne bien* $X+Y \sim \mathcal{N}(m+\mu,\sigma^2)$. *De même, si* $s>0$ *et* $\sigma=0$, *on a* $X+Y \sim \mathcal{N}(m+\mu,s^2)$.

Cas 3 *On suppose maintenant que* $s,\sigma>0$. *L'énoncé de cet exercice suggère (implicitement) de faire cette question en utilisant la question précédente. Nous allons procéder ainsi dans ce corrigé (mais d'autres méthodes sont possibles, voir la N.B. ci après). La question précédente donne que* $(X+Y)$ *est une v.a.r. dont la loi a pour densité la fonction* g *(par rapport à la mesure de Lebesgue) vérifiant, pour* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2s^2}}dy.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $\bar{x} = x-m-\mu$ *et on utilise le changement de variable* $z = \frac{y-m}{s}$. *On obtient :*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi s\sigma}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\bar{x}-sz)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\bar{x}^2-2sz\bar{x}+(s^2+\sigma^2)z^2)}dz.$$

En remarquant que $(\bar{x}^2 - 2sz\bar{x} + (s^2+\sigma^2)z^2) = (\sqrt{s^2+\sigma^2}z - \frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}}s\bar{x})^2 + (\frac{\sigma^2}{s^2+\sigma^2}\bar{x}^2)$, *on a aussi, avec le changement de variable* $\frac{\sqrt{s^2+\sigma^2}}{\sigma}z - \frac{1}{\sigma\sqrt{s^2+\sigma^2}}s\bar{x} = \bar{z}$ *:*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{1}{2(s^2+\sigma^2)}\bar{x}^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{s^2+\sigma^2}z - \frac{1}{\sqrt{s^2+\sigma^2}}s\bar{x})^2}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{s^2+\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2(s^2+\sigma^2)}\bar{x}^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}d\bar{z}.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}d\bar{z} = \sqrt{2\pi}$ *et* $\bar{x} = x - m - \mu$, *on a donc*

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{s^2+\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2(s^2+\sigma^2)}(x-m-\mu)^2}.$$

Ce qui donne bien $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + m, \sigma^2 + s^2)$.

N.B. Cette question peut aussi être résolue en utilisant la transformée de Fourier que nous verrons au chapitre 10. Elle est résolue ainsi (avec, plus généralement, $aX + bY$, $a, b \in \mathbb{R}$, *au lieu de* $X + Y$*) dans l'exercice 10.15, question 1(a)).*

Exercice 9.12 (Calcul de π)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires réelles de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n.

Corrigé – *On note* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ *et* $\psi = 1_D$, *de sorte que* ψ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *(car* $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*) et que* $X_n = 1_D(U_n, V_n) = \psi(U_n, V_n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Comme* U_n *et* V_n *sont des v.a.r. et que* ψ *est borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$, *la fonction* X_n *est donc une v.a.r.. Comme* X_n *ne prend que les valeurs* 1 *et* 0, *la loi de* X_n *est* $P_{X_n} = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$ *où* $p = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1)$. *Pour calculer p, on utilise le fait que* U_n *et* V_n *sont indépendantes, on obtient (avec le théorème 9.28 sur la loi d'un couple de v.a.) :*

$$P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) = \int_\Omega 1_D(U_n, V_n)dP = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} 1_D(x,y)dP_{U_n}(x)dP_{V_n}(y).$$

Comme $U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ *et* $V_n \sim \mathcal{U}(0,1)$, *on en déduit (en utilisant les coordonnées polaires) :*

$$p = \int_0^1\int_0^1 1_D(x,y)dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r dr = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $p_{X_n} = \frac{\pi}{4}\delta_1 + (1 - \frac{\pi}{4})\delta_0$.

2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers π.

Corrigé – *On utilise les notations introduites dans la première question. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = 4X_n$, c'est-à-dire $Y_n = 4\psi(U_n,V_n)$. Comme les v.a.r. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes (dans leur ensemble), la proposition 9.23 donne la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes. De plus, comme $Y_n = 4X_n$, on a $P_{Y_n} = \frac{\pi}{4}\delta_4+(1-\frac{\pi}{4})\delta_0$. La suite Y_n est donc une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables (on a $E(Y_n)=\pi$ et $E(Y_n^2)=4\pi$). On peut appliquer la proposition 6.101 (loi faible des grands nombres), il donne que Z_n tend en probabilité vers $E(Y_1)$, c'est-à-dire vers π.*

3. Soit $\alpha\in]0,1[$ et $\varepsilon>0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε, une valeur de $n_0\in\mathbb{N}^*$ t.q.

$$n\geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n-\pi|\geq\varepsilon]\leq\alpha.$$

Corrigé – *On reprend ici la démonstration de la proposition 6.101.*

En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.57), on a :

$$p(|Z_n-\pi|\geq\varepsilon)=p((Z_n-\pi)^2\geq\varepsilon^2)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}E((Z_n-\pi)^2).$$

Puis, en posant $S_n=\sum_{i=1}^n Y_i$, on a $Z_n=\frac{S_n}{n}$ et donc $E((Z_n-\pi)^2)=\frac{1}{n^2}E((S_n-n\pi)^2)=\frac{Var(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.100 donne $Var(S_n)=nVar(Y_1)=n\pi(4-\pi)$. On en déduit finalement

$$p(|Z_n-\pi|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{n\pi(4-\pi)}{n^2}=\frac{\pi(4-\pi)}{n\varepsilon^2}.$$

Il suffit donc de prendre n_0 t.q. $\frac{\pi(4-\pi)}{n_0\varepsilon^2}\leq\alpha$ pour avoir $P(|Z_n-\pi|\geq\varepsilon)\leq\alpha$ si $n\geq n_0$.

Exercice 9.13 (Indépendance des composantes d'un v.a.) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a. de dimension 2. On note X_1,X_2 les composantes de X et Y_1,Y_2 les composantes de Y. On suppose que X et Y ont même loi.

1. Montrer que X_1 et Y_1 ont même loi.

Corrigé – *Soit $\varphi\in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En utilisant la définition de P_X et P_Y et le fait que $P_X=P_Y$, on obtient*

$$\int_\Omega\varphi(X_1)dP=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x_1)dP_X(x_1,x_2)=\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x_1)dP_Y(x_1,x_2)=\int_\Omega\varphi(Y_1)dP.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi dP_{X_1}=\int_\Omega\varphi(X_1)dP \text{ et } \int_{\mathbb{R}}\varphi dP_{Y_1}=\int_\Omega\varphi(Y_1)dP,$$

on en déduit que $P_{X_1}=P_{Y_1}$.

2. On suppose que X_1 et X_2 sont des v.a.r. indépendantes. Montrer que Y_1 et Y_2 sont aussi des v.a.r. indépendantes.

Corrigé – *Comme* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes, on a* $P_X = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$ *(théorème 9.28). Comme* $P_X = P_Y$*, on a aussi, d'après la première question,* $P_{X_1} = P_{Y_1}$ *et de même* $P_{X_2} = P_{Y_2}$*. On en déduit que* $P_Y = P_{Y_1} \otimes P_{Y_2}$*, ce qui prouve que* Y_1 *et* Y_2 *sont des v.a.r. indépendantes (théorème 9.28).*

Exercice 9.14 (Mesure produit et différence de deux v.a.r.i.i.d.) 1. Soit m une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$. On suppose que $m(\mathbb{R}) > 0$. Soit $\eta > 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $m(]a-\eta, a+\eta[) > 0$. En déduire que

$$m \otimes m(A) = \int m(]y-2\eta, y+2\eta[)dm(y) \geq m(]a-\eta, a+\eta[)^2 > 0,$$

avec $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x-y| < 2\eta\}$. (On rappelle que $m \otimes m$ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.)

Corrigé – *Pour* $i \in \mathbb{Z}$*, on pose* $a_i = i\eta$*, de sorte que* $\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}]a_i - \eta, a_i + \eta[$*. Par σ-sous additivité de m, on a donc* $0 < m(\mathbb{R}) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} m(]a_i - \eta, a_i + \eta[)$*. Il existe donc* $i \in \mathbb{Z}$ *t.q.* $m(]a_i - \eta, a_i + \eta[) > 0$.

On remarque d'abord que A *est un borélien de* $\mathbb{R}^2$ *car* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*. Par définition de* $m \otimes m$*, on a*

$$m \otimes m(A) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y) dm(x) \right) dm(y) = \int m(]y-2\eta, y+2\eta[)dm(y).$$

pour $y \in]a-\eta, a+\eta[$*, on a* $]a-\eta, a+\eta[\subset [y-2\eta, y+2\eta[$ *et donc* $m(]y-2\eta, y+2\eta[) \geq m(]a-\eta, a+\eta[)$*. On a donc*

$$\int m(]y-2\eta, y+2\eta[)dm(y) \geq \int_{]a-\eta,a+\eta[} m(]a-\eta, a+\eta[)dm$$
$$= m(]a-\eta, a+\eta[)^2 > 0.$$

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes et de même loi. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$P(|X-Y| < \varepsilon) = P(\{\omega \in \Omega, |X(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\}) > 0.$$

[On pourra utiliser la première question avec $m = P_X = P_Y$.]

Corrigé – *On pose* $B = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } |X(\omega) - Y(\omega)| < \varepsilon\}$ *et* $\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x-y| < \varepsilon\}$*. On note* $P_{(X,Y)}$ *la loi du v.a. (de dimension 2)* (X,Y)*. On a*

$$P(|X-Y| < \varepsilon) = \int_\Omega 1_B dP = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\bar{B}} dP_{(X,Y)}.$$

Comme X *et* Y *sont indépendantes, on a, en notant m la loi commune a* X *et* Y*,* $P_{(X,Y)} = m \otimes m$*. On a donc (avec la première question avec* $2\eta = \varepsilon$ *et en remarquant que* $m(\mathbb{R}) = 1 > 0$*),*

$$P(|X-Y| < \varepsilon) = m \otimes m(\bar{B}) > 0.$$

Exercice 9.15 (Les pièges de l'indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X a pour loi la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $e(x) = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}$ et $r(x) = x - e(x)$.

Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la v.a.r. Z par la formule $\mathrm{Z} = r(\mathrm{X} + f(\mathrm{Y}))$ (c'est-à-dire $\mathrm{Z}(\omega) = r(\mathrm{X}(\omega) + f(\mathrm{Y}(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$).

1. Montrer que Z a pour loi la loi uniforme sur $[0,1]$. [Soit φ une fonction borélienne bornée de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$. On note $\bar{\varphi}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant φ par périodicité (de période 1), c'est-à-dire $\bar{\varphi}(x+n) = \varphi(x)$ si $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pourra commencer par montrer que $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z})) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \bar{\varphi}(x + f(y))\, dx\, dm(y)$, où m est la loi de Y, c'est-à-dire $m = \mathrm{P_Y}$.]

   Corrigé – *La fonction r est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par composition de fonctions mesurables on en déduit donc que Z est bien une v.a.r.. On remarque aussi que Z ne prend ses valeurs que dans l'intervalle $[0,1[$.*

   Soit φ une fonction borélienne bornée de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$ et $\bar{\varphi}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant φ par périodicité de période 1. Comme les v.a.r. X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est le produit tensoriel des lois de X et Y, on a donc

   $$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z})) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \varphi(r(x + f(y))) dx dm(y).$$

   Comme $z = r(z) + n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, on a $\bar{\varphi}(z) = \varphi(r(z))$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et donc

   $$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z})) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \bar{\varphi}(x + f(y)) dx dm(y).$$

   Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on utilise maintenant le changement de variable $\xi = x + f(y)$ dans l'intégrale par rapport à x. Puis, on utilise la périodicité de $\bar{\varphi}$. On obtient ainsi

   $$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z})) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{f(y)}^{f(y)+1} \bar{\varphi}(\xi) d\xi \Big) dm(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) d\xi \Big) dm(y)$$
   $$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \Big) dm(y).$$

   Comme m est une probabilité, on a donc finalement

   $$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z})) = \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi.$$

   Cette dernière égalité est valable pour toute fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle que Z prend ses valeurs dans $[0,1[$), elle donne bien que Z a pour loi la loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Montrer que Z et Y sont indépendantes. [Soit φ une fonction borélienne bornée de $[0,1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pourra s'inspirer de la question précédente pour exprimer $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}))$.]

Corrigé – *Pour montrer l'indépendance de* Z *et* Y*, il suffit de montrer que la loi du couple* (Z, Y) *est le produit tensoriel des lois de* Z *et* Y.

Soit φ *une fonction borélienne bornée de* $[0,1[\times\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a, grâce à l'indépendance de* X *et* Y,

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z},\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \varphi(r(x+f(y)),y)dxdm(y).$$

Ici aussi, on prolonge φ *par périodicité (en* x*) de période* 1*, c'est-à-dire que l'on pose* $\bar\varphi(x+n,y)=\varphi(x,y)$ *si* $x\in[0,1[$, $n\in\mathbb{Z}$ *et* $y\in\mathbb{R}$. *On obtient*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z},\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 \bar\varphi(x+f(y),y)dxdm(y).$$

A y *fixé, on utilise le changement de variable* $\xi = x+f(y)$. *Puis on utilise la périodicité de* $\bar\varphi$. *On a alors*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z},\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{f(y)}^{f(y)+1}\bar\varphi(\xi,y)d\xi\Big)dm(y) = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^1\bar\varphi(\xi,y)d\xi\Big)dm(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_0^1\varphi(\xi,y)d\xi dm(y).$$

Finalement, pour tout fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *on a* $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Z},\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^1\varphi(\xi,y)d\xi dm(y)$. *Ceci montre bien que la loi du couple* (Z, Y) *est le produit tensoriel de la loi uniforme avec la loi de* Y *et donc de la loi de* Z *avec la loi de* Y. *les v.a.r.* Z *et* Y *sont donc indépendantes.*

3. Montrer, en donnant un exemple, que Z et Y peuvent ne pas être indépendantes si on retire l'hypothèse que X a pour loi la loi uniforme sur $[0,1]$.

Corrigé – *On suppose, par exemple, que* Y *a pour loi la loi uniforme sur* $[0,1]$, *que* $f(s)=s$ *pour tout* $s\in\mathbb{R}$ *et que* X *ne prend que des valeurs entières. On a alors* $\mathrm{Z}=r(\mathrm{X}+f(\mathrm{Y}))=r(\mathrm{Y})=\mathrm{Y}$ *p.s.. On en déduit que* Z *et* Y *ne sont pas indépendantes. En effet, on a, par exemple,*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Z}\in[0,1/2[\ \textit{et}\ \mathrm{Y}\in[0,1/2]\}) = 1/2 \neq 1/4 = \mathrm{P}(\{\mathrm{Z}\in[0,1/2]\})\mathrm{P}(\{\mathrm{Y}\in[0,1/2]\}).$$

Exercice 9.16 (Somme de deux mélanges gaussiens)

Soient $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé.

On se donne 4 v.a.r. indépendantes Y_1, Y_2, Z_1, Z_2. On suppose que Z_1 et Z_2 sont des v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et que Y_1 et Y_2 sont des v.a.r. à valeurs positives et à densité. On note g_i, $i=1,2$, la densité de Y_i.

On pose $\mathrm{X}_1=\mathrm{Y}_1\mathrm{Z}_1$, $\mathrm{X}_2=\mathrm{Y}_2\mathrm{Z}_2$ et $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2$. Le but de l'exercice est démontrer que X = YZ où Y est une v.a.r. à valeurs positives et à densité, Z est une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et Z, Y sont indépendantes.

On pose $\mathrm{Y}=\sqrt{\mathrm{Y}^1+\mathrm{Y}^2}$.

Soit $\omega \in \Omega$. Si $Y(\omega) \neq 0$, on note $\phi(\omega)$ l'unique point de $[0, \pi/2]$ t.q. $Y_1(\omega) = Y(\omega)\cos(\phi(\omega))$ et $Y_2(\omega) = Y(\omega)\sin(\phi(\omega))$ et on pose $Z(\omega) = X(\omega)/Y(\omega)$. Si $Y(\omega) = 0$, on choisit $\phi(\omega) = 0$ et $Z(\omega) = 0$.

1. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
2. Montrer que Y et Z sont des v.a.r..
3. Montrer que la loi de Z est la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
4. Montrer que Y est une v.a.r. à valeurs positives et à densité. Calculer sa densité en fonction de g_1 et g_2.
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.

9.4.3 Vecteurs gaussiens

Exercice 9.17 (Loi du couple (X,X) si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$)

Pour tout A borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x,x)^t \in A\}$.

1. Montrer que, pour tout A un borélien de $\mathbb{R}^2$, $T(A)$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

   Corrigé – *L'application $x \mapsto (x,x)^t$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, elle donc borélienne. Comme $T(A)$ est l'image réciproque de A par cette application, on a bien $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Pour tout A borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m (définie ci-dessus) est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dm(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)dx.$$

   Corrigé – *Pour montrer que m est une mesure, on remarque que $m(\emptyset) = 0$ (car $T(\emptyset) = \emptyset$) et m est σ-additive (ce qui découle simplement du fait que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow T(A) \cap T(B) = \emptyset$).*

   On montre ensuite que $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dm(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)dx$ pour $\varphi = 1_A$, avec $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (c'est une conséquence immédiate de la définition de m), puis pour φ étagée positive (par linéarité), puis pour φ borélienne positive (car une telle fonction est limite croissante de fonctions étagées positives).

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(a) On pose $Z = (X, X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).

Corrigé – *Soit $a = (a_1, a_2)^t \in \mathbb{R}^2$. On pose $\alpha = a_1 + a_2$, de sorte que $a \cdot Z = \alpha X$.*

Si $\alpha = 0$, on a $P_{a \cdot Z} = P_0 = \mathcal{N}(0, 0)$ (qui est bien une loi gaussienne).

Si $\alpha \neq 0$. Soit φ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}$ ans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_\Omega \varphi(a \cdot Z) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\alpha x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\alpha|} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy.$$

Ce qui prouve que $a \cdot Z \sim \mathcal{N}(0, \alpha^2)$. Le v.a. Z est donc bien un vecteur gaussien.

(b) Montrer la loi du v.a. $(X, X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Corrigé – *Soit φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On a :*

$$\int_\Omega \varphi(X, X) dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On en déduit que la loi du v.a. $(X, X)^t$ est fm avec f borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $f(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Comme m est étrangère à λ_2, loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à λ_2 (qui est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

N.B. La loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir la proposition 9.33) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 9.18 (Sur le minimum de deux v.a.r. de loi exponentielle) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé, X_1 une v.a.r. dont la loi est la loi exponentielle de paramètre 1 et X_2 une v.a.r. dont la loi est la loi exponentielle de paramètre 2 (soit $\lambda > 0$, on rappelle que la loi exponentielle de paramètre λ est la loi de densité f_λ avec $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $f_\lambda(x) = 0$ pour $x < 0$). On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = X_1(\omega) \text{ et } N(\omega) = 1, \text{ si } X_1(\omega) \leq X_2(\omega),$$
$$Z(\omega) = X_2(\omega) \text{ et } N(\omega) = 2, \text{ si } X_2(\omega) < X_1(\omega).$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{Z \geq x\} = \{X_1 \geq x\} \cap \{X_2 \geq x\}$. Calculer la fonction de répartition de la loi de Z et en déduire la loi de Z.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

Soit $\omega \in \Omega$. On $Z(\omega) = \min\{X_1(\omega), X_2(\omega)\}$ et donc $Z(\omega) \geq x$ si et seulement si $X_1(\omega) \geq x$ et $X_2(\omega) \geq x$. Ceci donne bien

$$\{Z \geq x\} = \{X_1 \geq x\} \cap \{X_2 \geq x\}.$$

Comme X_1 *et* X_2 *sont indépendantes, on a donc*

$$P(\{Z \geq x\}) = P(\{X_1 \geq x\})P(\{X_2 \geq x\}). \quad (9.7)$$

Si Y *est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre* λ *(*$\lambda > 0$*). On a alors* $P(\{Y \geq x\}) = \int_{x^+}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x^+}$.

La formule (9.7) donne donc $P(\{Z \geq x\}) = e^{-3x^+}$. *La fonction de répartition de* Z *est donc la fonction* $x \mapsto 1 - e^{-3x^+}$. *Ceci prouve que* Z *a pour loi la loi exponentielle de paramètre* 3*. (On rappelle que la fonction de répartition d'une v.a.r. détermine entièrement la loi de cette v.a.r..)*

2. Montrer que $P(\{X_1 = X_2\}) = 0$. En déduire que presque sûrement il existe un unique i t.q. $X_i = Z$.

Corrigé – *Comme* X_1 *et* X_2 *sont indépendantes, on* $P_{(X_1,X_2)} = P_{X_1} \otimes P_{X_2}$. *On a donc, avec le théorème de Fubini,*

$$P(\{X_1 = X_2\}) = \int_\Omega 1_{\{X_1 = X_2\}} dP = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=y\}} f_1(x) f_2(y) d(x,y)$$
$$= \int_0^\infty e^{-x} (\int_x^x 2e^{-2y} dy) dx = 0.$$

En dehors de l'ensemble $\{X_1 = X_2\}$ *(qui de probabilité nulle) il existe un seul i pour lequel* $Z = \min\{X_1, X_2\}$. *On a donc bien presque sûrement un unique* i *t.q.* $X_i = Z$.

3. Donner la loi de N.

Corrigé – *la v.a.r.* N *ne prend que deux valeurs,* 0 *et* 1*. On calcule* $P(\{N = 1\})$ *et* $P(\{N = 2\})$*. On a*

$$P(\{N = 1\}) = P(\{X_1 \leq X_2\}) = \int_\Omega 1_{\{X_1 \leq X_2\}} dP = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\leq y\}} f_1(x) f_2(y) d(x,y)$$
$$= \int_0^\infty e^{-x} (\int_x^{+\infty} 2e^{-2y} dy) dx = \int_0^\infty e^{-3x} dx = \frac{1}{3}.$$

On a donc $P(\{N = 2\}) = \frac{2}{3}$ *et la loi de* N *est* $P_N = \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{2}{3}\delta_2$.

4. Les v.a.r. Z et N sont elles indépendantes (justifier la réponse) ?

Corrigé – *Soit* φ *et* ψ *deux fonctions boréliennes bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On compare* $E(\varphi(N)\psi(Z))$ *et* $E(\varphi(N))E(\psi(Z))$.

On a

$$\begin{aligned}
E(\varphi(N)\psi(Z)) &= \int_\Omega \varphi(1)\psi(X_1)1_{\{X_1\leq X_2\}}dP + \int_\Omega \varphi(2)\psi(X_2)1_{\{X_1>X_2\}}dP \\
&= \varphi(1)\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\leq y\}}\psi(x)f_1(x)f_2(y)d(x,y) \\
&\quad +\varphi(2)\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x> y\}}\psi(y)f_1(x)f_2(y)d(x,y) \\
&= \varphi(1)\int_0^\infty e^{-x}\psi(x)(\int_x^{+\infty} 2e^{-2y}dy)dx \\
&\quad +\varphi(2)\int_0^\infty 2e^{-2y}\psi(y)(\int_y^{+\infty} e^{-x}dy)dx \\
&= (\varphi(1)+2\varphi(2))\int_0^\infty e^{-3x}\psi(x)dx.
\end{aligned}$$

En prenant $\varphi = 1$ *dans la formule précédente on a* $E(\psi(Z)) = 3\int_0^\infty e^{-3x}\psi(x)dx$.

Comme $E(\varphi(N)) = \varphi(1)P(\{N=1\})+\varphi(2)P(\{N=2\}) = \frac{1}{3}(\varphi(1)+2\varphi(2))$ *on en déduit que* $E(\varphi(N)\psi(Z)) = E(\varphi(N))E(\psi(Z))$.

Les v.a.r. Z *et* N *sont donc indépendantes.*

Chapitre 10

Transformation de Fourier

10.1 Introduction et notations

La notion de série de Fourier permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), et donc aussi les fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^N$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les deux notions ont une multitude d'applications en physique et en mathématiques. La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal, en théorie des probabilités et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, on considérera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et on notera $d\lambda_N(x) = dx$. Soit $N \geq 1$, les espaces $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 4.10 et les espaces $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ ont été définis dans la section 6.2. On rappelle aussi que si f est une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$, la fonction f est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables (chaque ensemble, $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant muni de sa tribu borélienne). On peut, bien sûr, aussi définir les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.1 (Espaces $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$)

Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ *et* f *une fonction mesurable de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{C}$ *(c'est-à-dire* $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$*).*

On dit que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ *si* $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ *et on définit* $\|f\|_p$ *par* $\|f\|_p = \||f|\|_p$ *où* $\||f|\|_p$ *est la norme de* $|f|$ *dans* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ *(vue au chapitre 6).*

L'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ *est l'espace* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ *quotienté par le relation d'équivalence "= p.p.". C'est un espace de Banach (complexe), c'est-à-dire un e.v.n. (sur* $\mathbb{C}$*) complet.*

Remarque 10.2 Soit $N \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

10.2 Transformation de Fourier dans L^1

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t, c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$. Dans ce chapitre, On note aussi $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ou parfois simplement $L^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, pour $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.3 (Transformée de Fourier dans L^1) *Soit* $N \geq 1$ *et* $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$*. Pour* $t \in \mathbb{R}^N$*, l'application* $x \mapsto e^{-ix \cdot t} f(x)$ *(définie de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{C}$*) appartient à* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$*. On définit alors* $\widehat{f}(t)$ *par :*

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ix \cdot t} dx.$$

La fonction $\widehat{f}$ *(définie de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{C}$*) s'appelle transformée de Fourier de* f*, qu'on notera également* $\mathcal{F}(f)$*.*

On note $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. } g(t) \to 0 \text{ quand } |t| \to +\infty\}$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_u = \max_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition 10.4 (Linéarité de la transformée de Fourier) *Soit* $N \geq 1$*. L'application* $\mathcal{F}$ *qui à* f *(appartenant à* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$*) associe sa transformée de Fourier est linéaire continue de* $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ *dans* $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$*.*

DÉMONSTRATION – Le théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t} f(x)$ entraîne immédiatement que $\widehat{f}$ est continue. Montrons que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cas $N = 1$. On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t})t} f(x)dx,$$

et donc, avec le changement de variable $x - \frac{\pi}{t} = y$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt} f(y + \frac{\pi}{t})dy.$$

On en déduit que

$$2\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt}(f(x) - f(x + \frac{\pi}{t}))dx$$

et donc que $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.21) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

Cas $N > 1$. On reprend la même méthode. Pour $t \neq 0$, $t = (t_1, \ldots, t_N)^t$, il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1,\ldots,N} |t_k| = \|t\|_\infty$.

En notant e_j le j–ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on a alors, comme $e^{i\pi} = -1$ et $e_j \cdot t = t_j$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t_j}e_j)\cdot t} f(x)dx,$$

et donc, avec le changement de variable $x - \frac{\pi}{t_j}e_j = y$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t} f(y + \frac{\pi}{t_j}e_j)dy = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t} f(y + \frac{\varepsilon\pi}{\|t\|_\infty}e_j)dy,$$

où $\varepsilon = \text{sign}(t_j)$ (donc $\varepsilon = \pm 1$). Ceci donne

$$2|\widehat{f}(t)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\varepsilon\pi}{\|t\|_\infty}e_j)\|_1.$$

On en déduit que pour tout $t \neq 0$,

$$|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2} \max_{j=1,\ldots,N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{\|t\|_\infty}e_j)\|_1 + \|f(\cdot) - f(\cdot - \frac{\pi}{\|t\|_\infty}e_j)\|_1).$$

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 8.5) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

■

La transformée de Fourier a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition suivante.

Proposition 10.5 (Transformée de Fourier d'un produit) *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}\widehat{g}$.*

Démonstration – Par la proposition 7.22, on a $f*g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f*g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f*g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\cdot t}dx =$$

$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}dy \right) dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini (théorème 7.12) à la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}$$

(qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ car son module est la fonction $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^{2N}$ est égale à $\|f\|_1\|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f*g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx \right) g(y)e^{-iy\cdot t}dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx = \int f(z)e^{-iz\cdot t}dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f*g}(t) = \widehat{f}(t) \int g(y)e^{-iy\cdot t}dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)\widehat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

10.2.2 Théorème d'inversion

Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

La transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c'est-à-dire si $\widehat{f} = \widehat{g}$, a-t-on $f = g$ p.p.) ?

Peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier ?

Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème d'inversion de Fourier :

Théorème 10.6 (Inversion partielle de la transformée de Fourier) *Soit* $N \geq 1$ *et* $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ *t.q.* $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. *On a alors* $f = \widehat{\widehat{f}}(-.)$ *p.p., c'est-à-dire :*

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \widehat{f}(x)e^{ixt}dx, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

La démonstration fait l'objet de l'exercice 10.1.

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application $\mathcal{F}$, qui fournit donc une réponse positive à la première question. En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{f} = \widehat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion, on a donc $f = g$ p.p..

Ce théorème apporte aussi une réponse partielle à la deuxième : on peut calculer f à partir de $\widehat{f}$ dès que $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. Il faut remarquer à ce propos que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier (voir exercice 10.2).

10.2.3 Régularité et décroissance à l'infini

Proposition 10.7 (Différentiabilité, dimension 1)

1. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ t.q. $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où f' est la dérivée de f). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f')(t) = (it)\mathcal{F}(f)(t)$.*
2. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(\cdot)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(\cdot)f$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $xf(x)$). Alors, $\mathcal{F}(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)'(t) = \mathcal{F}((-i\cdot)f)(t)$.*

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item consiste à faire une intégration par parties sur l'intervalle $[-n, n]$ puis à faire tendre n vers l'infini (en remarquant que $f(\pm n) \to 0$, quand $n \to +\infty$, voir l'exercice 5.6).

Le deuxième item est une conséquence immédiate du théorème 4.53 (théorème de dérivation sous le signe $\int$). ∎

La transformation de Fourier transforme donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i\cdot)$, et la multiplication par $(-i\cdot)$ en dérivation. Cette propriété est utilisée, par exemple, pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).

Cette propriété se généralise au cas de la dimension N et pour un ordre k de dérivation quelconque. On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. On définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_N$ et

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\Big) f$$

lorsque cette dérivée existe.

Proposition 10.8 (Différentiabilité, dimension N)

1. *Soit $N \geq 1$ et $k \geq 1$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1}(it_2)^{\alpha_2} \ldots (it_N)^{\alpha_N}$.*
2. *Soit f t.q. $(.)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-i\cdot)^\alpha f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$.*

La proposition 10.8 montre que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini (plus f est dérivable, plus $\widehat{f}$ décroît vite à l'infini), et réciproquement. Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide (souvent appelé espace de Schwartz),

Définition 10.9 (Espace de Schwartz) *Soit* $N \geq 1$, *on appelle espace de Schwartz, noté* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ *ou* $\mathcal{S}_N$ *ou même* $\mathcal{S}$, *l'espace des fonctions dites à décroissance rapide, défini par :*

$$\mathcal{S}_N = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On va montrer l'invariance par transformation de Fourier de cet espace. On commence par remarquer que $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{S}_N$, en prenant des choix convenables de α et β dans la définition de $\mathcal{S}_N$, on remarque qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $(1 + |x|^{N+1})|f(x)| \leq C$. On en déduit que $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Plus généralement, si $f \in \mathcal{S}_N$, on remarque que $(\cdot)^\beta D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $a, \beta \in \mathbb{R}^N$. On obtient alors la proposition 10.10.

Proposition 10.10 (Transformée de Fourier et dérivation dans $\mathcal{S}$) *Soit* $N \geq 1$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ *on a :*

$$\mathcal{F}\Big(D^\alpha((-i\cdot)^\beta f)\Big) = (i\cdot)^\alpha \widehat{(-i\cdot)^\beta f} = (i\cdot)^\alpha D^\beta \widehat{f}, \tag{10.1}$$

$$\mathcal{F}[(-i\cdot)^\alpha D^\beta f] = D^\alpha \widehat{D^\beta f} = D^\alpha[(i\cdot)^\beta \widehat{f}]. \tag{10.2}$$

La démonstration est une adaptation simple de celle de la proposition 10.8.

La proposition 10.10 et le théorème 10.6 nous permettent alors de remarquer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$.

Proposition 10.11 (Transformée de Fourier dans S_N) *Soit* $N \geq 1$. *L'application* $\mathcal{F}$ *qui à* f *associe sa transformée de Fourier est une bijection de* $\mathcal{S}_N$ *dans* $\mathcal{S}_N$. *De plus, pour tout* $f \in \mathcal{S}_N$, *on a* $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$.

DÉMONSTRATION – En utilisant la proposition 10.10, on montre que $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$. Le théorème d'inversion (théorème 10.6) donne alors que f est injective et que $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ pour tout $f \in \mathcal{S}_N$. De cette dernière formule, on déduit que $\mathcal{F}$ est surjective (et donc bijective) de $\mathcal{S}_N$ dans $\mathcal{S}_N$. ■

10.3 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Il est facile d'étendre la définition de la transformation de Fourier à une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Plus précisément, si m est une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ($\mathrm{N} \geq 1$), la définition 10.12 définit la fonction $\widehat{m}$ (continue et bornée de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$) et, si $m = f\lambda_{\mathrm{N}}$, avec $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ (c'est-à-dire que m est la mesure signée de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$), on a $\widehat{m}(t) = \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

De même, si m est une mesure à valeurs complexes, on a alors $m = m_1 + im_2$, où m_1 et m_2 sont des mesures signées (ce sont les parties réelle et imaginaire de m). On peut alors définir $\widehat{m}$. C'est la fonction continue bornée de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $\widehat{m}(t) = \widehat{m}_1(t) + i\widehat{m}_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Définition 10.12 (Transformée de Fourier d'une mesure signée) *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *Soit* $t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, *l'application* $x \mapsto e^{-ix\cdot t}$ *(définie de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *dans* $\mathbb{C}$*) appartient à* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), m)$ *(car elle est continue, donc borélienne, et bornée). On définit alors* $\widehat{m}(t)$ *par :*

$$\widehat{m}(t) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int e^{-ix\cdot t} dm(x).$$

La fonction $\widehat{m}$ *(définie de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *dans* $\mathbb{C}$*) s'appelle transformée de Fourier de* m.

On rappelle que

$$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \sup_{t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} |g(t)| < \infty\}$$

et que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme.

Proposition 10.13 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$. *Soit* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. *La fonction* $\widehat{m}$ *appartient à* $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $\widehat{m}$ est bornée est simple. On utilise la décomposition de Hahn (proposition 2.33), c'est-à-dire le fait que $m = m^+ - m^-$, où $m^{\pm}$ sont deux mesure finies étrangères. On remarque alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a $|\widehat{m}(t)| \leq |m|(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) < +\infty$, où $|m| = m^+ + m^-$.

La fait que $\widehat{m}$ est continue est une conséquence immédiate du théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t}$ (et avec les mesures finies $m^{\pm}$). ∎

Comme pour la transformation de Fourier dans L^1, on peut se demander si $\widehat{m}$ caractérise la mesure signée m et si on peut retrouver m à partir de $\widehat{m}$. La proposition suivante s'intéresse à ces deux questions.

Proposition 10.14 *Soit* $N \geq 1$.

1. *Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$. alors, $m = \mu$.*
2. *Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$. On suppose que $\widehat{m} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Alors, $m = f\lambda_N$ avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$ p.p. (c'est-à-dire p.p. pour la mesure λ_N).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 10.6.

Nous avons vu dans la section précédente qu'il y avait un lien entre les propriétés de décroissance de f à l'infini et les propriétés de régularité de $\widehat{f}$ (propositions 10.7, 10.8 et 10.10). Dans le même esprit, on peut remarquer que, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, borélienne et intégrable, la continuité de $\widehat{f}$ en 0 donne une précision sur la convergence vers 0, quand $a \to +\infty$, de $\int_{]-a,a[^c} |f(x)|dx$. Nous donnons dans le lemme 10.15 cette précision dans le cas plus général d'une mesure (positive) finie. Ce lemme permet de démontrer le théorème 10.22 (lui-même utile pour démontrer le théorème central limite, théorème 10.24).

Lemme 10.15 *Soit m une mesure (positive) finie (et non nulle) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose* $M = m(\mathbb{R})$ *et, pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t)}{2}.$$

(La fonction ψ prend donc ses valeurs dans $\mathbb{R}$, et même dans $[-M, M]$, *est continue en* 0 *et* $\psi(0) = M$.*) On a alors, pour tout $a > 0$,*

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq a \int_0^{2/a} (M - \psi(t))dt.$$

DÉMONSTRATION – On peut supposer $M = 1$ (il suffit, si $M \neq 1$, de remplacer la mesure m par la mesure m/M). On remarque tout d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (e^{-ixt} + e^{ixt})dm(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

et donc

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

On en déduit bien que $\psi(t) \in \mathbb{R}$, $|\psi(t)| \leq 1$ et que $\psi(0) = 1$.

Soit $a > 0$, on pose $\varepsilon = 2/a$ et $T = \int_0^\varepsilon (1-\psi(t))dt$. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) on obtient

$$T = \int_0^\varepsilon \Big(\int_{\mathbb{R}} (1-\cos(xt))dm(x)\Big)dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^\varepsilon (1-\cos(xt))dt\Big)dm(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x})dm(x).$$

Mais, $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) = \varepsilon(1 - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}) \geq \varepsilon/2$ si $|\varepsilon x| \geq 2$, ce qui est vrai si $|x| \geq a$ car $\varepsilon a = 2$. On a donc (comme $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) \geq 0$ pour tout x)

$$T = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x})dm(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} m(\{x, |x| \geq a\}).$$

On obtient donc, finalement,

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq \frac{2T}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (1-\psi(t))dt = a\int_0^{2/a} (1-\psi(t))dt.$$

Ce qui est le résultat annoncé. ■

10.4 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On rappelle que l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert et que le produit scalaire sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_N(t)$) :

$$(f \mid g)_2 = \int f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Il est clair que la définition de $\widehat{f}$ qu'on a donnée pour $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ne s'applique pas pour un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on va utiliser la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut montrer que $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, comme on a montré que $\mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et que c'est une isométrie pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 10.16 *Soit* $N \geq 1$ *et* $f, g \in \mathcal{S}_N$ *(on a donc, en particulier,* $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$*). Alors* $\widehat{f}$ *et* $\widehat{g}$ *sont des éléments de* $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ *et* $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$. *En particulier,* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

DÉMONSTRATION – Soit $f, g \in \mathcal{S}_N$. On a alors aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}_N$. Comme $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a donc $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On va montrer que $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$.

Comme $f, \widehat{f} \in \mathcal{S}_N \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.6) pour transformer le produit scalaire de f avec g.

Le théorème d'inversion donne $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f \mid g)_2 = \int \widehat{\widehat{f}}(-t)\bar{g}(t)dt = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t}\widehat{f}(x)dx \right) \bar{g}(t)dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini (théorème 7.12). Il s'applique car $\widehat{f}, \bar{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On obtient :

$$(f \mid g)_2 = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t}\bar{g}(t)dt \right) \widehat{f}(x)dx = \int \bar{\widehat{g}}(t)\widehat{f}(t)dt = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2,$$

ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 10.16 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 10.17 (Transformée de Fourier dans L^2, Plancherel) *Soit $N \geq 1$. Il existe une application linéaire continue $\tilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ t.q. :*

1. *Si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \widehat{f}$ p.p..*
2. *Pour tout $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $(f \mid g)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2$.*
3. *Pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on a $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$.*
4. *$\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.*

Pour $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f. Compte tenu du premier item, on notera en général, $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$) ou si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (et alors $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$).

DÉMONSTRATION – L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est définie sur $\mathcal{S}_N$, qui est un sous espace de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et prend ses valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \subset L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, et que $\mathcal{S}_N$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ (car $\mathcal{S}_N \supset C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ et $C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, voir le théorème 8.14), on en déduit que cette application se prolonge (de manière unique) en une application, notée $\tilde{\mathcal{F}}$, linéaire continue de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

Plus précisément, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne alors que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Elle converge donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On aimerait définir $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ comme étant la limite (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) de la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f. Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans

$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ vers f, on a $\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a ainsi défini $\tilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

La linéarité de $\tilde{\mathcal{F}}$ découle immédiatement du fait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire de $\mathcal{S}_N$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Enfin, soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Ce qui prouve la continuité de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

1. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. En reprenant la démonstration du théorème 8.14, il est facile de voir qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car dans la démonstration du théorème 8.14, la suite construite pour converger vers f dans L^p ne dépend pas de p). On en déduit que $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p. quand $n \to +\infty$. On en déduit bien que $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p..
2. Soit $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. La proposition 10.16 donne $(\widehat{f_n} \mid \widehat{g_n})_2 = (f_n \mid g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient bien $(\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2 = (f \mid g)_2$.
3. Soit $f \in L^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_N$ t.q. $f_n \to f$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne aussi $\widehat{f_n}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et donc $\widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$. La proposition 10.11 donne $f_n = \widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ p.p..
4. L'injectivité de $\tilde{\mathcal{F}}$ (de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) découle du fait que $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est linéaire. La surjectivité est une conséquence immédiate du troisième item.

■

Remarque 10.18

Voici deux remarques à propos de la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$.

1. Pour définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on aurait pu utiliser la densité de $C^\infty_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et ne pas introduire l'espace $\mathcal{S}_N$ (voir l'exercice 10.5 pour le cas $N = 1$).
2. Si $f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ mais $f \notin L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On ne peut pas utiliser la formule de la définition 10.3 pour calculer $\tilde{\mathcal{F}}(f)$, mais on peut utiliser cette formule avec une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et convergeant vers f dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Par exemple,

on peut prendre $f_n = f 1_{B_n}$, où B_n est la boule de $\mathbb{R}^N$ de centre 0 et de rayon n. On a alors $\hat{f}_n \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, quand $n \to +\infty$, et $\hat{f}_n$ se calcule avec la formule de la définition 10.3.

10.5 Résolution d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles

On donne ici deux exemples simples d'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution d'une équation différentielle (souvent notée EDO pour Équation Différentielle Ordinaire) ou d'une équation aux dérivées partielles (souvent notée EDP pour Équation aux Dérivées Partielles).

Soit $N \geq 0$, $(a_0, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}_1$ (donnés). On cherche $f \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Si $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie (10.3), elle vérifie nécessairement, par transformation de Fourier :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(t) + \ldots + a_1 \widehat{f'}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

c'est-à-dire :

$$a_N (it)^N \widehat{f}(t) + \ldots + a_1 it \widehat{f}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En posant $p(t) = a_N (it)^N + \ldots + a_1 it + a_0$ et en supposant que p ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\widehat{f}(t) = \frac{\widehat{g}(t)}{p(t)}.$$

Comme $g \in \mathcal{S}_1$ et que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $\frac{\widehat{g}}{p} \in \mathcal{S}_1$. En utilisant maintenant le théorème d'inversion, ou la proposition 10.11, on obtient :

$$f(t) = \widehat{\widehat{f}}(-t) = \widehat{\left(\frac{\widehat{g}}{p}\right)}(-t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

On a donc montré que f est nécessairement donnée par (10.4). Réciproquement, il est facile de voir que la fonction donnée par (10.4) est solution de (10.3), c'est donc l'unique solution dans $\mathcal{S}_1$ de (10.3) (en supposant que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$).

Soit $N \geq 1$, on considère une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment dérivable), dont on peut donc définir le Laplacien $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

On cherche à déterminer les fonctions harmoniques de $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire les fonctions $u \in \mathcal{S}_N$ telles que :

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.5}$$

Cherchons $u \in \mathcal{S}_N$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}_N$) solution de (10.5). On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), c'est-à-dire $|t|^2\widehat{u}(t) = 0$ et donc $\widehat{u}(t) = 0$, pour tout $t \neq 0$. Comme $\widehat{u}$ est continue, ceci entraîne que $\widehat{u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), et donc $u = 0$. La fonction identiquement égale à 0 est donc la seule solution de (10.5) dans $\mathcal{S}_N$.

On peut effectuer un raisonnement analogue si on cherche u de classe C^2 et dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut aussi le faire si u est seulement dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$, il faut alors convenablement définir Δu). On obtient encore que la seule solution de (10.5) est $u = 0$.

Par contre, ce résultat d'unicité n'est plus vrai si on ne demande pas à u d'être de carré intégrable. En effet, les fonctions constantes sont toutes solutions de (10.5) (et on peut montrer que ce sont les seules fonctions, de classe C^2et bornées, solutions de (10.5), c'est le théorème de Liouville en analyse complexe).

10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

La transformée de Fourier a son équivalent en probabilités : il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire (rien à voir avec la fonction caractéristique d'un ensemble !).

Définition 10.19 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iX\cdot u}\,dP = E(e^{iX\cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX\cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. En notant p_X la loi de X, on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p_X}(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v..a..

Proposition 10.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *La fonction caractéristique de* X *vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.
2. *La loi de* X *est entièrement déterminée par* φ_X *(c'est-à-dire que si* Y *est un autre v.a. de dimension* d *et que* $\varphi_X = \varphi_Y$, *on a nécessairement* $p_X = p_Y$*).*

3. *Si* $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$*, la loi de* X *a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*, c'est-à-dire* $p_X = f\lambda_d$*, et :*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot u} \varphi_X(u)du, \ \ \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p_X}(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.13 (qui donne $\widehat{p_X} \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).

Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.14.

Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.14 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \widehat{\widehat{p_X}}(-\cdot)$, ce qui donne λ_d-p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t}\widehat{p_X}(t)dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot t}\varphi_X(t)dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). On donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 10.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $X_1, \ldots, X_d$ d *v.a.r.. Alors, les v.a.r* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes si et seulement si on a*

$$\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(u_j)$$

pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$*, où* X *est le v.a. de composantes* $X_1, \ldots, X_d$*.*

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 9.28 les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes si et seulement $p_X = p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}$. Par la proposition 10.14, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix\cdot u} = \prod_{j=1}^d e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques. Nous donnons ce lien dans le deuxième item du théorème 10.22 (dû à Paul Lévy).

Théorème 10.22 (Convergence en loi et fonctions caractéristiques, Paul Levy) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un suite de v.a. de dimension* d.

1. *On suppose que la fonction caractéristique de* X_n *converge simplement (quand* $n \to +\infty$*) vers une fonction* φ *continue en* 0*. Il existe alors un v.a.* X *t.q.* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*.*
2. *Soit* X *un v.a. de dimension* d*. Alors,* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si et seulement si* $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$*.*

DÉMONSTRATION – Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier item. En effet, si $X_n \to X$ en loi, on a, bien sûr, $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ (car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue et bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$). Réciproquement, on suppose que $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Comme la fonction φ_X est continue (et donc, en particulier continue en 0), le premier item donne que X_n converge en loi vers un v.a. Y. Mais ceci donne que X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi. On en déduit bien que X_n tend vers X en loi.

Nous démontrons maintenant le premier item du théorème 10.22. Cette démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que la suite des lois des X_n est tendue (on utilise ici le lemme 10.15 et la continuité de φ). Puis dans la seconde étape on conclut grâce à la proposition 9.21.

Etape 1. On montre dans cette étape que la suite des lois des X_n est tendue. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des lois de chaque composante des X_n est tendue. Soit donc $i \in \{1,\ldots,d\}$ et $(X_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des i–ème composantes des X_n. On note m_n la loi de $X_n^{(i)}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2}\varphi_{X_N^{(i)}}(t) + \varphi_{X_N^{(i)}}(-t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}_n(t) + \widehat{m}_n(-t)}{2}$$

Le lemme 10.15 donne alors, pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq a\int_0^{2/a}(1 - \psi_n(t))dt. \tag{10.6}$$

On a $\varphi_{X_N^{(i)}}(t) = \varphi_{X_n}(te_i)$ (ou e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$), la fonction $\psi_n(t)$ converge donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa limite est une fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) continue en 0. Comme $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\psi(0) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme ψ est continue en 0 et $\psi(0) = 1$, il existe $a_0 > 0$ t.q. $\max_{t\in[0,2/a_0]}(1-\psi(t)) \leq \varepsilon$, et donc

$$a_0\int_0^{2/a_0}(1 - \psi(t))dt \leq 2\varepsilon.$$

La fonction ψ_n converge simplement vers ψ et $0 \leq (1-\psi_n) \leq 1$ le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt = a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi(t))dt.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt \leq 3\varepsilon.$$

Avec (10.6) on a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow m_n(\{x, |x| \geq a_0\}) \leq 3\varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant la continuité décroissante d'une mesure, pour tout $n \in \{1,\ldots,n_0-1\}$, il existe a_n t.q. $m_n(\{x, |x| \geq a_n\}) \leq 3\varepsilon$.
En prenant $a = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ on a donc

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue et termine la première étape.

Etape 2. Dans cette seconde étape il suffit d'utiliser la proposition 9.21. Cette proposition nous donne l'existence d'une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et d'un v.a. X tel que cette sous-suite tende vers X en loi. On en déduit, en particulier que $\varphi_X = \varphi$. Il reste à montrer que toute la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers X en loi (et pas seulement une sous-suite). Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi vers X, il existe $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $E(\phi(X_n)) \not\to E(\phi(X))$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, que nous noterons aussi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour ne pas alourdir les notations), t.q.

$$|E(\phi(X_n)) - E(\phi(X))| \geq \varepsilon. \tag{10.7}$$

Mais, la proposition 9.21 nous donne l'existence d'une sous-suite de cette sous-suite et d'un v.a. Y t.q. la sous-suite de la sous-suite tende vers Y en loi. Comme la convergence en loi donne la convergence simple des fonctions caractéristiques (et que $\varphi_{X_n} \to \varphi$ simplement), on en déduit que $\varphi_Y = \varphi = \varphi_X$. On a donc $P_X = P_Y$. La sous-suite de la sous-suite tend donc vers X en loi. En contradiction avec (10.7). On a bien ainsi montré finalement que $X_n \to X$ en loi. ■

On donne maintenant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.

Proposition 10.23 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X *une v.a.r. gaussienne. On note* m *son espérance* ($m = E(X) \in \mathbb{R}$) *et* σ^2 *sa variance* ($\sigma^2 = E((X-m)^2) \geq 0$) *de sorte que* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. *On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit* $d \geq 1$ *et* X *une v.a gaussien de dimension* d. *On note* m *son espérance* ($m = E(X) \in \mathbb{R}^d$) *et* D *sa matrice de covariance* (D *est une matrice symétrique, de taille*

$d \times d$, semi-définie positive, son terme à la ligne j et la colonne k est donné par la covariance des composantes d'indices j et k de X*) On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{1}{2}Du\cdot u}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Ceci montre que la loi de X *ne dépend de m et* D *(de sorte que $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ si* D *est s.d.p., voir la proposition 9.33).*

DÉMONSTRATION – Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique (théorème 4.53) et donne que ψ est de classe C^1 et

$$\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-y) \sin(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$$

En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n, n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} t \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0) e^{\frac{-t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu} e^{\frac{-\sigma^2 u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX\cdot u}) = \varphi_{X\cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 9.6) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t (X - m)(X - m)^t u) = u^t \mathrm{Cov}(X) u = u^t D u.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X\cdot u}(1) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

ce qui est bien la formule annoncée (car $u^t\mathrm{D}u = \mathrm{D}u \cdot u$).

Enfin, comme φ_X détermine complètement la loi de X, la loi de X ne dépend que de m et D.

■

On montre enfin le théorème central limite, qui nous dit, en particulier, qu'une somme de v.a.r.i.i.d. se répartit de manière "gaussienne" autour de sa moyenne.

Théorème 10.24 (Théorème central limite) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. de dimension d i.i.d.. On suppose que* $\mathrm{E}(|X_1|^2) < \infty$. *On pose* $\mathrm{E}(X_1) = m$, $\mathrm{D} = Cov(X_1)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers tout v.a.* Y *dont la loi est la loi normale multidimensionnelle* $\mathcal{N}(0, \mathrm{D})$. *(Voir la définition 9.5 et la proposition 9.33 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)*

Remarque 10.25 *Dans le cas* $d = 1$, *le théorème 10.24 donne donc la convergence en loi de la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vers* Y *où* $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 *étant la variance de* X_1. *Si* $\sigma^2 \neq 0$, *Il est intéressant de noter que cette convergence en loi est équivalente à la convergence simple de la fonction de répartition de* Y_n *vers celle de* Y *(quand* $n \to +\infty$*). Ceci est dû au fait que la fonction de répartition de* Y *est continue en tout point* $\mathbb{R}$, *voir l'exercice 6.68.*

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 10.22 et la proposition 10.23, il suffit de montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-\frac{u^t \mathrm{D}u}{2}},$$

où φ_{Y_n} est la fonction caractéristique du v.a. Y_n.

Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\varphi_{Y_n}(u) = \mathrm{E}(e^{iY_n\cdot u}) = \mathrm{E}(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_{p=1}^{n}(X_p - m)\cdot u}) = \mathrm{E}(\prod_{p=1}^{n} e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_p - m)\cdot u}).$$

Les v.a. X_p ($p = 1, \ldots, n$) étant indépendants et identiquement distribués, on a donc, par la proposition 9.27 (cette proposition est écrite pour des fonctions à valeurs réelles mais elle s'étend à des fonctions à valeurs complexes en décomposant les fonctions en parties réelles et imaginaires),

$$\varphi_{Y_n}(u) = \mathrm{E}(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u})^n. \quad (10.8)$$

On pose $z_n = \mathrm{E}(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1-m)\cdot u})$ et on calcule maintenant z_n en faisant un développement limité des fonctions cos et sin. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 appartenant à $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$, $i = 1,2$ et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \sin(x) = x + x^2\varepsilon_2(x).$$

On en déduit que

$$\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P} = 1 - \frac{1}{2n}\int_\Omega ((\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)^2 d\mathrm{P} + \frac{1}{n}\int_\Omega ((\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_1(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P},$$

et

$$\int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_\Omega (\mathrm{X}_1 - m)\cdot u d\mathrm{P} + \frac{1}{n}\int_\Omega ((\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_2(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P}.$$

Comme $\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1|^2) < +\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega ((\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_i(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P} = 0 \text{ pour } i = 1,2.$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega ((\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)^2 d\mathrm{P} = \int_\Omega u^t(\mathrm{X}_1 - m)(\mathrm{X}_1 - m)^t u d\mathrm{P} = u^t\Big(\int_\Omega (\mathrm{X}_1 - m)(\mathrm{X}_1 - m)^t d\mathrm{P}\Big)u = u^t\mathrm{D}u.$$

et

$$\int_\Omega (\mathrm{X}_1 - m)\cdot u d\mathrm{P} = \Big(\int_\Omega (\mathrm{X}_1 - m)d\mathrm{P}\Big)\cdot u = 0.$$

En posant $a = \dfrac{u^t\mathrm{D}u}{2}$, on a donc

$$\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P} = 1 - \frac{b_n}{n}, \int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(\mathrm{X}_1 - m)\cdot u)d\mathrm{P} = \frac{c_n}{n},$$

avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. En posant $a_n = b_n + ic_n$, on a donc $z_n = (1 - \frac{a_n}{n})$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Avec (10.8), ceci donne

$$\varphi_{\mathrm{Y}_n}(u) = z_n^n = (1 - \frac{a_n}{n})^n.$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, le lemme 10.26 donne le résultat, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\varphi_{\mathrm{Y}_n}(u) = e^{-a} = e^{-\frac{u^t\mathrm{D}u}{2}}$. ■

Lemme 10.26

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes t.q. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{a_n}{n})^n = e^{-a}.$$

DÉMONSTRATION – Ce lemme est bien connu si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que $a_n < n$ pour n assez grand et que $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{a_n}{n}) = -\lim_{n\to+\infty} a_n = -a$. La difficulté est ici que a_n peut ne pas être un nombre réel.

On pose $z_n = 1 - \frac{a_n}{n}$ et $y_n = 1 - \frac{a}{n}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car elle est convergente), il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q. $|a_n| \le \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $|z_n| \le 1 + \frac{\mathrm{M}}{n}$ (et aussi $|y_n| \le 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$). On a alors (en écrivant $\varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$ avec $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $\varphi(t) = (tz_n + (1-t)y_n)^n$)

$$z_n^n - y_n^n = n(z_n - y_n)\int_0^1 (tz_n + (1-t)y^n)^{n-1}dt.$$

Comme $|tz_n + (1-t)y_n| \le t|z_n| + (1-t)|y_n| \le 1 + \dfrac{\mathrm{M}}{n} \le e^{\frac{\mathrm{M}}{n}}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on en déduit que

$$|z_n^n - y_n^n| \le n|z_n - y_n|e^{\mathrm{M}} = |a - a_n|e^{\mathrm{M}}.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} z_n^n = \lim_{n\to+\infty} y_n^n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^{-a}$. ■

10.7 Exercices

10.7.1 Transformation de Fourier

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans $L^1_\mathbb{C}$) Soit $\mathrm{H}(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_\mathbb{R} \mathrm{H}(\lambda t)e^{itx}dt, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\dfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\dfrac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, et $\displaystyle\int_\mathbb{R} h_\lambda(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé – *Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme* H *est paire, on a $(2\pi)^{\frac{1}{2}}h_\lambda(x) = \int_\mathbb{R} e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt$ et donc*

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}h_\lambda(x) = 2\lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-\lambda t}\cos(tx)dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on remarque que

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt = \frac{1}{\lambda} - (\frac{x}{\lambda})^2\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt + a_n,$$

avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ceci donne

$$\int_0^n e^{-|\lambda t|}\cos(tx)dt = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}(1 + \lambda a_n),$$

et donc $h_\lambda(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$.

Pour calculer $\int_\mathbb{R} h_\lambda(x)dx$, on utilise le changement de variable $x = \lambda y$, on obtient

$$\int_\mathbb{R} h_\lambda(x)dx = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\int_\mathbb{R}\frac{1}{1+x^2}dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

Corrigé – *Noter que λ désigne ici à la fois le paramètre λ introduit au début de l'énoncé et la mesure de Lebesgue. Cette maladresse de notation semble toutefois sans gravité.*

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et* $h_\lambda \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, $f * h_\lambda(x)$ *est défini pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et on a :*

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)h_\lambda(x-t)dt = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\int_{\mathbb{R}} H(\lambda y)e^{i(x-t)y}dy\right)dt.$$

Comme $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ *et* $H(\lambda\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, *on peut utiliser le théorème de Fubini (théorème 7.12) pour inverser l'ordre d'intégration et obtenir :*

$$f * h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y)e^{ixy}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ity}dt\right)dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda y)e^{ixy}\widehat{f}(y)dy.$$

3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g * h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]

Corrigé – *On utilise maintenant le fait que* $h_\lambda \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ *et* $g \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ *pour remarquer que* $g * h_\lambda(x)$ *est défini pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Pour* $x = 0$, *on a :*

$$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)h_\lambda(x)dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} g(x)dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda}$, *on obtient :*

$$g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda y)\frac{1}{1+y^2}dy.$$

Comme $|g(\lambda y)\frac{1}{1+y^2}| \leq \|g\|_u \frac{1}{1+y^2}$ *(avec* $\|g\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$*) et que la fonction* $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$, *on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire (grâce à la continuité de g en* 0*) :*

$$\lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} g(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}dy = (2\pi)^{\frac{1}{2}} g(0).$$

4. Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

[On pourra utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.]

Corrigé – *Comme* $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(y)dy = \sqrt{2\pi}$, *on a :*

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))h_\lambda(y)dy|dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|h_\lambda(y)dy\right)dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7), on en déduit :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|dx\right)h_\lambda(y)dy = g * h_\lambda(0),$$

avec $g(y) = \int |f(x+y) - f(x)|dx$.

Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 *(théorème 5.21, écrit pour de fonctions à valeurs réelles mais la généralisation est immédiate pour des fonctions à valeurs complexes) donne que* g *est continue en* 0 *et donc aussi continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(en remarquant que* $|g(y) - g(z)| \leq |g(y-z)|$*) et donc aussi mesurable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Elle est également bornée (car* $|g(y)| \leq 2\|f\|_1$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}$*). On peut donc utiliser la question précédente, elle donne que* $\lim_{\lambda\to 0} g * h_\lambda(0) = 0$ *et donc que* $\lim_{\lambda\to 0} \|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi} f\|_1 = 0$.

5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.6.

Corrigé – *On note* $L^1 = L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$. *Soit* $f \in L^1$ *(on a donc* $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*). On suppose que* $\widehat{f} \in L^1$. *Soit* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*_+$ *une suite t.q.* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. *Comme* $f \in L^1$, *la question précédente nous donne que* $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *dans* L^1 *et la question 2 nous donne pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda_n t)\widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée qui s'applique parce que $\widehat{f} \in L^1$ *et que l'on a, pour tout* x *et tout* n, $|H(\lambda_n t)\widehat{f}(t)e^{ixt}| \leq |\widehat{f}(x)|$. *Comme* $\lim_{n\to+\infty} H(\lambda_n x) = 1$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} f * h_{\lambda_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt = \sqrt{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Enfin, comme $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *dans* L^1, *on peut supposer, après extraction d'une sous-suite, que* $f * h_{\lambda_n} \to \sqrt{2\pi} f$ *p.p.. On a donc, finalement (par unicité de la limite dans* $\mathbb{R}$*),* $\sqrt{2\pi} f = \sqrt{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ *p.p., c'est-à-dire* $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ *p.p..*

Exercice 10.2 (La transformation de Fourier n'est ni stable ni surjective) Soit $a \in \mathbb{R}^*_+$. On note $L^1_{\mathbb{C}}$ l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $f = 1_{[-a,a]}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f. En déduire que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier.

Corrigé – *On a bien* $f \in L^1_{\mathbb{C}}$. *Soit* $t \in \mathbb{R}^*$, *on a*

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ixt}dx = \frac{1}{-it\sqrt{2\pi}}(e^{-iat} - e^{iat}) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} 2\sin(at) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(at)}{t}.$$

Pour $t = 0$, on a $\widehat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}a$. (On peut remarquer que $\widehat{f}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.)

La fonction $\widehat{f}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue), ce qui montre que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par Fourier.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = 1_{[-n,n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{h_n} = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f * g_n$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g_n(x-y) dy = \lambda([-a,a] \cap [x-n, x+n]), \qquad (10.9)$$

car $f(y)g_n(x-y) = 1$ si $y \in [-a,a] \cap [x-n,x+n]$ et 0 sinon.

On peut eventuellement expliciter $f * g_n$ (mais ce n'est pas nécessaire pour la suite). Pour $n > a$, on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \geq a+n, \\ a-x+n & si\ -a+n \leq x < a+n \\ 2a & si\ a-n \leq x < -a+n \\ x+n+a & si\ -n-a \leq x < a-n \\ 0 & si\ x < -n-a. \end{cases}$$

Comme f et g_n appartiennent à $L^1_{\mathbb{C}}$, on sait (par le cours) que $f * g_n \in L^1_{\mathbb{C}}$ et $\widehat{f * g_n} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g_n}$. On obtient donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en posant $\sin(t)/t = 1$ pour $t = 0$),

$$\widehat{f * g_n}(t) = h_n(t), \text{ avec } h_n(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(at)\sin(nt)}{t^2}.$$

La fonction h_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $|h_n(t)| \leq \sqrt{8/\pi}(1/t^2)$ pour tout t, on en déduit que $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$, on peut donc appliquer le théorème d'inversion de Fourier. Il donne

$$f * g_n(-\cdot) = \widehat{\widehat{f * g_n}} = \widehat{h_n}.$$

Comme $f * g_n(-\cdot) = f * g_n$ (par (10.9)), on a bien finalement $f * g_n = \widehat{h_n}$ avec $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$.

Comme f et g_n sont de carré intégrable, on sait que $f * g_n \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$) (voir l'exercice 8.7). Ceci peut aussi se voir directement sur la formule pour $f * g_n$. La formule (10.9) donne aussi $|f * g_n(x)| \leq 2a$ pour tout x et tout n. La suite $(f * g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (et aussi dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$). On montre maintenant que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$.

Soit $\alpha > 0$ t.q. $\sin(at)/(at) \geq 1/2$ pour tout $t \in [0,\alpha]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{\mathbb{R}} |h_n(t)| dt \geq \frac{a}{2} \int_0^{\alpha} |\frac{\sin(nt)}{t}| dt = \frac{a}{2} \int_0^{n\alpha} |\frac{\sin(z)}{z}| dz,$$

Ce qui prouve que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$ car la fonction $z \mapsto \sin(z)/z$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Si l'application $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ était surjective de L^1_C dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, elle serait alors bijective et continue (car on sait déjà qu'elle est injective et continue). Le théorème de Banach [1] *donnerait alors que son inverse est aussi continue, ce qui est faux car la suite $(\widehat{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$.*

Exercice 10.3 (Une condition donnant $\widehat{f} \in L^1$)

On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\widehat{g} \in L^1$, $g\widehat{f} \in L^1$ et $\int f\widehat{g}d\lambda = \int g\widehat{f}d\lambda$.
2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\widehat{\theta}_1(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   [On pourra remarquer que $\theta_1 = 1_B * 1_B$ avec $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.]
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^\star$, montrer que

$$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}.$$

4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\widehat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\widehat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique). On utilise la fonction θ_n de la question précédente.
   (a) On note $\varphi_n = \theta_n \widehat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \widehat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \widehat{f} d\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \widehat{\theta}_n(y)dy = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice 10.4 (Transformée de Fourier inverse) Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$, est aussi intégrable (pour la mesure de Lebesgue).

1. En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\mathrm{Re}(\widehat{f}(-t)) = \mathrm{Re}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{Im}(\widehat{f}(-t)) = -\mathrm{Im}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{Re}(\xi)$ et $\mathrm{Im}(\xi)$ désignent les parties réelle et imaginaire du nombre complexe ξ.

---

1. Théorème de Banach : Si T est une application linéaire bijective et continue d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, alors son inverse est continue.

Corrigé – *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx$.*

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\widehat{f}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ixt}dx.$$

En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on obtient alors la formule suivante pour le conjugué de $\widehat{f}(-t)$ (noté $\overline{\widehat{f}(-t)}$) :

$$\overline{\widehat{f}(-t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\overline{e^{ixt}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dx = \widehat{f}(t).$$

En reprenant encore le conjugué, ceci donne bien $\widehat{f}(-t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

2. Montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(\widehat{f}(t)e^{itx})dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Corrigé – *Comme $\widehat{f}$ est intégrable, on sait $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ p.p. (théorème 10.1). On a donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

Dans l'intégrale de $-\infty$ à 0, on utilise le changement de variable $s = -t$, on obtient

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} \widehat{f}(-s)e^{-ixs}ds + \int_0^{+\infty} \widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

En regroupant les deux intégrales, on en déduit

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\widehat{f}(-t)e^{-ixt} + \widehat{f}(t)e^{ixt}\Big)dt.$$

La première question montre que le nombre complexe $\widehat{f}(-t)$ est le conjugué de $\widehat{f}(t)$. Comme le nombre complexe e^{-ixt} est le conjugué de e^{ixt} on en déduit que $\widehat{f}(-t)e^{-ixt}$ est le conjugué de $\widehat{f}(t)e^{ixt}$. Ceci donne alors

$$\sqrt{2\pi} f(x) = \int_0^{+\infty} 2Re(\widehat{f}(t)e^{ixt})dt.$$

On obtient bien, finalement, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} Re(\widehat{f}(t)e^{itx})dt.$$

Exercice 10.5 (Transformée de Fourier pour f de classe C^2, à support compact) On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^2, et qu'il existe K compact de $\mathbb{R}$ t.q. $f = 0$ sur K^c).

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$.

2. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$. [On pourra utiliser la proposition 10.7.]

3. Montrer que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

N.B. Comme $C^2_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, cet exercice permet de définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}$ sans utiliser l'espace $\mathcal{S}_1$.

Exercice 10.6 (Caractérisation de m par $\widehat{m}$) Soit $d \geq 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$.

(a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$. Montrer que $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.

Corrigé – *On remarque que* $\int \widehat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t}\varphi(x)dx\right)dm(t)$. *(Les intégrales sont toutes sur* $\mathbb{R}^d$*). La mesure signée m peut se décomposer en différence de deux mesures positives étrangères* $m = m^+ - m^-$ *(décomposition de Hahn, proposition 2.33). Comme*

$$\int\int |e^{-ix\cdot t}\varphi(x)|dx dm^{\pm}(t) = \|\varphi\|_1 m^{\pm}(\mathbb{R}^d) < +\infty,$$

on peut utiliser le théorème de Funini-Tonelli (théorème 7.7) avec les mesures λ_d *et* m^+ *et les mesures* λ_d *et* m^-*. On obtient ainsi :*

$$\int \widehat{\varphi} dm = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int \left(\int e^{-ix\cdot t} dm(t)\right)\varphi(x)dx = \int \widehat{m}(x)\varphi(x)dx.$$

Le même raisonnement donne $\int \widehat{\varphi} d\mu = \int \widehat{\mu}(x)\varphi(x)dx$. *Comme* $\widehat{m}(x) = \widehat{\mu}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*, on en déduit bien* $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.

(b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$).

Corrigé –
Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \subset L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda_d)$*, la question précédente donne* $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$*. Or, l'application* $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ *est une bijection dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ *(proposition 10.11). On a donc* $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$.

(c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$).

Corrigé – *Soit* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *et* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ *t.q.* $\varphi_n \to \varphi$*, uniformément sur* $\mathbb{R}^d$*, quand* $n \to +\infty$*. La question précédente donne* $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On utilise alors le théorème de convergence dominée (ce qui est possible car les mesures* $m^\pm$ *et* $\mu^\pm$ *sont des mesures finies), il donne* $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$.

La proposition 5.8 donne alors $m = \mu$.

2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$.

Exercice 10.7 (Transformée de Fourier du produit de fonctions)

Pour $p \in [1,+\infty]$, On note L^p l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p.

On note $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on note $\mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Si $f \in \mathrm{L}^1$, on désigne par $\widehat{f}$ la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$).

Si $f \in \mathrm{L}^2$, on désigne par $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\tilde{\mathcal{F}}(f) \in \mathrm{L}^2$).

On rappelle que si $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, on a $\widehat{f} = \mathrm{F}(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, $\widehat{f}$ et $\tilde{\mathcal{F}}(f)$.

1. (Convolution $\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}^2$). Soit $u,v \in \mathrm{L}^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ par la formule

$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $u * v \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_2\|v\|_2$.

Corrigé – *On peut choisir pour u et v des représentants et donc considérer que $u,v \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. La question est alors corrigée dans l'exercice 8.7 (voir la première question de cet exercice en prenant $p = q = 2$). Dans l'exercice 8.7, les fonctions sont à valeurs réelles mais la démonstration est identique pour des fonctions à valeurs complexes.*

2. Soit $f,g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(a) Montrer que f, g, $fg \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, puis que $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que f et g appartiennent à l'espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}_1$ (voir la definition 10.9). Comme $\mathcal{S}_1 \subset \mathrm{L}^p$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on a donc $f,g \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ (avec la confusion habituelle entre un élément de L^p et son représentant continu lorsqu'il existe). Puis, comme la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_1$ dans $\mathcal{S}_1$ (voir la proposition 10.11), on a aussi $\widehat{f},\widehat{g} \in \mathcal{S}_1$ et donc $\widehat{f},\widehat{g} \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$.*

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f} * \widehat{g}(t).$$

[On pourra, par exemple, utiliser le fait que f, $\widehat{g} \in \mathrm{L}^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de $\widehat{f}$ et la transformée de Fourier inverse pour $\widehat{g}$.]

Corrigé – *Soit $t \in \mathbb{R}$. comme $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathrm{L}^2$, la fonction $\widehat{f} * \widehat{g}$ est bien définie au point t et on a*

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t-x)\widehat{g}(x)dx.$$

Comme $f \in \mathrm{L}^1$, on peut utiliser la formule définissant $\widehat{f}(t-x)$. Elle donne

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-x)y} f(y) dy \Big) \widehat{g}(x) dx.$$

On peut maintenant utiliser le théorème de Fubini car $|e^{-i(t-x)y} f(y)\widehat{g}(x)| = |f(y)\widehat{g}(x)|$ (et $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(y)\widehat{g}(x)| dx dy = \|f\|_1 \|\widehat{g}\|_1 < +\infty$). On obtient

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \widehat{g}(x) dx \Big) e^{-ity} f(y) dy.$$

Comme $g, \widehat{g} \in \mathrm{L}^1$, le théorème d'inversion de Fourier (théorème 10.6) donne $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \widehat{g}(x) dx$ et donc

$$\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) g(y) dy,$$

c'est-à-dire (noter que $fg \in \mathrm{L}^1$) $\widehat{f} * \widehat{g}(t) = \sqrt{2\pi}\widehat{fg}(t)$.

3. Soit $f, g \in \mathrm{L}^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)(t).$$

Corrigé – *Il suffit d'utiliser la densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans L^2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que $f_n \to f$ dans L^2 et $g_n \to g$ dans L^2, quand $n \to +\infty$. On a alors $f_n g_n \to fg$ dans L^1 (il suffit de remarquer que $\|f_n g_n - fg\|_1 \le \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2$). La transformée de Fourier envoie continûment L^1 dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a donc $\widehat{f_n g_n} \to \widehat{fg}$ uniformément sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier envoie aussi continûment L^2 dans L^2. On a donc $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ et $\widehat{g_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(g)$ dans L^2. La première question donne alors que $\widehat{f_n} * \widehat{g_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$, la question précédente donne $\widehat{f_n g_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f_n} * \widehat{g_n}(t)$. En passant à la limte quand $n \to +\infty$ on en déduit bien que $\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)(t)$.*

Exercice 10.8 (Caractérisation des fonctions à valeurs réelles) Soit $d \ge 1$. Pour $1 \le p \le \infty$, on note L^p l'espace $\mathrm{L}_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1. Soit $f \in \mathrm{L}^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé – *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$. On a donc*

$$\overline{\widehat{f}}(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int \overline{f}(x) e^{+ix\cdot\xi} dx = \widehat{\overline{f}}(-\xi). \tag{10.10}$$

On en déduit que

$$\widehat{\overline{\widehat{f}}}(\xi) - \widehat{f}(-\xi) = \widehat{\overline{f} - f}(-\xi). \tag{10.11}$$

Si $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\overline{f} - f = 0$ p.p. et donc $\widehat{\overline{f} - f}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Avec (10.11)*, on en déduit bien que $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Réciproquement, on suppose maintenant que $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on déduit alors de (10.11) *que $\widehat{\overline{f} - f}(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, et donc par le théorème d'inversion (théorème 10.6) que $\overline{f} - f = 0$ p.p., c'est à dire que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

2. Soit $f \in \mathrm{L}^2$. On désigne par $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\tilde{\mathcal{F}}(f) \in \mathrm{L}^2$). Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\tilde{\mathcal{F}}(f)}(\xi) = \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Corrigé – *Il suffit de démontrer que l'égalité* (10.11) *est toujours vraie p.p. en remplaçant la transformée de Fourier dans* L^1 *par la transformée de Fourier dans* L^2*. Pour cela, on choisit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ (pour tout n) et $f_n \to f$ dans* L^2 *quand $n \to +\infty$ (une telle suite existe, on peut même supposer que $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$). On a donc aussi $\overline{f}_n \to \overline{f}$ dans* L^2 *et, en utilisant la définition de $\tilde{\mathcal{F}}$, on en déduit que*

$$\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f) \text{ et } \widehat{\overline{f}_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f}) \text{ dans } \mathrm{L}^2, \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'après (10.10)*, on a $\overline{\widehat{f_n}} = \widehat{\overline{f}_n}(-\cdot)$. Les deux termes de cette égalité ont une limite dans* L^2 *quand $n \to +\infty$. On obtient donc, quand $n \to +\infty$, $\overline{\tilde{\mathcal{F}}(f)} = \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f})(-\cdot)$ p.p. et donc (par linéarité de $\tilde{\mathcal{F}}$)*

$$\overline{\tilde{\mathcal{F}}(f)} - \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot) = \tilde{\mathcal{F}}(\overline{f} - f)(-\cdot) \text{ p.p.}. \tag{10.12}$$

Pour conclure, on procède comme dans la question précédente. Si $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\overline{f} - f = 0$ p.p. et donc $\tilde{\mathcal{F}}(\overline{f} - f) = 0$ p.p.. Avec (10.12)*, on en déduit bien que $\overline{\tilde{\mathcal{F}}(f)} = \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ p.p..*

Réciproquement, on suppose maintenant que $\overline{\tilde{\mathcal{F}}(f)} = \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ p.p.. On déduit alors de (10.12) *que $\tilde{\mathcal{F}}(\overline{f} - f) = 0$ p.p., et donc par l'injectivité de $\tilde{\mathcal{F}}$ que $\overline{f} - f = 0$ p.p., c'est à dire que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Exercice 10.9 (Fourier, série et transformée)

On rappelle que l'espace $\mathcal{S}$ est défini par

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telle que pour tout } \alpha \in \mathbb{N} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$ (On rappelle que $\widehat{\varphi}$ est alors aussi dans l'espace $\mathcal{S}$ et que $\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi(-\cdot)$).

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t+2k\pi)$ est absolument convergente (dans $\mathbb{C}$).
   Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $f(t)$ par $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t+2k\pi)$.
2. Montrer que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et que f est 2π-périodique.
   On rappelle que ceci donne que f est somme de sa série de Fourier, c'est-à-dire que pour tout t dans $\mathbb{R}$ on a
   $$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int},$$
   avec $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que
   $$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\widehat{\varphi}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(-n).$$
   En déduire que pour tout t dans $\mathbb{R}$
   $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(t+2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(-n)e^{int}.$$

Exercice 10.10 ($f \in \mathrm{C}_c^\infty$ et $\widehat{f} = 0$ sur un ouvert non vide implique $f = 0$)

Soit $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\widehat{f} = 0$ sur U. Montrer que $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x)e^{-ix(\xi+i\eta)dx}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{C}$.]

Exercice 10.11 (Théorème d'injection de Sobolev)

Soit $d \geq 1$. Pour $p \in [1,\infty]$, on note L^p l'espace l'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Si $f \in \mathrm{L}^2$, on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.

Pour $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, on note $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathrm{L}^2 \text{ t.q. } (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in \mathrm{L}^2\}$ et $\|f\|_{\mathrm{H}^s} = \|(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^2}$.

On rappelle que $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$. Avec cette norme, $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ et $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.

Soit $s > \frac{d}{2}$.

1. Soit $f \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$. En déduire que $f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ (au sens "il existe $g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^2)$ telle que $f = g$ p.p."; on confond alors f et g).
2. Montrer que $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ et qu'il existe C_s, ne dépendant que de s et d, t.q. :
   $$\|f\|_u \leq \mathrm{C}_s\|f\|_{\mathrm{H}^s} \text{ pour tout } f \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d).$$

3. On s'intéresse maintenant au cas $d = 2$.

(a) Soit $s > 1$ et $u \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_u \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(s-1)}}\|f\|_{\mathrm{H}^s}.$$

(b) Soit $1 < s < 2$ et $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_{\mathrm{H}^s} \leq \|u\|_{\mathrm{H}^1}^{2-s}\|f\|_{\mathrm{H}^2}^{s-1}.$$

[Utiliser l'inégalité de Hölder.]

(c) On pose $\mathrm{C} = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$. Montrer que

$$f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{\mathrm{H}^1} = 1 \Rightarrow \|f\|_u \leq \mathrm{C}\sqrt{\ln(1+\|f\|_{\mathrm{H}^2})}.$$

[Pour $a > 1$, on pourra chercher le minimum pour $s \in]1,2[$ de la fonction $s \mapsto \frac{a^{s-1}}{\sqrt{s-1}}$, et distinguer selon les valeurs de a.]

Soit $\beta > 0$, montrer qu'il existe C_β, ne dépendant que de β, t.q. :

$$f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{\mathrm{H}^1} \leq \beta \Rightarrow \|f\|_u \leq \mathrm{C}_\beta\sqrt{\ln(1+\|f\|_{\mathrm{H}^2})}.$$

Exercice 10.12 (Comportement à l'infini de f et régularité en 0 de $\hat{f}$)

On note $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables pour la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f.

Pour $a > 0$, on note $\mathrm{A}_a = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq a\}$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1$, $f \geq 0$ p.p.. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(\hat{f}(t) + \hat{f}(-t))$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\psi(t) \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \psi(0) - \psi(t) = \displaystyle\int f(x)(1-\cos(xt))dx$.

Corrigé – *On a $\psi(t) = (1/2)\int f(x)(e^{ixt} + e^{-ixt})dx = \int f(x)\cos(xt)dx$. Comme f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on a donc $\psi(t) \in \mathbb{R}$. Puis, comme $\psi(0) = \int f(x)dx$. On a bien*

$$\psi(0) - \psi(t) = \int f(x)(1-\cos(xt))dx.$$

Comme $f(x)(1-\cos(xt)) \geq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $\psi(0) - \psi(t) \geq 0$.

(b) Soit $a > 0$. Montrer que

$$\int_0^{2/a}\Big(\int f(x)(1-\cos(xt))dx\Big)dt = \int f(x)(\frac{2}{a}-\frac{1}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx.$$

Corrigé – *La fonction* $(x,t)\mapsto f(x)(1-\cos(xt))$ *est mesurable positive de* $\mathbb{R}\times]0,2a[\to\mathbb{R}$, *on peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli, il donne*

$$\int_0^{2/a}\Big(\int f(x)(1-\cos(xt))dx\Big)dt = \int\Big(\int_0^{2/a}(1-\cos(xt))dt\Big)f(x)dx$$
$$= \int\Big(\frac{2}{a}-\frac{\sin(2x/a)}{x}\Big)dx.$$

(c) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_{A_a} f(x)dx \le \int f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx$. [On pourra dans l'intégrale de droite utiliser $\mathbb{R} = A_a \cup A_a^c$.]
En déduire (avec les deux questions précédentes) que

$$\int_{A_a} f(x)dx \le a\int_0^{2/a}(\psi(0)-\psi(t))dt.$$

Corrigé –

$$\int f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx$$
$$= \int_{A_a} f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx + \int_{A_a^c} f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx.$$

Comme $|\sin(y)| \le |y|$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *on a* $|\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))| \le 2$ *pour tout* $x \in A_a^c$ *(et même tout* $x \in \mathbb{R}^\star$*) et donc* $\int_{A_a^c} f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx \ge 0$.
Si $x \in A_a$, *on a* $|\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))| \le |\sin(2\frac{x}{a}))| \le 1$ *et donc* $\int_{A_a} f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx \ge \int_{A_a} f(x)dx$. *On en déduit bien*

$$\int f(x)(2-\frac{a}{x}\sin(2\frac{x}{a}))dx \ge \int_{A_a} f(x)dx.$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\int_{A_a} f(x)dx \le a\int_0^{2/a}\Big(\int f(x)(1-\cos(xt))dx\Big)dt,$$

et la question 1(a) donne alors

$$\int_{A_a} f(x)dx \le a\int_0^{2/a}(\psi(0)-\psi(t))dt. \qquad (10.13)$$

(d) On suppose que $\hat{f}$ est de classe C^2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$, ne dépendant que de f, tel que $\int_{A_a} f(x)dx \le \frac{C}{a^2}$, pour tout $a > 0$.

Corrigé – *La fonction* ψ *est de classe* C^2. *Comme* $\psi(t) \leq \psi(0)$ *pour tout* t, *on a* $\psi'(0) = 0$. *On pose* $C_1 = \max\{|\psi''(t)|, t \in [-2,2]\}$. *La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 2 *donne alors, pour tout* $t \in [-2,2]$,

$$\psi(0) - \psi(t) \leq C_1 \frac{t^2}{2}.$$

On en déduit, avec (10.13), *que, pour tout* a *tel que* $|a| \geq 1$, *on a*

$$\int_{A_a} f(x)dx \leq a C_1 \int_0^{2/a} \frac{t^2}{2} dt = \frac{4C_1}{3a^2}.$$

En posant $C = \max\{4C_1/3, \int f(x)dx\}$, *on a donc* $\int_{A_a} f(x)dx \leq \frac{C}{a^2}$, *pour tout* $a > 0$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrables et positives p.p..
   On suppose que $\hat{f}_n$ converge simplement vers une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0.
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_n(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(\hat{f}_n(t) + \hat{f}_n(-t))$.
   On note $\tilde{\psi}$ la limite simple des fonctions ψ_n.

(a) Monter que $\tilde{\psi}$ est continue en 0.

Corrigé – *On a* $\tilde{\psi}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(\varphi(t)+\varphi(-t))$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Comme* φ *est continue en* 0, *on en déduit que* $\tilde{\psi}$ *est continue en* 0.

(b) Montrer que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\psi_n(t) = \int f_n(x)\cos(xt)dx$ *et donc*

$$|\psi_n(t)| \leq \int f_n(x)dx = \psi_n(0).$$

La suite $(\psi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente (dans* $\mathbb{R}$*), elle donc bornée. On pose* $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\psi_n(0)\}$. *On a* $M \in \mathbb{R}$ *et* $|\psi_n(t)| \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2/a} (\psi_n(0) - \psi_n(t))dt = \int_0^{2/a} (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))dt$.

Corrigé – *On a* $\lim_{n\to+\infty}(\psi_n(0) - \psi_n(t)) = (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))$ *pour tout* $t \in [0,2/a]$ *et* $|\psi_n(0) - \psi_n(t)| \leq 2M$ *pour tout* $t \in [0,2/a]$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, *où* M *est définie à la question précédente. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée. Il donne bien* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2/a} (\psi_n(0) - \psi_n(t))dt = \int_0^{2/a} (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))dt$.

(d) Montrer que $\int_{A_a} f_n(x)dx \to 0$, quand $a \to +\infty$, uniformément par rapport à n.

Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{A_a} f_n(x)dx \to 0$, quand $a \to +\infty$ (en utilisant, par exemple, le théorème de convergence dominée). Le problème est donc de montrer que cette convergence est uniforme par rapport à n.*

Soit $\varepsilon > 0$. Comme cela vient d'être dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe a_n tel que

$$a \geq a_n \Rightarrow \int_{A_a} f_n(x)dx \leq \varepsilon.$$

Mais, on ne peut pas conclure car on pourrait avoir $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$. Pour conclure on va utiliser la continuité de $\tilde{\psi}$ en 0. Comme $\tilde{\psi}$ est continue en 0, il existe $\overline{a} > 0$ tel que

$$\overline{a}\int_0^{2/\overline{a}} (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))dt \leq \overline{a}\frac{2}{\overline{a}} \max\{|\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t)|, t \in [0, \frac{2}{\overline{a}}]\} \leq 2\varepsilon.$$

la question précédente donne $\lim_{n\to+\infty} \overline{a}\int_0^{2/\overline{a}} (\psi_n(0) - \psi_n(t))dt = \overline{a}\int_0^{2/\overline{a}} (\tilde{\psi}(0) - \tilde{\psi}(t))dt \leq 2\varepsilon$. Il existe donc n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \overline{a}\int_0^{2/\overline{a}} (\psi_n(0) - \psi_n(t))dt \leq 3\varepsilon.$$

La question 1(c) donne alors, pour $n \geq n_0$,

$$\int_{A_{\overline{a}}} f_n(x)dx \leq \overline{a}\int_0^{2/\overline{a}} (\psi_n(0) - \psi_n(t))dt \leq 3\varepsilon.$$

Il suffit maintenant de prendre $\tilde{a} = \max\{\overline{a}, b\}$ avec $b = \max_{n=0,\ldots,n_0} a_n$ et on obtient bien (en utilisant la positivité de f_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a \geq \tilde{a} \Rightarrow \int_{A_a} f_n(x)dx \leq 3\varepsilon.$$

10.7.2 Fonction Caractéristique d'une v.a.r.

Exercice 10.13 (Calcul de fonctions caractéristiques) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X dans les cas suivants :

1. $X = a$ p.s. ($a \in \mathbb{R}$).
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p : $P(\{X = 1\}) = p = 1 - P(\{X = 0\})$).
3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Exercice 10.14 (Vecteurs gaussiens et densité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un v.a. de dimension d.

On suppose que X est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^d a_i X_i$ suit une loi gaussienne pour tout $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$). On note m la moyenne de X et D la matrice de covariance de X. Montrer que la loi de X est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^d$) si et seulement si D est inversible.

Exercice 10.15 (V.a. gaussiens, indépendance, covariance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)$ un v.a. de dimension d.

1. On suppose ici que $d = 2$.

(a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$.

Corrigé – *Comme X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\mathrm{X}_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$. On a donc $\varphi_{\mathrm{X}_k}(u) = e^{ium_k} e^{-\frac{\sigma_k^2 u^2}{2}}$ pour $k = 1, 2$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$.*

Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On calcule alors la fonction caractéristique de la v.a.r. $a_1\mathrm{X}_1 + a_2\mathrm{X}_2$. Soit $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_{a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2}(u) = \int_\Omega e^{i(a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2)u} d\mathrm{P} = \int_\Omega e^{ia_1\mathrm{X}_1 u} e^{ia_2\mathrm{X}_2 u} d\mathrm{P}$$

En utilisant l'indépendance de X_1 et X_2, on en déduit :

$$\varphi_{a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2}(u) = \int_\Omega e^{ia_1\mathrm{X}_1 u} d\mathrm{P} \int_\Omega e^{ia_2\mathrm{X}_2 u} d\mathrm{P} = \varphi_{\mathrm{X}_1}(a_1 u)\varphi_{\mathrm{X}_2}(a_2 u).$$

Ce qui donne $\varphi_{a_1\mathrm{X}_1+a_2\mathrm{X}_2}(u) = e^{iu(a_1m_1+a_2m_2)} e^{-\frac{u^2(\sigma_1^2a_1^2+\sigma_2^2a_2^2)}{2}}$. Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (voir la proposition 10.20), on en déduit que $a_1\mathrm{X}_1 + a_2\mathrm{X}_2 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = a_1m_1 + a_2m_2$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2a_1^2 + \sigma_2^2a_2^2}$. Ceci prouve bien que X est un vecteur gaussien.

L'indépendance de X_1 et X_2 donne $Cov(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$. Le fait que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes est inutile ici.

(b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Corrigé – *D'après la proposition 10.21, pour montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes, il suffit de montrer que $\varphi_\mathrm{X}(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$. Ceci est une conséquence facile du fait que $Cov(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$. En effet, la matrice de covariance de X est alors diagonale et on a bien (grâce à la proposition 10.23), en reprenant les notations de la question précédente (c'est-à-dire $\mathrm{X}_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ pour $i = 1, 2$),*

$$\varphi_\mathrm{X}(u) = e^{i(u_1m_1+u_2m_2)} e^{-\frac{u_1^2\sigma_1^2+u_2^2\sigma_2^2}{2}} = \varphi_{\mathrm{X}_1}(u_1)\varphi_{\mathrm{X}_2}(u_2),$$

c'est-à-dire $\varphi_\mathrm{X}(u) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j)$ pour tout $u = (u_1, u_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

2. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 4.48.]

Corrigé – *On considère les deux v.a.r.* S *et* X *de l'exercice 4.48 et on prend* $X_1 = SX$ *et* $X_2 = X$. *Les v.a.r.* X_1 *et* X_2 *sont gaussiennes (on a* $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ *et* $X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$*), elles sont dépendantes et on a Cov*$(X_1, X_2) = 0$ *(voir l'exercice 4.48). On en déduit que le v.a.* $X = (X_1, X_2)$ *n'est pas gaussien (sinon les v.a.r. seraient indépendantes, d'après la question précédente).*

3. On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.

Corrigé – *La démonstration est ici similaire à celle de la question 1(b). D'après la proposition 10.21, pour montrer que les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes, il suffit de montrer que* $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ *pour tout* $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$. *Ceci est une conséquence facile du fait que les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes deux à deux. En effet, cette hypothèse d'indépendance deux à deux donne que la matrice de covariance de* X *est diagonale et on a alors (grâce à la proposition 10.23), avec* $X_k \sim \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ *pour* $i = 1, \ldots, d$,

$$\varphi_X(u) = e^{i\sum_{k=1}^d u_k m_k} e^{-\frac{\sum_{k=1}^d u_k^2 \sigma_k^2}{2}} = \varphi_{X_1}(u_1) \ldots \varphi_{X_d}(u_d),$$

c'est-à-dire $\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j)$ *pour tout* $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 10.16 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P(\{X = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X.

Corrigé – *Soit* $u \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iXu} dP = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{iku} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{iu}-1)}.$$

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.

(a) Soit $n > 1$. Déduire de la question 1 la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^n X_p$.

Corrigé – *Soit* $u \in \mathbb{R}$. *On a* $\varphi_{Y_n}(u) = \int_\Omega e^{iY_n u} dP = \int_\Omega \prod_{p=1}^n e^{iX_p u} dP$. *Comme les v.a.r.* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes, on en déduit que*

$$\varphi_{Y_n}(u) = \prod_{p=1}^n \int_\Omega e^{iX_p u} dP = e^{n\lambda(e^{iu}-1)}.$$

Comme la loi d'une v.a.r. est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique (proposition 10.20), on en déduit que Y_n *est une v.a. de Poisson de paramètre* $n\lambda$.

(b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *On suppose maintenant que $\lambda = 1$. la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables et on a $E(X_1) = 1$ et $Var(X_1) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} (Y_n - n).$$

Le théorème central limite (théorème 10.24) donne que la suite $(P_{Z_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comme une loi normale est diffuse (c'est-à-dire qu'elle ne charge pas les points), on en déduit que $P(Z_n \le 0)$ tend vers $1/2$ quand $n \to +\infty$ (voir l'exercice 6.67 et noter que $P(Z_n \le 0) = P_{Z_n}(]-\infty, 0[)$). Or, $P(Z_n \le 0) = P(Y_n \le n)$ et, comme Y_n est une v.a. de Poisson de paramètre n, on a :

$$P(Y_n \le n) = \sum_{k=0}^{n} P(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n} \frac{n^k}{k!}.$$

On a donc $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to 1/2$, quand $n \to +\infty$.

Exercice 10.17 (Sur les lois des grands nombres) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. dont la loi est la loi de Cauchy c'est-à-dire que $P_X = f\lambda$, avec $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$).

1. Montrer que X n'est pas une v.a.r. intégrable.

Corrigé – *On a*

$$\int_\Omega |X| dP = \int_\mathbb{R} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx \ge \frac{1}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Ce qui prouve que X n'est pas intégrable.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(\{|X| > n\}) \ge \frac{1}{n\pi}$, où $\{|X| > n\} = \{\omega \in \Omega, |X(\omega)| > n\}$. [On pourra remarquer que $\frac{2}{1+x^2} \ge \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \ge 1$.]

Corrigé – *On a*

$$P(\{|X| > n\}) = \int_{|x|>n} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \ge \frac{1}{\pi} \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n\pi}.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Montrer que

$$\frac{2}{1+u^2} = \int_\mathbb{R} e^{iux} g(x) dx = \sqrt{2\pi}\widehat{g}(u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

En déduire que la fonction caractéristique de X, notée φ_X vérifie $\varphi_X(u) = e^{-|u|}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. [On pourra utiliser de théorème d'inversion de Fourier qui donne $\widehat{\widehat{g}} = g(-\cdot)$ p.p. si $g, \widehat{g} \in L^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

Corrigé – *Soit $u \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{iux}g(x)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction g est paire on a*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iux}g(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \cos(ux)e^{-x}dx.$$

En intégrant deux fois par parties, on montre que

$$\int_0^{+\infty} \cos(ux)e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} u\sin(ux)e^{-x}dx + 1 = -\int_0^{+\infty} u^2\cos(ux)e^{-x}dx.$$

On en déduit que

$$(1+u^2)\int_0^{+\infty} \cos(ux)e^{-x}dx = 1,$$

et donc que $\int_{\mathbb{R}} e^{iux}g(x)dx = \frac{2}{1+u^2}$. On remarque aussi que, grâce à la parité de g,

$$\widehat{g}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-iux}g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{iux}g(x)dx.$$

Enfin, la définition de fonction caractéristique de X donne

$$\varphi_{\mathrm{X}}(u) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(u).$$

Comme $f(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{g}(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a donc (en utilisant $\widehat{\widehat{g}} = g(-\cdot)$ et la parité de g)

$$\widehat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\widehat{g}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(-\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g,$$

ce qui donne, finalement, $\varphi_{\mathrm{X}} = g$.

On se donne maintenant une suite $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ de v.a.r.i.i.d. et on suppose que la loi de X_1 (et donc de tous les X_n) est la loi de Cauchy. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathrm{Z}_n = \frac{1}{n}(\sum_{p=1}^{n}\mathrm{X}_p).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que

$$\varphi_{\mathrm{Z}_n}(u) = \varphi^n_{\mathrm{X}_1}(\frac{u}{n}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

Corrigé – *Soit $u \in \mathbb{R}$, on a, grâce à l'indépendance des X_p,*

$$\varphi_{\mathrm{Z}_n}(u) = \mathrm{E}(e^{iu\mathrm{Z}_n}) = \mathrm{E}(\prod_{p=1}^{n} e^{i\frac{u}{n}\mathrm{X}_p}) = \prod_{p=1}^{n}\mathrm{E}(e^{i\frac{u}{n}\mathrm{X}_p}).$$

Les v.a.r. X_p étant identiquement distribuées, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $v \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(e^{iu\mathrm{X}_p}) = e^{iu\mathrm{X}_1} = \varphi_{\mathrm{X}_1}(u)$ et donc

$$\varphi_{\mathrm{Z}_n}(u) = \varphi^n_{\mathrm{X}_1}(\frac{u}{n}).$$

(b) Donner la loi de Z_n.

> **Corrigé** – *Comme* $\varphi_{X_1} = g$ *et que* $g(x)^n = g(nx)$*, on a* $\varphi_{Z_n} = \varphi_{X_1}$*. La loi de* Z_n *est donc la même que la loi de* X_1*, c'est-à-dire la loi de Cauchy (car deux v.a.r. qui ont même fonction caractéristique ont même loi).*

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{|X_n| > n\}$ et $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$. On pose aussi $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 2, montrer que

$$P(B_n^c) = \prod_{p \geq n} P(A_p^c) \leq \prod_{p \geq n} (1 - \frac{1}{p\pi}).$$

En déduire que $P(B_n^c) = 0$ et donc que $P(B_n) = 1$.

> **Corrigé** – *Comme* $B_n^c = \bigcap_{p=n}^{+\infty} A_p^c$*, on a aussi*
>
> $$B_n^c = \bigcap_{k=n}^{+\infty} C_k \textit{ avec } C_k = \bigcap_{p=n}^{k} A_p^c.$$
>
> *Comme* $C_{k+1} \subset C_k$ *pour tout* $k \geq n$*, la continuité décroissante de* P *donne*
>
> $$P(B_n^c) = \lim_{k \to +\infty} P(C_k).$$
>
> *Pour tout* p*, on a* $A_p^c \in \sigma(X_p)$*. Comme les v.a.r.* X_p *sont indépendantes, on a donc*
>
> $$P(C_k) = \prod_{p=n}^{k} P(A_p^c).$$
>
> *La question 2 donne* $P(A_p^c) = 1 - P(A_p) = 1 - \frac{1}{p\pi}$ *et donc*
>
> $$P(C_k) = \prod_{p=n}^{k} (1 - \frac{1}{p\pi}).$$
>
> *De l'égalité précédente on déduit que*
>
> $$\ln(P(C_k)) = \sum_{p=n}^{k} \ln(1 - \frac{1}{p\pi}).$$
>
> *Comme* $\lim_{p \to +\infty} p\pi \ln(1 - \frac{1}{p\pi}) = -1$*, le terme de droite de cette égalité tend vers* $-\infty$ *quand* $k \to \infty$*. On a donc* $\lim_{k \to +\infty} P(C_k) = 0$ *ce qui donne*
>
> $$P(B_n^c) = 0 \textit{ et donc } P(B_n) = 1.$$

(b) Montrer que $P(B) = 1$. [Cette question est une conséquence de la question (a) mais elle peut aussi être faite directement en appliquant le lemme de Borel-Cantelli et la question 2.]

Corrigé – *La suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante (c'est-à-dire* $B_{n+1} \subset B_n$ *pour tout n). On peut donc appliquer la propriété de continuité décroissante de* P. *On obtient*

$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 1.$$

(c) Soit $\omega \in B$. Montrer que $\frac{X_n(\omega)}{n} \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\omega \in B_n$. *Il existe donc* $p \geq n$ *t.q.* $\omega \in A_p$, *c'est-à-dire* $\frac{|X_p(\omega)|}{p} > 1$, *ceci montre bien que bien que* $\frac{X_n(\omega)}{n} \not\to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

(d) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que si la suite $(Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0.$$

[Écrire X_n en fonction de Z_n et Z_{n-1}.]

Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $X_n(\omega) = nZ_n(\omega) - (n-1)Z_{n-1}(\omega)$ *et donc*

$$\frac{X_n(\omega)}{n} = Z_n(\omega) - \frac{n-1}{n} Z_{n-1}(\omega).$$

Si la suite $(Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge (dans* $\mathbb{R}$*), on en déduit bien*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0.$$

(e) Déduire des trois questions précédentes que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas p.s. vers une limite finie quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *La conséquence des questions précédentes est que pour tout* $\omega \in B$, *la suite* $(Z_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne converge pas dans* $\mathbb{R}$. *Comme* $P(B) = 1$, *on a donc presque sûrement une non convergence de la suite* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$Z_{2n} - Z_n = \frac{U_n + V_n}{2},$$

où U_n et V_n sont deux v.a.r. indépendantes, de loi de Cauchy. En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.

Corrigé – *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$Z_{2n} - Z_n = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{2n}\sum_{i=n+1}^{2n} X_i = \frac{U_n}{2} + \frac{V_n}{2},$$

en posant

$$U_n = -Z_n \text{ et } V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} X_i.$$

Les v.a.r. U_n *et* V_n *sont indépendantes (voir la proposition 9.23) et ont pour loi la loi de Cauchy (c'est une conséquence de la question 4(b)). La question 4(b) donne aussi que la v.a.r.* $(1/2)(U_n + V_n)$ *a pour loi la loi de Cauchy. On obtient donc finalement que la v.a.r.* $Z_{2n} - Z_n$ *a pour loi la loi de Cauchy et la question 2 donne alors*

$$P(|Z_{2n} - Z_n| > 1) \geq \frac{1}{\pi}. \tag{10.14}$$

On en déduit que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *ne peut pas converger en probabilités. En effet, si* $Z_n \to Z$ *en probabilité (quand* $n \to +\infty$*), on a, par exemple,*

$$\{|Z_{2n} - Z_n| > 1\} \subset \{|Z_{2n} - Z| > \frac{1}{2}\} \cup \{|Z_n - Z| > \frac{1}{2}\},$$

et donc

$$P(\{|Z_{2n} - Z_n| > 1\}) \leq P(\{|Z_{2n} - Z| > \frac{1}{2}\}) + P(\{|Z_n - Z| > \frac{1}{2}\}).$$

Comme $Z_n \to Z$ *en probabilité, ceci donne*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{|Z_{2n} - Z_n| > 1\}) = 0,$$

en contradiction avec (10.14).

7. Pour quelles raisons ne peut-on appliquer, à la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, les lois forte et faible des grands nombres ?

   Corrigé – *La loi forte des grands nombres ne s'applique pas car la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas une suite de v.a.r. intégrables. La loi faible des grands nombres ne s'applique pas car la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas une suite de v.a.r. de carrés intégrables.*

Exercice 10.18 (Sur la loi d'un vecteur aléatoire) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d. Montrer que la loi de X est uniquement déterminée par la donnée des lois de toutes les v.a.r. $a \cdot X$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$. [On pourra utiliser la fonction caractéristique de X.]

Exercice 10.19 (Limite en loi de Gaussiennes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes. On suppose que X_n tend en loi vers X, quand $n \to +\infty$. On note m_n l'espérance de X_n et σ_n^2 la variance de X_n (avec $\sigma_n \geq 0$). Si $\sigma_n > 0$, la v.a.r. X_n a donc pour loi une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-m_m)^2}{2\sigma_n^2}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\sigma_n = 0$, la loi de X_n est δ_{m_n}.

Si Z est une v.a.r., on note φ_Z la fonction caractéristique de Z (on rappelle que φ_Z est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et que $\varphi_Z(0) = 1$). On rappelle que la fonction caractéristique de X_n est

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} e^{im_n t} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Soit Z une v.a.r.. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ t.q. $|\varphi_Z(t)| > 0$.

   Corrigé – *La fonction* φ_Z *est continue sur* $\mathbb{R}$*, elle donc continue en* 0*. Comme* $\varphi_Z(0) = 1$*, la fonction* φ_Z *est donc non nulle au voisinage de* 0*. Il existe donc* $t \neq 0$ *t.q.* $|\varphi_Z(t)| \neq 0$.

2. Montrer que la suite $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser la convergence de $|\varphi_{X_n}(t)|$ vers $|\varphi_X(t)|$ pour t bien choisi.]

   Corrigé – *On choisit* $t \neq 0$ *t.q.* $|\varphi_X(t)| > 0$ *(ce qui est possible grâce à la première question). Comme* $X_n \to X$ *en loi quand* $n \to +\infty$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ *et donc*

$$e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} = |\varphi_{X_n}(t)| \to |\varphi_X(t)| \text{ quand } n \to +\infty.$$

   Comme la fonction ln *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n^2}{2}t^2 = -\ln(|\varphi_X(t)|)$$

   et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 \text{ avec } \sigma^2 = -\frac{2\ln(|\varphi_X(t)|}{t^2} \in \mathbb{R}_+.$$

3. Calculer $P(\{X_n \geq m_n\})$ et $P(\{X_n \leq m_n\})$ et en déduire que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. [On pourra utiliser le fait que la suite $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, d'après la proposition 9.20.]

   Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $\sigma_n = 0$*, on a* $P_{X_n} = \delta_{m_n}$ *et* $P(\{X_n \geq m_n\}) = P(\{X_n \leq m_n\}) = 1$.
   Si $\sigma_n \neq 0$*, On a*

$$P(\{X_n \geq m_n\}) = \int_{m_n}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-m_m)^2}{2\sigma_n^2}}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}.$$

   On a de même $P(\{X_n \leq m_n\}) = 1/2$.

   Comme $X_n \to X$ *en loi, la proposition 9.20 donne que la suite* $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est tendue. Il existe donc* $a > 0$ *(ne dépendant de* n*) t.q.* $P(\{X_n \geq a\}) < 1/2$ *et* $P(\{X_n \geq -a\}) < 1/2$*. On en déduit que* $-a < m_n < a$*. La suite* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc bornée.*

4. Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En déduire que X est une v.a.r. gaussienne.

   Corrigé – *Soit* $t \in \mathbb{R}$*, comme* $\lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ *et que* $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$ *(donné à la deuxième question) on a*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{im_n t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}t^2}\varphi_X(t).$$

   Si m *et* μ *sont deux valeurs d'adhérence de la suite* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on a donc* $e^{imt} = e^{i\mu t}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Ceci est impossible si* $m \neq \mu$ *(car, si* $m \neq \mu$*, en prenant* $t = \pi/(m-\mu)$ *on a* $e^{i(m-\mu)t} = e^{i\pi} = -1 \neq 1$*). On a donc* $m = \mu$*. La suite* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc une*

suite (réelle) bornée ayant une seule valeur d'adhérence, ce qui montre qu'elle est convergente dans $\mathbb{R}$.

On pose $m = \lim_{n\to+\infty} m_n$*, on a alors* $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}e^{imt}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Ceci montre que* X *est une v.a.r. gaussienne et* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 10.20 (Caractérisation de $X = 0$ **p.s.)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Si Z est une v.a.r., on note φ_z la fonction caractéristique de Z, c'est-à-dire $\varphi_Z(t) = E(e^{iZt})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$. On suppose que $\varphi_X(t) = 1$ pour tout $t \in [-a, a]$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in [-a, a]$, $\displaystyle\int_\Omega [1 - \cos(tX(\omega))]dp(\omega) = 0$.
   (b) Montrer que $X = 0$ p.s..
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
   (a) Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.
   (b) On suppose maintenant que $X + Y$ et Y ont même loi. Montrer que $X = 0$ p.s..

Exercice 10.21 (Indépendance et variables gaussiennes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r.i.i.d. t.q. $E(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$.

On rappelle une caractérisation de l'indépendance avec les fonctions caractéristiques, donnée dans la proposition 10.21 : Soit Z_1, Z_2 deux v.a.r., on note Z le v.a. (de dimension 2) dont les composantes sont Z_1 et Z_2. Les v.a.r. Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si les fonctions caractéristiques de Z, Z_1 et Z_2 (notées φ_Z, φ_{Z_1} et φ_{Z_2}) vérifient $\varphi_Z(u_1, u_2) = \varphi_{Z_1}(u_1)\varphi_{Z_2}(u_2)$ pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que X et Y sont des v.a.r. gaussiennes. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont des v.a.r. indépendantes. [On pourra utiliser le rappel.]

   On suppose maintenant, pour toute la suite de l'exercice, que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. Le but des questions suivantes est de démontrer que X et Y sont des variables gaussiennes. On note toujours φ_X la fonction caractéristique de X.
2. Montrer que $\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi_X(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$. [Utiliser $E(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ et un développement limité des fonctions cos et sin.]
3. Montrer que $\varphi_X(2t) = \varphi_X(t)^3\varphi_X(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ [Utiliser l'indépendance de $X + Y$ et $X - Y$]. Montrer que $\varphi_X(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Soit $\rho(t) = \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(-t)}$. Montrer que $\rho(t) = \rho(t/2^k)^{2^k}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ [utiliser la question 2]. Montrer que φ_X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que $\varphi_X(t+s)\varphi_X(t-s) = \varphi_X(t)^2\varphi_X(s)^2$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$. En déduire que $\varphi_X(nt) = \varphi_X(t)^{n^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que X (et donc aussi Y) est une v.a.r. gaussienne.

Exercice 10.22 (Une C.S. pour que deux v.a.r. suivent une loi normale) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé de X une v.a.r. telle $E(X) = 0$ et $E(X^2) < +\infty$. On note ϕ la fonction caractéristique de X.

1. Quelle régularité minimale a-t-on sur ϕ ? (plus précisément peut t-on assurer que ϕ est continue ? de classe C^1 ? de classe C^2 ?). Quelle est la valeur de $\phi(0)$? Quelle est la valeur de $\phi'(0)$?

Corrigé – $\phi(t) = E(e^{iXt}) = \int_\Omega e^{iX(\omega)t} dP(\omega)$. *Comme* $E(X^2) < +\infty$, *les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégrale donnent que* $\phi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\phi'(t) = iE(Xe^{iXt})$, $\phi''(t) = -E(X^2e^{iXt})$.
$\phi(0) = 1$ *et, comme* $E(X) = 0$, $\phi'(0) = 0$.

On se donne maintenant une deuxième v.a.r., notée Y, de même loi que X. On suppose que X et Y sont indépendantes et que les v.a.r. $X+Y$ et $X-Y$ sont aussi indépendantes. On pose $\sigma^2 = E(X^2)$.

2. Montrer que $E((X-Y)^2e^{it(X+Y)}) = 2\sigma^2\phi(t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On utilise l'indépendance de* $(X-Y)$ *et* $(X+Y)$ *puis l'indépendance de* X *et* Y, *ceci donne*

$$\begin{aligned} E((X-Y)^2e^{it(X+Y)}) &= E((X-Y)^2)E(e^{it(X+Y)}) \\ &= E(X^2+Y^2-2XY)E(e^{itX})E(e^{itY}) \\ &= (E(X^2)+E(Y^2)-2E(X)E(Y))E(e^{itX})E(e^{itY}). \end{aligned}$$

Enfin, comme $E(X) = E(Y) = 0$, $E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2$ *et* $E(e^{itX}) = E(e^{itY}) = \phi(t)$ *(car* Y *a même loi que* X*), on obtient* $E((X-Y)^2e^{it(X+Y)}) = 2\sigma^2\phi(t)^2$.

3. Montrer que $-\phi''(t)\phi(t) + \phi'(t)^2 = \sigma^2\phi(t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *On utilise une nouvelle fois l'indépendance de* X *et* Y *et le fait que* X *et* Y *ont même loi.*

$$\begin{aligned} E((X-Y)^2e^{it(X+Y)}) &= E(X^2e^{itX}e^{itY}) + E(Y^2e^{itX}e^{itY}) - 2E(XYe^{itX}e^{itY}) \\ &= E(X^2e^{itX})E(e^{itY})) + E(Y^2e^{itY})E(e^{itX})) - 2E(Xe^{itX})E(Ye^{itY}) \\ &= -2\phi''(t)\phi(t) + 2\phi'(t)^2. \end{aligned}$$

Avec la question précédente, ceci donne bien le résultat désiré.

4. Montrer que la loi de X est la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Corrigé – *La fonction ϕ est donc solution d'une équation différentielle (du 2eme ordre) avec condition initiale qui s'écrit :*

$$-\phi''(t)\phi(t)+\phi'(t)^2=\sigma^2\phi(t)^2,\ t\in\mathbb{R},$$
$$\phi(0)=1,\ \phi'(0)=0.$$

D'aprè le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les systèmes différentiels, ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Cette solution est globale (c'est-à-dire définie sur tout $\mathbb{R}$) sauf si $\phi(t)$ s'annule au bord de l'intervalle d'existence de cette solution maximale ou si la norme du couple $(\phi(t),\phi'(t))$ tend vers $+\infty$ au bord de l'intervalle d'existence de cette solution maximale.

Ici, on remarque que la fonction ϕ définie par $\phi(t)=e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$ (pour tout $t\in\mathbb{R}$) est solution de ce problème de Cauchy. C'est donc l'unique solution de ce problème.

Cette fonction est bien la fonction caractéristique d'une v.a.r. donc la loi est $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, ce qui prouve que la loi de X est la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Chapitre 11

Espérance conditionnelle et martingales

A l'origine, une martingale est une technique utilisée par les joueurs dans les jeux de hasard pour tenter d'infléchir le hasard en leur faveur, avec cependant peu de réussite en pratique ! Nous allons ici donner une introduction à la théorie des martingales en probabilités.

11.1 Espérance conditionnelle

Nous commençons par définir l'espérance conditionnée par une tribu.

Définition 11.1 (Espérance conditionnelle d'une v.a.r.) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* X *une v.a.r. intégrable et* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$*. On appelle espérance conditionnée par* $\mathcal{B}$ *de* X*, ou espérance conditionnelle de* X *par rapport à* $\mathcal{B}$ *ou encore espérance de* X *sachant* $\mathcal{B}$*, l'ensemble des applications* Z *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{B}$*-mesurables, intégrables et t.q. :*

$$\mathrm{E}(\mathrm{ZU}) = \mathrm{E}(\mathrm{XU}) \text{ pour toute application } \mathrm{U} : \Omega \to \mathbb{R}, \ \mathcal{B}\text{-mesurable, bornée.} \quad (11.1)$$

On note $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ *cette espérance conditionnelle (qui est donc un ensemble de fonctions, on montre plus loin que c'est un élément de* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$*). Noter que dans (11.1), les applications* ZU *et* XU *sont bien des v.a.r. intégrables.*

Cette définition peut sembler un peu abrupte. On montre dans la proposition 11.2 que, sous les hypothèses de la définition 11.1, l'espérance conditionnelle existe, c'est-à-dire que l'ensemble $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ est non vide, et que $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ est unique, ceci signifiant que

si $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B})$, on a nécessairement $Z_1 = Z_2$ p.s.. En fait, $E(X|\mathcal{B})$ est donc un élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

L'ensemble $E(X|\mathcal{B})$, défini dans la définition 11.1, est donc un ensemble de v.a.r. (car Z $\mathcal{B}$-mesurable implique Z $\mathcal{A}$-mesurable) et, en pratique, on confond, comme d'habitude, cet ensemble avec l'un de ces éléments (on confond un élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ avec l'un de ses représentants). Si Z est une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable intégrable et t.q. $E(ZU) = E(XU)$ pour toute v.a.r. U $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on écrira donc $Z = E(X|\mathcal{B})$ p.s. au lieu d'écrire $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Avant de démontrer l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle, donnons quelques exemples simples. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. intégrable.

Cas $\mathcal{B}$ est la tribu grossière. Prenons tout d'abord $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$. Il est alors facile de voir (exercice 11.1) que $E(X|\mathcal{B})$ est réduit à un seul élément et que cet élément est la fonction constante et égale à $E(X)$.

Cas $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Si maintenant $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, alors $E(X \mid B) = X$ p.s.. Plus précisément, $E(X|\mathcal{B})$ est ici l'ensemble des v.a.r. Z t.q. $Z = X$ p.s., c'est-à-dire X en tant que élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Cas où $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, $0 < P(A) < 1$. Soit maintenant $A \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P(A) < 1$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ (qui est bien une tribu incluse dans $\mathcal{A}$). On peut ici montrer (exercice 11.1) que $E(X|\mathcal{B})$ est réduit à un seul élément et cet élément est la fonction Z définie par :

$$Z = \frac{E(X1_A)}{P(A)} 1_A + \frac{E(X1_{A^c})}{P(A^c)} 1_{A^c}.$$

La quantité $\frac{E(X1_A)}{P(A)}$ s'appelle espérance de X sachant A. On a ainsi fait le lien entre espérance de X sachant un événement et espérance de X par rapport à une tribu (ou selon une tribu).

Cas où $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$, $P(B) = 1$. On prend $B \in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) = 1$ et $B^c \neq \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si P est une mesure diffuse, que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que B^c est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points de Ω). On prend encore $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $Z_a = E(X)1_B + a1_{B^c}$. On peut alors montrer, pour être précis, que $E(X|\mathcal{B}) = \{Z_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ (exercice 11.2) c'est-à-dire que $E(X|\mathcal{B})$ est la fonction constante et égale à $E(X)$ en tant que élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$, ce qu'on écrit, avec la confusion habituelle entre un élément de L^1 et l'un de ses représentants, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s..

On montre maintenant l'existence et l'unicité de l'espérance, conditionnée par une tribu, d'une v.a.r. intégrable.

Proposition 11.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$. *Soit* X *une v.a.r. intégrable. Alors :*

(Existence) $E(X|\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

(Unicité) $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B}) \Rightarrow Z_1 = Z_2$ *p.s.*.

DÉMONSTRATION – On démontre d'abord l'unicité de $E(X|\mathcal{B})$. Puis, on démontre l'existence de $E(X|\mathcal{B})$ si X est de carré intégrable, puis l'existence si X est positive (et intégrable) et enfin l'existence si X est seulement intégrable. En fait, la démonstration de l'existence si X est de carré intégrable n'est pas utilisée pour la suite de la démonstration mais elle est éventuellement intéressante pour la compréhension de l'espérance conditionnelle.

Unicité. Soit $Z_1, Z_2 \in E(X|\mathcal{B})$. On pose $U = \text{sign}(Z_1 - Z_2)$ (on rappelle que la fonction sign est définie par $\text{sign}(s) = -1$ si $s < 0$, $\text{sign}(s) = 1$ si $s > 0$ et (par exemple) $\text{sign}(0) = 0$). Comme la fonction sign est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(Z_1 - Z_2)$ est $\mathcal{B}$-mesurable, la fonction U est bien $\mathcal{B}$-mesurable. Elle est aussi bornée, on a donc en utilisant la définition de l'espéérance conditionnelle (11.1) avec $Z = Z_1$ et $Z = Z_2$, on obtient

$$E(XU) = E(Z_1 U) \text{ et } E(XU) = E(Z_2 U).$$

Ceci donne $E((Z_1 - Z_2)U) = 0$ et donc $E(|Z_1 - Z_2|) = 0$. On en déduit $Z_1 = Z_2$ p.s..

Existence si X **est de carré intégrable.** On note $P_{\mathcal{B}}$ la restriction de P (qui est une mesure sur $\mathcal{A}$) à $\mathcal{B}$ (tribu incluse dans $\mathcal{A}$). La mesure $P_{\mathcal{B}}$ est donc une probabilité sur $\mathcal{B}$. On note H l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ et, pour $V \in H$, on pose :

$$T(V) = \int_\Omega XV dP.$$

Il est clair que T(V) est bien définie. En étant précis, on remarque que $T(V) = \int_\Omega Xv dP$, où $v \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ est un représentant de V (et cette quantité ne dépend pas du représentant choisi). C'est pour définir T que nous avons besoin que X soit de carré intégrable.

L'application T est linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$ (et on a $\|T\| \leq \|X\|_2$). On peut donc appliquer le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert (théorème 6.56), qui donne l'existence de $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$ t.q. :

$$T(V) = \int_\Omega ZV dP \text{ pour tout } V \in H. \tag{11.2}$$

Comme $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, la fonction Z est bien $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable (elle est même de carré intégrable). On montrer maintenant que Z vérifie la propriété (11.1) (et donc que $Z \in E(X|B)$). Soit U une application $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$. On a $U \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, on peut donc utiliser (11.2) avec pour V la classe de U et on obtient

$$E(XU) = T(V) = \int_\Omega ZV dP = E(ZU).$$

L'application Z vérifie donc bien la propriété (11.1), ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Plus précisément, un développement du raisonnement ci–avant (que les courageux peuvent faire) permet d'interpréter l'application $X \mapsto E(X|\mathcal{B})$ comme l'opérateur de

projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans le sous–espace vectoriel fermé formé à partir de $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P_\mathcal{B})$.

Existence si X **est positive et intégrable.** On utilise ici le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78, qui se démontre d'ailleurs avec le théorème de Riesz dans les espaces de Hilbert, théorème 6.56). On note toujours $p_\mathcal{B}$ la restriction de P à $\mathcal{B}$ (de sorte que $P_\mathcal{B}$ est une probabilité sur $\mathcal{B}$).

Pour $B \in \mathcal{A}$, on pose $m(A) = \int_\Omega X 1_A dP$. On définit ainsi une mesure finie, m, sur $\mathcal{A}$, c'est la mesure de densité X par rapport à P. On note maintenant $m_\mathcal{B}$ la restriction de cette mesure à la tribu $\mathcal{B}$. La mesure $m_\mathcal{B}$ est absolument continue par rapport à la mesure $P_\mathcal{B}$ (car $B \in \mathcal{B}$, $P_\mathcal{B}(B) = 0$ implique que $P(B) = 0$ et donc $X 1_B = 0$ p.s. et donc $m(B) = 0$ et donc $m_\mathcal{B}(B) = 0$). Le théorème de Radon-Nikodym (théorème 6.78) donne alors l'existence de Z, $\mathcal{B}$-mesurable positive, t.q. $m_B = ZP_\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que $m_\mathcal{B}$ est la mesure sur $\mathcal{B}$ de densité Z par rapport à $P_\mathcal{B}$).

La fonction Z est intégrable car

$$\int_\Omega Z dP = \int_\Omega Z dP_B = m_\mathcal{B}(\Omega) = m(\Omega) = E(X) < +\infty \text{ (et } E(Z) = E(X)).$$

Il reste à montrer que Z vérifie la propriété (11.1) (ce qui donne que $Z \in E(X|B)$). On remarque tout d'abord que

$$E(Z 1_B) = \int_\Omega Z 1_B dP = m_\mathcal{B}(B) = \int_\Omega X 1_B dP = E(X 1_B) \text{ pour tout } B \in \mathcal{B}$$

. Par linéarité positive, on a donc, pour toute fonction $\mathcal{B}$-étagée positive,

$$E(ZU) = \int_\Omega ZU dP = \int_\Omega ZU dP_\mathcal{B} = \int_\Omega U dm = \int_\Omega UX dP = E(XU). \quad (11.3)$$

Par convergence monotone, on en déduit alors que (11.3) est encore vraie pour toute fonctions $\mathcal{B}$-mesurable positive. Enfin, en utilisant $U = U^+ - U^-$ (et en remarquant que ZU et XU sont intégrables), on conclut que (11.3) est vraie pour toute fonction U $\mathcal{B}$-mesurable bornée de Ω dans $\mathbb{R}$. (On a ici repris un argument vu dans la remarque 6.75.) L'application Z vérifie donc la propriété (11.1), ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

Existence si X **est seulement intégrable.** Comme les fonctions X^+ et X^- sont positives et intégrables, il existe $Z_1 \in E(X^+|\mathcal{B})$ et $Z_2 \in E(X^-|\mathcal{B})$. On pose $Z = Z_1 - Z_2$. L'application Z est $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable (car Z_1 et Z_2 le sont) et, pour tout fonction U $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on a :

$$E(ZU) = E(Z_1 U) - E(Z_2 U) = E(X^+ U) - E(X^- U) = E(XU).$$

L'application Z vérifie donc la propriété (11.1), ce qui prouve que $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une tribu incluse dans $\mathcal{A}$. On a défini l'espérance, conditionnée par $\mathcal{B}$, d'une v.a.r. intégrable. On va maintenant montrer qu'on peut étendre la définition à des v.a.r. qui ne sont pas intégrables mais qui sont positives (la démonstration est déjà essentiellement dans la démonstration de la proposition 11.2). Pour cela, on va commencer par donner une p.s.-caractérisation de

$E(X|B)$ lorsque X est une v.a.r. positive et intégrable. Cette caractérisation n'utilisant pas l'intégrabilité de X on aura ainsi une définition de $E(X|\mathcal{B})$ lorsque X est une v.a.r. positive. Ceci est fait dans la proposition 11.3 et la définition 11.4.

Proposition 11.3 (Caractérisation de l'espérance conditionnelle d'une v.a.r. positive) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$.

1. *Soit* X *une v.a.r. intégrable positive. Alors,* $Z \in E(X|\mathcal{B})$ *si et seulement si* Z *est* $\mathcal{B}$*-mesurable, intégrable,* ≥ 0 *p.s. et t.q. :*

$$E(ZU) = E(XU), \tag{11.4}$$

   pour toute application U *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{B}$*-mesurable et positive.*

2. *Soit* X *une v.a.r. positive. On note* $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ *l'ensemble des applications* $\mathcal{B}$*-mesurables positives vérifiant la propriété (11.4). On a alors :*

   (a) (Existence) $\bar{E}(X|\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

   (b) (Unicité) $Z_1, Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B}) \Rightarrow Z_1 = Z_2$ *p.s..*

DÉMONSTRATION – On commence par montrer le premier item. Si $Z \in E(X|\mathcal{B})$, la fonction Z est bien $\mathcal{B}$-mesurable intégrable et vérifie la propriété(11.1). Elle vérifie donc la propriété (11.4) en ajoutant l'hypothèse U bornée. Pour montrer que $Z \geq 0$ p.s., on prend $U = 1_B$ avec $B = \{Z < 0\}$ (U est bien $\mathcal{B}$-mesurable bornée). On obtient $E(ZU) = E(XU) \geq 0$. Comme $ZU \leq 0$, on a donc $ZU = 0$ p.s. et donc $Z \geq 0$ p.s.. Enfin, pour montrer que Z vérifie la propriété (11.4) (c'est-à-dire avec U $\mathcal{B}$-mesurable positive mais non nécessairement bornée), il suffit d'utiliser le théorème de convergence monotone (théorème 4.17) en introduisant $U_n = U1_{B_n}$ avec, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{U \leq n\}$.

Réciproquement, si Z est $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable, ≥ 0 p.s. et vérifie la propriété (11.4) ; il est facile de voir que Z vérifie (11.1). En effet, si U est $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on utilise (11.4) avec les parties positive et négative de U pour obtenir (11.1). Donc, $Z \in E(X|\mathcal{B})$.

On montre maintenant le deuxième item de la proposition.

Existence

On reprend la démonstration de la proposition 11.2. On rappelle que $p_{\mathcal{B}}$ est la restriction de P à $\mathcal{B}$, $m = XP$ (c'est-à-dire la mesure de densité X par rapport à P) et $m_{\mathcal{B}}$ est la restriction de m à $\mathcal{B}$. La mesure $m_{\mathcal{B}}$ est absolument continue par rapport à la mesure $P_{\mathcal{B}}$. La mesure m n'est pas finie si X n'est pas intégrable. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème 6.78 (qui demande que $m_{\mathcal{B}}$ soit finie). Pour résoudre cette petite difficulté, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ $m_n = X1_{\{n \leq X < n+1\}}$ (qui est une mesure sur $\mathcal{A}$) et $m_{n,\mathcal{B}}$ sa restriction $\mathcal{B}$. La mesure $m_{n,\mathcal{B}}$ est absolument continue par rapport à la mesure $P_{\mathcal{B}}$ et est finie. Le théorème de Radon-Nikodym donne alors l'existence de Z_n, $\mathcal{B}$-mesurable positive, t.q. $m_{n,\mathcal{B}} = Z_n P_{\mathcal{B}}$. On pose alors $Z = \sum_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. La fonction Z est $\mathcal{B}$-mesurable positive, il reste à montrer que Z vérifie la propriété (11.4) (ce qui

donnera que $Z \in \bar{E}(X|B)$). Soit U une application $\mathcal{B}$-mesurable positive de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E(Z_n U) = \int_\Omega Z_n U dP = \int_\Omega Z_n U dP_{\mathcal{B}} = \int_\Omega U dm_{n,\mathcal{B}} = \int_\Omega UX1_{\{n \le X < n+1\}} dP.$$

En sommant cette dernière égalité pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient (par le corollaire 4.18 sur les séries à termes positifs)

$$E(ZU) = E(XU).$$

L'application Z vérifie donc la propriété (11.4), ce qui prouve que $Z \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$.

Unicité

Soit $Z_1, Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$. prenons $U = (\text{sign}(Z_1 - Z_2))^+$ (qui est bien $\mathcal{B}$-mesurable et positive). On a donc, par la propriété (11.4),

$$E(Z_1 U) = E(Z_2 U) = E(XU),$$

mais on ne peut rien en déduire car il est possible que $E(XU) = +\infty$. On va donc modifier légèrement U. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B_n = \{Z_1 \le n\} \cap \{Z_2 \le n\} \text{ et } U_n = U1_{B_n}.$$

L'application U_n est encore $\mathcal{B}$-mesurable et positive ; comme $Z_1, Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$, la propriété (11.4) donne $E(Z_1 U_n) = E(Z_2 U_n)$. On a donc

$$0 \le E(Z_1 U_n) = E(Z_2 U_n) \le n,$$

d'où l'on déduit que $E((Z_1 - Z_2)U_n) = 0$. Mais, $(Z_1 - Z_2)U_n \ge 0$. En faisant tendre n vers l'infini, le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) donne $E((Z_1 - Z_2)U) = 0$, c'est-à-dire $E((Z_1 - Z_2)^+) = 0$ et donc $Z_1 \le Z_2$ p.s.. En changeant les rôles de Z_1 et Z_2 on a aussi $Z_2 \le Z_1$ p.s.. D'où $Z_1 = Z_2$ p.s.. ■

Définition 11.4 (Espérance conditionnelle d'une v.a.r. positive) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* X *une v.a.r. positive et* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$. *On appelle espérance conditionnée par* $\mathcal{B}$ *de* X *ou espérance conditionnelle de* X *par rapport à* $\mathcal{B}$*, l'ensemble des applications* Z *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*,* $\mathcal{B}$*-mesurables, positives et t.q. :*

$$E(ZU) = E(XU), \forall U : \Omega \to \mathbb{R}, \ \mathcal{B} - \textit{mesurable et positive}. \tag{11.5}$$

On note $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ *cette espérance conditionnelle (c'est donc un ensemble de fonctions). (Noter que dans (11.5), les applications* ZU *et* XU *sont bien des v.a.r. positives, leur intégrale sur* Ω *est donc bien définie et appartient à* $\bar{\mathbb{R}}_+$*).*

La proposition 11.3 nous donne l'existence et l'unicité (p.s.) de l'espérance conditionnelle lorsque X est une v.a.r. positive. Sous les hypothèses de la définition 11.4, si X est de plus intégrable, on a donc deux définitions de l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$, notée $E(X|\mathcal{B})$ et $\bar{E}(X|\mathcal{B})$. La proposition 11.3 montre que $Z_1 \in E(X|\mathcal{B})$ et $Z_2 \in \bar{E}(X|\mathcal{B})$ implique $Z_1 = Z_2$ p.s.. En pratique, comme on confond $E(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ces éléments et $\bar{E}(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ces éléments, on a donc $E(X|\mathcal{B}) = \bar{E}(X|\mathcal{B})$

p.s.. Il est donc inutile de conserver la notation $\bar{\mathrm{E}}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ et on conservera la notation $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ dans les deux cas, c'est-à-dire "X v.a.r. intégrable" et "X v.a.r. positive".

Nous donnons maintenant quelques propriétés de l'espérance conditionnelle.

Remarque 11.5 (Linéarité de l'espérance conditionnelle) Un première propriété de l'espérance conditionnelle est sa linéarité. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ et $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ deux v.a.r. intégrables. On pose $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathcal{B})$ et $\mathrm{Z}_2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}_2|\mathcal{B})$ (plus précisément, Z_1 et Z_2 sont des représentants de $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathcal{B})$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2|\mathcal{B})$). Soit U une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable bornée, on a

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}_1\mathrm{U}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1\mathrm{U}) \text{ et } \mathrm{E}(\mathrm{Z}_2\mathrm{U}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_2\mathrm{U}).$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathrm{E}((\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2)\mathrm{U}) = \mathrm{E}((\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2)\mathrm{U})$. Ceci prouve que $\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2|\mathcal{B})$ p.s. et donc que

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2|\mathcal{B}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathcal{B}) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_2|\mathcal{B}) \text{ p.s..}$$

Proposition 11.6 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$ *et* X *une v.a.r.. Soit* $p \in]1, \infty]$ *et* q *le nombre conjugué de* p *(i.e.* $q = p/(p-1)$ *si* $p < +\infty$ *et* $q = 1$ *si* $p = \infty$*). On suppose que* $\mathrm{X} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$*. Soit* $\mathrm{Z} = \mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ *p.s.. Alors,* $\mathrm{Z} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *et* $\mathrm{E}(\mathrm{ZU}) = \mathrm{E}(\mathrm{XU})$ *pour toute application* U *(de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*)* $\mathcal{B}$*-mesurable telle que* $|\mathrm{U}|^q$ *soit intégrable.*

DÉMONSTRATION – La démonstration fait partie de l'exercice 11.6. En fait, le cas $p = 2$ a déjà été vu dans la démonstration de la proposition 11.2. ■

Proposition 11.7 (Inégalité de Jensen généralisée) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $\mathcal{B}$ *une tribu incluse dans* $\mathcal{A}$ *et* X *une v.a.r. de carré intégrable. Soit* φ *une fonction convexe de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi(\mathrm{X})$ *est intégrable. On a alors*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X})|\mathcal{B}) \geq \varphi(\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})) \textit{ p.s..}$$

DÉMONSTRATION – D'après le lemme 11.8 donné ci–après, comme φ est convexe, il existe c, fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q., pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \geq c(a)(x-a)$.

Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ p.s. (plus précisément, Z est un représentant de $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$). On a donc pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\varphi(\mathrm{X}(\omega)) - \varphi(\mathrm{Z}(\omega)) \geq c(\mathrm{Z}(\omega))(\mathrm{X}(\omega) - \mathrm{Z}(\omega)). \tag{11.6}$$

On aimerait intégrer cette inégalité sur un élément (bien choisi) de $\mathcal{B}$ mais cela n'est pas possible car les v.a.r. $\varphi(\mathrm{Z})$ et $c(\mathrm{Z})(\mathrm{X}-\mathrm{Z})$ peuvent ne pas être intégrables (bien que

Z et X soient intégrables). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit donc $A_p = \{|Z| \le p\}$ de sorte que les v.a.r. $1_{A_p} c(Z)(X - Z)$ et $1_{A_p} \varphi(Z)$ sont intégrables (noter que $c(Z)$ est bornée sur A_p car c est croissante). On pose aussi

$$A = \{E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z) < 0\} \text{ et } B_p = A_p \cap A.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité (11.6) donne $1_{B_p}(\varphi(X) - \varphi(Z)) \ge 1_{B_p} c(Z)(X - Z)$ et donc, en intégrant sur Ω :

$$\int_{B_p} (\varphi(X) - \varphi(Z)) dP \ge \int_{B_p} c(Z)(X - Z) dP. \tag{11.7}$$

Comme Z et $E(\varphi(X)|\mathcal{B})$ sont $\mathcal{B}$-mesurables, on a $B_p \in \mathcal{B}$ (et donc 1_{B_p} est $\mathcal{B}$-mesurable). On a aussi $c(Z)$ $\mathcal{B}$-mesurable (car c est borélienne) et donc $1_{B_p} c(Z)$ $\mathcal{B}$-mesurable. On en déduit :

$$\int_{B_p} c(Z)(X - Z) dP = E(1_{B_p} c(Z)(X - Z)) = 0 \text{ (car } Z \in E(X|\mathcal{B})),$$

et

$$\int_{B_p} (\varphi(X) - \varphi(Z)) dP = E(1_{B_p}(\varphi(X) - \varphi(Z))) = E\Big(1_{B_p}(E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z))\Big).$$

Avec (11.7), on en déduit :

$$\int_{B_p} (E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z)) dP \ge 0.$$

Comme $E(\varphi(X)|\mathcal{B}) - \varphi(Z) < 0$ sur B_p (car $B_p \subset A$), on a donc $P(B_p) = 0$ et donc $P(A) = P(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} B_p) = 0$, ce qui donne bien $E(\varphi(X)|\mathcal{B}) \ge \varphi(Z)$ p.s.. ■

Voici maintenant le lemme utilisé dans la démonstration précédente.

Lemme 11.8 *Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe alors c, fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (et donc fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q., pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \ge c(a)(x - a)$.*

DÉMONSTRATION – Si φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction c existe et est unique, elle est donnée par $c = \varphi'$. L'existence de c est légèrement plus difficile si φ n'est pas dérivable sur tout $\mathbb{R}$ (et on perd l'unicité de c).

Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère le fonction $h_a : x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}$ qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. La convexité de φ permet de montrer que h_a est croissante (c'est-à-dire que $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $x > y \Rightarrow h_a(x) \ge h_a(y)$). La fonction h_a a donc une limite à gauche (et à droite) en tout point, y compris au point a. On pose (par exemple) :

$$c(a) = \lim_{x \to a, x < a} h_a(x).$$

Il est facile de vérifier que la fonction c ainsi définie est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie, pour tout $x, a \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \varphi(a) \ge c(a)(x - a)$. ■

On définit maintenant l'espérance conditionnelle par rapport à une v.a.r. ou un v.a.

Définition 11.9 (Espérance conditionnellement à une v.a.r) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X *une v.a.r. (ou un v.a. de dimension* d*,* $d \geq 1$*). Soit* Y *une v.a.r. intégrable ou une v.a.r. positive. On appelle espérance conditionnée par* X *de* Y" *ou espérance conditionnelle de* Y *par rapport à* X" *(ou espérance de* Y *sachant* X*) l'ensemble* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\sigma(\mathrm{X}))$*, où* $\sigma(\mathrm{X})$ *est la tribu engendrée par* X*. On note* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$ *cette espérance conditionnelle, de sorte que* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}|\sigma(\mathrm{X}))$*. (L'ensemble* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$ *est donc un ensemble de v.a.r. et, comme d'habitude, on confond* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$ *avec l'un de ces éléments.)*

Pour caractériser $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$ (sous les hypothèses de la définition 11.9) et pour calculer cette espérance conditionnelle, on utilise, en général, le théorème 3.31 que nous rappelons sous une forme légèrement plus précise (donnée dans la démonstration du théorème 3.31).

Théorème 11.10 (Mesurabilité d'une v.a.r. par rapport à une autre) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v.a.r.. On note* $\sigma(\mathrm{X})$ *la tribu engendrée par* X*. Alors :*

— *La v.a.r.* Y *est* $\sigma(\mathrm{X})$*-mesurable si et seulement s'il existe* f*, fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$.

— *La v.a.r.* Y *est* $\sigma(\mathrm{X})$*-mesurable bornée si et seulement s'il existe* f*, fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$.

— *La v.a.r.* Y *est* $\sigma(\mathrm{X})$*-mesurable positive si et seulement s'il existe* f*, fonction borélienne positive de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème est donnée dans la démonstration du théorème 3.31. ■

Voici une conséquence immédiate de ce théorème, utilisée pour calculer $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$

Proposition 11.11 (Calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$**)** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* X, Y *deux v.a.r.. Soit* Z *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*.*

1. *On suppose que* Y *est intégrable. Alors,* $\mathrm{Z} \in \mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$ *si et seulement s'il existe* ψ *application borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $\mathrm{Z} = \psi(\mathrm{X})$*,* $\psi(\mathrm{X})$ *est intégrable et*

$$\mathrm{E}(\psi(\mathrm{X})\varphi(\mathrm{X})) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}\varphi(\mathrm{X})), \tag{11.8}$$

pour toute application φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, borélienne bornée.*

2. *On suppose que* Y *est positive. Alors,* $Z \in E(Y|X)$ *si et seulement s'il existe* ψ *application borélienne positive de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $Z = \psi(X)$ *et*

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)), \tag{11.9}$$

pour toute application φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, borélienne positive.*

DÉMONSTRATION –
La démonstration est une conséquence facile du théorème 11.10. ■

La conséquence de la proposition 11.11 est que (sous les hypothèses de la proposition) l'on cherche E(Y|X) sous la forme d'une fonction $\psi(X)$ (avec ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) vérifiant (11.8) (ou (11.9)). On raisonne, en général, par condition nécessaire sur ψ et, comme on sait que E(X|Y) existe, il est même inutile de vérifier que la fonction $\psi(X)$ que l'on trouve (qui est, en général, définie p.s.) est bien intégrable (ou positive).

La proposition 11.11 montre également que (sous les hypothèses de la proposition 11.11) la fonction Y est une fonction de X (c'est-à-dire $Y = \psi(X)$ pour un certain ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si et seulement si E(Y|X) = Y. Pour montrer que la v.a.r. Y est une fonction d'une autre v.a.r. X, il suffit donc de montrer que E(Y|X) = Y. En comparaison, le calcul de la covariance entre X et Y (après normalisation) s'intéresse seulement à l'existence ou non d'une dépendance affine de Y en fonction de X. Voir, à ce propos, l'exercice 11.14.

Remarque 11.12 (Deux propriétés de l'espérance conditionnelle) Voici deux propriétés qui nous serons utiles dans la section suivante. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ et X une v.a.r. intégrable.

1. Soit V une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable bornée. On a alors $E(XV|\mathcal{B}) = VE(X|B)$ p.s.. (Voir l'exercice 11.4.)
2. On suppose que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus indépendantes. On a alors $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s.. En particulier, si Y est une v.a.r. indépendante de X (c'est-à-dire que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont des tribus indépendantes), on a alors E(X|Y) = E(X) p.s.. (Voir l'exercice 11.5.)

11.2 Martingales

Définition 11.13 (Filtration et processus) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé*

1. *On appelle filtration une suite de tribus* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q.* $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{A}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

2. On appelle processus réel une suite de v.a.r..

3. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus réel. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable.

Définition 11.14 (Martingale) *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus réel (c'est-à-dire une suite de v.a.r.).*

(Martingale) *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$ si on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

1. X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable,

2. $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s..

(Sous et sur martingale) *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous–martingale [resp. sur–martingale] par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

1. X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable,

2. $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geq X_n$ p.s. [resp. $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \leq X_n$ p.s.].

Remarque 11.15 Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a, comme 1_Ω est $\mathcal{B}_n$-intégrable bornée, et $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s.,

$$E(X_{n+1}) = \int_\Omega X_{n+1}1_\Omega dP = \int_\Omega E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)1_\Omega dP = \int_\Omega X_n 1_\Omega dP = E(X_n).$$

On a donc $E(X_n) = E(X_0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exemple 11.16 (Exemples de Martingales) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et X une v.a.r. intégrable. On pose $X_n = E(X|\mathcal{B}_n)$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$). (Voir l'exercice 11.24.)
2. Soit X_0 une v.a.r. intégrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. intégrable et de moyenne nulle. On suppose que la suite formée de X_0 et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes. On pose alors, pour $n\in\mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + J_{n+1}$ et $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $X_0,\ldots,X_n$. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$). (Voir l'exercice 11.25.)

Définition 11.17 (Temps d'arrêt) *Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et T une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ (c'est-à-dire une application mesurable de Ω, muni de la tribu $\mathcal{A}$, dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, muni de la tribu formée de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$). L'application T s'appelle un temps d'arrêt si, pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$. *Si* T *est un temps d'arrêt, on note* $\mathcal{B}_T$ *la tribu définie par* $\mathcal{B}_T = \{A \in \mathcal{B}_\infty$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{B}_n\}$ *où* $\mathcal{B}_\infty$ *est la plus petite tribu contenant toutes les tribus* $\mathcal{B}_n$ *(c'est-à-dire la tribu engendrée par les* $\mathcal{B}_n$*).*

Le théorème suivant montre qu'une martingale arrêtée est encore une martingale.

Théorème 11.18 (Martingale arrêtée à un temps d'arrêt) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé muni d'une filtration* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale (par rapport à la filtration* $(\mathcal{B}_n)_n$*). Soit* ν *un temps d'arrêt. Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $Y_n = X_{\nu\wedge n}$ *(On rappelle que* $\nu \wedge n(\omega) = \min\{\nu(\omega), n\}$ *et donc que* $X_{\nu\wedge n}(\omega) = X_{\min\{\nu(\omega),n\}}(\omega)$, *pour tout* $\omega \in \Omega$.*) Alors, la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est encore une martingale (par rapport à la filtration* $(\mathcal{B}_n)_n$*).*

DÉMONSTRATION – Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_n = X_n 1_{\{T>n\}} + \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{T=k\}}$. On en déduit tout d'abord que Y_n est intégrable (comme somme finie de fonctions intégrables). Puis, on montre que Y_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable. Pour cela, on remarque que $\{T = k\} \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_n$, pour $k \leq n$, et que

$$\{T > n\} = \Big(\bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}\Big)^c \in \mathcal{B}_n.$$

Enfin, on remarque que X_k est $\mathcal{B}_n$-mesurable pour tout $k \leq n$. Grâce à la stabilité des fonctions mesurables par somme et produit, on obtient bien, finalement, que Y_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable.

Il reste maintenant à montrer que $E(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) = Y_n$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$Y_{n+1} = X_{n+1} 1_{\{T>n+1\}} + \sum_{k=0}^{n+1} X_k 1_{\{T=k\}} = X_{n+1} 1_{\{T\geq n+1\}} + \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{T=k\}}.$$

Par linéarité de l'espérance conditionnelle, on a donc

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) = E(X_{n+1} 1_{\{T\geq n+1\}}|\mathcal{B}_n) + \sum_{k=0}^{n} E(X_k 1_{\{T=k\}}|\mathcal{B}_n).$$

Comme $\{T \geq n+1\} = \Big(\bigcup_{k=0}^{n} \{T = k\}\Big)^c \in \mathcal{B}_n$, la remarque 11.12 (et le fait que $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s.) donne

$$E(X_{n+1} 1_{\{T\geq n+1\}}|\mathcal{B}_n) = 1_{\{T\geq n+1\}} E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n 1_{\{T\geq n+1\}}.$$

Puis comme, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, $X_k 1_{\{T=k\}}$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable, on a $E(X_k 1_{\{T=k\}}|\mathcal{B}_n) = X_k 1_{\{T=k\}}$. On obtient ainsi

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n 1_{\{T\geq n+1\}} + \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\{T=k\}} = Y_n \text{ p.s..}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

On conclut cette section par un théorème, sans démonstration, sur la convergence des martingales.

Théorème 11.19 (Convergence p.s. d'une martingale)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une filtration et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r.. On suppose que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *On suppose que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Alors il existe une v.a.r. intégrable,* X, *t.q.* $X_n \to X$ *p.s., quand* $n \to +\infty$.
2. *On suppose* $X_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors, il existe une v.a.r. intégrable,* X, *t.q.* $X_n \to X$ *p.s., quand* $n \to +\infty$.

On peut noter que le deuxième item du théorème 11.19 est une conséquence du premier car, pour une martingale, on a toujours $E(X_n) = E(X_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et les X_n sont toujours intégrales). Si $X_n \geq 0$, on a donc $\|X_n\|_1 = E(X_0) < +\infty$.

11.3 Exercices

11.3.1 Espérance conditionnelle

Exercice 11.1 (Espérance conditionnellement à une tribu) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle intégrable. Dans les trois cas suivants, montrer que $E(Y|\mathcal{B})$ est réduit à un élément et déterminer $E(Y|\mathcal{B})$ (en fonction de Y et $\mathcal{B}$).

1. La tribu $\mathcal{B}$ la tribu grossière, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Corrigé – *Soit* Z *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$*-mesurable. Soit* $a \in \mathrm{Im}(Z)$ *(on suppose, bien sûr,* $\Omega \neq \emptyset$*). On a alors* $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. *Comme* Z *est* $\mathcal{B}$*-mesurable, on a donc* $\{Z = a\} = \Omega$. *Une application* $\mathcal{B}$*-mesurable est donc une fonction constante (réciproquement, une fonction constante est bien* $\mathcal{B}$*-mesurable). Si* $Z \in E(Y|\mathcal{B})$, *il existe donc* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $Z(\omega) = a$ *pour tout* $\omega \in \Omega$. *Le réel* a *doit alors vérifier* $E(aU) = E(UY)$ *pour tout application* U, $\mathcal{B}$*-mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On a donc* $ab = E(ab) = E(bY) = bE(Y)$ *pour tout* $b \in \mathbb{R}$. *La seule solution est donc* $a = E(Y)$. *L'ensemble* $E(Y|\mathcal{B})$ *est donc réduit à un seul élément, la fonction constante et égale à* $E(Y)$.

2. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P(B) < 1$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B.

Corrigé – *Soit* Z *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$*-mesurable. Les parties* B *et* B^c *sont non vides (car de probabilité strictement positive). Soit* $\omega_1 \in B$ *et* $a = Z(\omega_1)$. *On a alors* $\{Z = a\} = \{\omega \in \Omega; Z(\omega) = a\} \neq \emptyset$. *Comme* Z *est* $\mathcal{B}$*-mesurable, on a donc* $\{Z = a\} = B$ *ou* Ω *et donc* $\{Z = a\} \supset B$. *De même, soit* $\omega_2 \in B^c$ *et* $b = Z(\omega_2)$, *on a* $\{Z = b\} \supset B^c$. *Une application* $\mathcal{B}$*-mesurable est donc une fonction constante sur* B *et* B^c. *Réciproquement, une fonction constante sur* B *et* B^c *est bien* $\mathcal{B}$*-mesurable.*

Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$*, il existe donc* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.q.* $Z = a1_B + b1_{B^c}$*. Les réels* a, b *doivent alors vérifier* $E(ZU) = E(UY)$ *pour tout application* U $\mathcal{B}$*-mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire :*

$$a\alpha P(B) + b\beta P(B^c) = \alpha \int_B Y dP + \beta \int_{B^c} Y dP \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme $P(B) > 0$ *et* $P(B^c) = 1 - P(B) > 0$*, la seule solution est donc :*

$$a = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} \text{ et } b = \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)}.$$

L'ensemble $E(Y|\mathcal{B})$ *est donc réduit à un seul élément, la fonction* Z *définie par*

$$Z = \frac{\int_B Y dP}{P(B)} 1_B + \frac{\int_{B^c} Y dP}{P(B^c)} 1_{B^c}.$$

3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathcal{A}$ t.q. $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$ et $0 < P(B_n) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\bigcup_{n\in J} B_n, J \subset \mathbb{N}^*\}$).

   Corrigé – *On reprend le même raisonnement que dans les deux questions précédentes. On remarque d'abord qu'une application* Z *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable si et seulement si il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n 1_{B_n}$*. (Cette série est bien convergente en tout point de* Ω *car les* B_n *sont disjoints deux à deux.)*

   Si $Z \in E(Y|\mathcal{B})$*, il existe donc* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n 1_{B_n}$*. La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *doit alors être telle que* Z *soit intégrable et que* $E(ZU) = E(UY)$ *pour tout application* U $\mathcal{B}$*-mesurable bornée de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire t.q.*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| P(B_n) < +\infty \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n a_n P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n \int_{B_n} Y dP,$$

   pour toute suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$*. Comme* $P(B_n) > 0$*, la seule solution est donc :*

$$a_n = \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

   Comme on sait que l'ensemble $E(Y|\mathcal{B})$ *est non vide, il est inutile de vérifier que la fonction* Z *trouvée est intégrable (puisque cette fonction est la seule fonction pouvant appartenir à* $E(Y|\mathcal{B})$*). L'ensemble* $E(Y|\mathcal{B})$ *est donc réduit à un seul élément. Cet élément est la fonction* Z *définie par*

$$Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} 1_{B_n}.$$

Exercice 11.2 (Espérance conditionnellement à une tribu (2)) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. intégrable.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) = 1$ et $B^c \neq \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si P est une mesure diffuse, que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que B^c est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points de Ω). On pose $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$Z_a = E(X)1_B + a1_{B^c}.$$

Montrer que $E(X|\mathcal{B})$ est l'ensemble des v.a.r. Z_a avec $a \in \mathbb{R}$ (en pratique, comme on confond $E(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ses représentants, on peut écrire $E(X|\mathcal{B}) = Z_a$ p.s. avec n'importe quel a dans $\mathbb{R}$, et donc, par exemple, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s..)

Corrigé – *On raisonne comme dans l'exercice 11.1. Si* $Z \in E(X|\mathcal{B})$, *il existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.q.* $Z = a1_B + b1_{B^c}$ *et les réels* a, b *doivent alors vérifier* $E(ZU) = E(UY)$ *pour tout application* U $\mathcal{B}$*-mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire :*

$$a\alpha P(B) + b\beta P(B^c) = \alpha \int_B X dP + \beta \int_{B^c} X dP \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme $P(B) = 0$ *et* $P(B^c) = 1$ *ceci donne* $a\alpha = \alpha E(X)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et donc* $a = E(X)$. *On a donc bien* $E(X|\mathcal{B}) = \{Z_b, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit I un ensemble fini ou dénombrable, $(B_n)_{n\in I}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{A}$ telle que

$$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \neq m \; \Omega = \bigcup_{n\in I} B_n.$$

On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in I}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\bigcup_{n\in J} B_n, J \subset I\}$). Montrer que

$$E(X|\mathcal{B}) = \sum_{n\in J} \frac{\int_{B_n} X dP}{P(B_n)} 1_{B_n} \text{ p.s.},$$

où $J = \{n \in I, \text{ t.q. } P(B_n) > 0\}$.

Corrigé – *On raisonne encore comme dans l'exercice 11.1.*
On remarque d'abord qu'une application Z *de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable si et seulement si il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$ *telle que*

$$Z = \sum_{n\in I} \alpha_n 1_{B_n}.$$

Si $Z \in E(X|\mathcal{B})$, *il existe donc* $(a_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $Z = \sum_{n\in I} a_n 1_{B_n}$. *La famille* $(a_n)_{n\in I}$ *doit alors être telle que* Z *soit intégrable et que* $E(ZU) = E(UY)$ *pour toute application* U $\mathcal{B}$*-mesurable bornée de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire telle que*

$$\sum_{n\in I} |a_n| P(B_n) < +\infty \text{ et } \sum_{n\in I} \alpha_n a_n P(B_n) = \sum_{n\in I} \alpha_n \int_{B_n} Y dP,$$

pour toute suite bornée $(\alpha_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$. *Comme* $P(B_n) > 0$ *si* $n \in J$ *et* $P(B_n) = 0$ *si* $n \notin J$, *ceci donne*

$$a_n = \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} \text{ pour tout } n \in J,$$

ce qui définit Z *p.s.. On obtient donc*

$$Z = \sum_{n\in J} \frac{\int_{B_n} Y dP}{P(B_n)} 1_{B_n} \text{ p.s.}.$$

Exercice 11.3 (Espérance conditionnellement à une v.a.r.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire réelle intégrable.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. Donner un élément de $E(Y|X)$.

   Corrigé – *On utilise la proposition 11.11. Soit* $Z \in E(Y|X)$, *il existe alors* ψ, *fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *t.q.* $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ *est intégrable et, pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$,*borélienne bornée,*

   $$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)).$$

   On a donc $Z = \psi(a)$ *p.s. et en prenant pour* φ *une fonction t.q.* $\varphi(a) = 1$ *dans l'égalité précédente, on obtient* $\psi(a) = E(Y)$. *On a donc finalement* $Z = E(Y)$ *p.s.. La fonction constante et égale à* $E(Y)$ *est un élément de* $E(Y|X)$. *Plus précisément, la fonction* $\psi(X)$ *est un élément de* $E(Y|X)$, *dès que* ψ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et t.q.* $\psi(a) = E(Y)$.

2. On suppose que X prend p.s. deux valeurs x_1 ou x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Donner un élément de $E(Y|X)$.

   Corrigé – *On pose*

   $$A_1 = \{X = x_1\} \text{ et } A_2 = \{X = x_2\}.$$

   On suppose que $P(A_1) > 0$ *et* $P(A_2) > 0$ *(sinon, on est ramené à la question précédente). Noter que* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *et* $P(A_1) + P(A_2) = 1$. *On utilise encore la proposition 11.11. Soit* $Z \in E(Y|X)$, *il existe alors* ψ, *fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *t.q.* $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ *est intégrable et, pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$,*borélienne bornée,*

   $$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)). \tag{11.10}$$

   On a donc $Z = \psi(x_1)1_{A_1} + \psi(x_2)1_{A_2}$ *p.s.. Soit* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *en prenant pour* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $\varphi(x_1) = a_1$ *et* $\varphi(x_2) = a_2$ *dans l'égalité (11.10), on obtient :*

   $$\psi(x_1)\alpha_1 P(A_1) + \psi(x_2)\alpha_2 P(A_2) = \alpha_1 \int_{A_1} Y dP + \alpha_2 \int_{A_2} Y dP,$$

   pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. *Comme* $P(A_i) > 0$ *pour* $i = 1, 2$, *on en déduit que* $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$, *pour* $i = 1, 2$, *et donc que*

   $$Z = \frac{\int_{A_1} Y dP}{P(A_1)} 1_{A_1} + \frac{\int_{A_2} Y dP}{P(A_2)} 1_{A_2} \text{ p.s..}$$

   Ici encore, la fonction $\psi(X)$ *est un élément de* $E(Y|X)$ *dès que* ψ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et t.q.* $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ *pour* $i = 1, 2$ *(un exemple possible est donc* $\psi(x_i) = \frac{\int_{A_i} Y dP}{P(A_i)}$ *pour* $i = 1, 2$ *et* $\psi(x) = 0$ *pour* $x \notin \{x_1, x_2\}$*).*

3. On suppose que X est une v.a. prenant p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $P(X = x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un élément de $E(Y|X)$.

Corrigé – *On peut supposer que les x_n sont différents deux à deux. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{X = x_n\}$. Les ensembles A_n sont disjoints deux à deux, $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = 1$.*

On utilise encore la proposition 11.11. Soit $Z \in E(Y|X)$ (Noter que, comme on sait que $E(Y|X)$ est non vide, il existe $Z \in E(Y|X)$). Il existe alors ψ, fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ est intégrable et, pour toute application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,borélienne bornée,

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(Y\varphi(X)). \tag{11.11}$$

On a donc

$$Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi(x_n) 1_{A_n} \text{ p.s..}$$

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$. Dans l'égalité (11.11), on prend pour φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (un tel φ existe, on peut prendre, par exemple, $\varphi(x) = 0$ si x est différent de tous les x_n), on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \psi(x_n)\alpha_n P(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n \int_{A_n} Y dP,$$

pour toute suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$. Comme $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc que

$$Z = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n} \text{ p.s..}$$

Enfin, ici encore, la fonction $\psi(X)$ est un élément de $E(Y|X)$ dès que ψ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et t.q. $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Un exemple possible est donc $\psi(x_n) = \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi(x) = 0$ pour $x \notin \{x_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Cet exemple donne la fonction

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\int_{A_n} Y dP}{P(A_n)} 1_{A_n}.$$

Exercice 11.4 (Égalité d'espérances conditionnelles) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$, X une v.a.r. intégrable et V une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable bornée. Montrer que $E(XV|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{B})V$ p.s..

Corrigé – *Comme X est intégrable et que V est bornée, la v.a.r. XV est intégrable et donc $E(XV|\mathcal{B})$ est bien définie.*

On pose $Z = E(X|\mathcal{B})$ (en toute rigueur, on choisit plutôt un élément de $E(X|\mathcal{B})$). Soit U une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable et bornée. La v.a.r. UV est aussi $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, on a donc

$$E((XV)U) = E(X(UV)) = E(Z(UV)) = E((ZV)U).$$

Comme ZV *est* $\mathcal{B}$*-mesurable (et que* U *est arbitraire), ceci prouve que* $E(XV|\mathcal{B}) = ZV$ *p.s. (plus précisément,* ZV *est un élément de* $E(XV|\mathcal{B})$*). On a donc bien montré que* $E(XV|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{B})V$ *p.s..*

Exercice 11.5 (Espérance conditionnelle et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une v.a.r. intégrable.

1. Soit Y une v.a.r. indépendante de X. Montrer que $E(X|Y) = E(X)$ p.s..

   Corrigé – *Soit* U *une v.a.r.* $\sigma(Y)$*-mesurable bornée. Selon le théorème 11.10, il existe* φ*, fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $U = \varphi(Y)$*. Comme* $\sigma(\varphi(Y)) \subset \sigma(Y)$*, les v.a.r.* X *et* $\varphi(Y)$ *sont aussi indépendantes, on a donc*

   $$E(X\varphi(Y)) = E(X)E(\varphi(Y)) = E(E(X)\varphi(Y)).$$

   Comme le fonctions constantes sont $\sigma(Y)$*-mesurables, on en déduit que* $E(X|Y) = E(X)$ *p.s. (en toute rigueur, on a démontré que la fonction constante et égale à* $E(X)$ *est un élément de* $E(X|Y)$*).*

2. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On suppose que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus indépendantes. Montrer que $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s..

   Corrigé – *Cette question contient la question précédente. En effet, on a* $E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$ *et, par définition, l'indépendance de* X *et* Y *est l'indépendance des tribus* $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$*. La démonstration est très voisine de la précédente.*

   Soit U *une v.a.r* $\mathcal{B}$*-mesurable bornée. Comme* U *est* $\mathcal{B}$*-mesurable, on a* $\sigma(U) \subset \mathcal{B}$*. On en déduit que* X *et* U *sont indépendantes. On a donc*

   $$E(XU) = E(X)E(U) = E(E(X)U).$$

   On en déduit bien que $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ *p.s..*

Exercice 11.6 (Espérance conditionnelle d'une v.a.r. appartenant à $\mathcal{L}^p$)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$ et Y une v.a.r. intégrable. On pose $Z = E(Y|\mathcal{G})$ (plus précisément, on confond ici, comme d'habitude, la classe $E(Y|\mathcal{G})$ avec l'un de ses éléments).

1. On suppose, dans cette question, qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|Y| \le M$ p.s.. Montrer que $|Z| \le M$ p.s.. et que $E(Z\Phi) = E(Y\Phi)$ pour tout Φ $\mathcal{G}$–mesurable et intégrable.

   Corrigé – *On pose*

   $$U = 1_{\{Z>M\}} - 1_{\{Z<-M\}}.$$

   La v.a.r. U *est* $\mathcal{G}$*-mesurable (car* Z *est* $\mathcal{G}$*-mesurable) bornée. On a donc* $E(ZU) = E(YU)$.

   Comme $E(ZU) = E(|ZU|)$ *et*

   $$E(YU) = \int_\Omega YU dP \le \int_\Omega |Y||U| dP \le ME(|U|),$$

on a $E(|ZU|) \leq ME(|U|)$ *et donc* $E((|Z|-M)|U|) \leq 0$*, c'est-à-dire*

$$\int_{|Z|>M} (|Z|-M)dP \leq 0.$$

On en déduit que $P(\{|Z|>M\}) = 0$*, et donc* $|Z| \leq M$ *p.s..*

Soit Φ *une v.a.r.* $\mathcal{G}$*–mesurable et intégrable. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$\Phi_n = T_n(\Phi) \text{ avec } T_n(s) = \max\{-n, \min\{n, s\}\} \text{ (pour } s \in \mathbb{R}).$$

La v.a.r. Φ_n *est* $\mathcal{G}$*–mesurable bornée, on a donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$E(Z\Phi_n) = E(Y\Phi_n). \tag{11.12}$$

Comme $\Phi_n \to \Phi$ *p.s. quand* $n \to +\infty$ *et que* $|Z\Phi_n| \leq M|\Phi|$ *p.s. et* $|Y\Phi_n| \leq M|\Phi|$ *p.s., le théorème de convergence dominée nous permet de passer à la limite dans (11.12) quand* $n \to +\infty$*. On obtient*

$$E(Z\Phi) = E(Y\Phi).$$

2. Soit $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On suppose que $|Y|^p$ est intégrable, montrer que $|Z|^p$ est intégrable et que $E(Z\Phi) = E(Y\Phi)$ pour tout Φ $\mathcal{G}$–mesurable et t.q. $|\Phi|^q$ soit intégrable.

Corrigé – *On utilise la fonction borélienne* T_n *définie à la question précédente et on pose* $\text{sign}(s) = 1$ *si* $s > 0$, $\text{sign}(s) = -1$ *si* $s < 0$ *et* $\text{sign}(0) = 0$ *(c'est la fonction signe définie par* (4.76)*)..*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$*. On pose*

$$Z_n = \text{sign}(Z)|T_n(Z)|^{p-1}.$$

La v.a.r. Z_n *est* $\mathcal{G}$*-mesurable bornée, on a donc* $E(ZZ_n) = E(YZ_n)$*. En utilisant l'inégalité de Hölder avec p et q (ce qui est possible car* $|Y|^p$ *est intégrable et* $|Z_n|^q$ *est intégrable car bornée), ceci donne*

$$\int_{|Z|\leq n} |Z|^p dP = E(ZZ_n) = E(YZ_n) \leq \|Y\|_p \Big(\int_{|Z|\leq n} |Z|^p dP \Big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

On en déduit

$$\int_{|Z|\leq n} |Z|^p dP \leq \|Y\|_p^p.$$

Le théorème de convergence monotone nous permet alors de conclure que $|Z|^p$ *est intégrable et que* $\|Z\|_p \leq \|Y\|_p$*.*

Soit Φ *une v.a.r.* $\mathcal{G}$*–mesurable. On suppose que* $|\Phi|^q$ *est intégrable.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $\Phi_n = T_n(\Phi)$*. La v.a.r.* Φ_n *est* $\mathcal{G}$*–mesurable bornée, on a donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,*

$$E(Z\Phi_n) = E(Y\Phi_n). \tag{11.13}$$

On a $\Phi_n \to \Phi$ *p.s. quand* $n \to +\infty$ *et* $|Z\Phi_n| \leq |Z\Phi|$ *p.s.,* $|Y\Phi_n| \leq |Y\Phi|$ *p.s.. Les fonctions* $Z\Phi$ *et* $Y\Phi$ *sont intégrables (car* $|Z|^p, |Y|^p$ *sont intégrables et* $|\Phi|^q$ *est intégrable). Le théorème de convergence dominée nous permet alors de passer à la limite dans (11.13) quand* $n \to +\infty$*. On obtient* $E(Z\Phi) = E(Y\Phi)$*.*

Exercice 11.7 (Calcul de $E(\exp(XY)|X)$ **si** $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$**)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que Y suit une loi gaussienne centrée réduite et que $E(\exp(X^2/2)) < \infty$. Montrer que $\exp(XY)$ est intégrable et déterminer $E(\exp(XY)|X)$.

Corrigé – *La v.a.r.* $\exp(XY)$ *est positive. On calcule* $\int_\Omega e^{XY} dP$ *en utilisant l'indépendance de* X *et* Y *(et le théorème 9.28, qui donne que* $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$*) et le fait que* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ *:*

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x).$$

En remarquant que $xy - \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}x^2$ *on obtient :*

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}})dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \right) e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x),$$

et donc

$$\int_\Omega e^{XY} dP = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} dP_X(x) = E(e^{\frac{X^2}{2}}) < +\infty,$$

ce qui donne que e^{XY} *est une v.a.r. intégrable.*

Selon la proposition 11.11 on cherche un élément de $E(e^{XY}|X)$ *sous la forme* $\psi(X)$ *où* ψ *est une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, t.q.* $Z = \psi(X)$, $\psi(X)$ *est intégrable et, pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,borélienne bornée,*

$$E(\psi(X)\varphi(X)) = E(e^{XY}\varphi(X)).$$

Soit φ *une application borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on calcule* $E(e^{XY}\varphi(X))$ *en utilisant, comme précédemment, l'indépendance de* X *et* Y *et le fait que* $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ *:*

$$E(e^{XY}\varphi(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy} \varphi(x) e^{-\frac{y^2}{2}} dy dP_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x-y)^2}{2}} dy \right) e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x).$$

On a donc

$$E(e^{XY}\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{x^2}{2}} \varphi(x) dP_X(x) = E(e^{-\frac{X^2}{2}} \varphi(X)).$$

Ceci nous montre que $e^{-\frac{X^2}{2}}$ *est un élément de* $E(\, e^{XY} |\, X)$ *et donc (comme on confond* $E(\, e^{XY} \,|\, X)$ *avec l'un de des éléments)* $E(e^{XY}|X) = e^{-\frac{X^2}{2}}$ *p.s..*

Exercice 11.8 (Espérance selon une somme de v.a.r.i.i.d) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X et Y deux v.a.r. intégrables. Montrer que $E(X|X+Y) + E(Y|X+Y) = X+Y$ p.s.. On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes et de même loi. Montrer

que
$$E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \text{ p.s..}$$

Corrigé – *Par linéarité de l'espérance conditionnelle (voir la remarque 11.5), on a*
$$E(X|X+Y) + E(Y|X+Y) = E(X+Y|X+Y) \textit{ p.s.,}$$
et on en déduit bien que
$$E(X|X+Y) + E(Y|X+Y) = X+Y \textit{ p.s..}$$
On utilise maintenant la proposition 11.11. Soit ψ *fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $E(X|X+Y) = \psi(X+Y)$ *p.s.. Si* X *et* Y *sont indépendantes et de même loi, on va montrer que* $E(Y|X+Y) = \psi(X+Y)$ *p.s..*

Soit φ *fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Comme* $E(X|X+Y) = \psi(X+Y)$ *p.s., on a*
$$E(X\varphi(X+Y)) = E(\psi(X+Y)\varphi(X+Y)).$$
En notant m la loi commune à X *et* Y*, on a aussi, grâce à l'indépendance de* X *et* Y *(qui donne* $P_{(X,Y)} = m \otimes m$*),*
$$E(X\varphi(X+Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} x\varphi(x+y)dm(x)dm(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} y\varphi(x+y)dm(x)dm(y) = E(Y\varphi(X+Y)).$$
On a donc $E(Y\varphi(X+Y)) = E(\psi(X+Y)\varphi(X+Y))$*, ce qui prouve que* $E(Y|X+Y) = \psi(X+Y)$ *p.s. et donc*
$$E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) \textit{ p.s..}$$
Comme $E(X|X+Y) + E(Y|X+Y) = X+Y$ *p.s., on obtient, finalement,*
$$E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \textit{ p.s..}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes, de même loi et intégrables. On note
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Montrer que $E(X_1|S_n) = S_n/n$ p.s..

Corrigé – *La méthode donnée à la question précédente se généralise facilement. On remarque tout d'abord (par linéarité de l'espérance) que*
$$\sum_{i=1}^{n} E(X_i|S_n) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i|S_n) = E(S_n|S_n) = S_n \textit{ p.s..}$$
Puis, pour $i \neq j$*, en utilisant que* $X_1, \ldots, X_n$ *sont des v.a.r. indépendantes et de même loi (ce qui donne que* $P_{(X_1,\ldots,X_n)} = m \otimes \ldots \otimes m$ *si m est la loi commune aux* X_i*), on montre que*
$$E(X_i|S_n) = E(X_j|X_n) \textit{ p.s..}$$
On en déduit alors que $E(X_i|S_n) = S_n/n$ *p.s., pour tout* $i = 1, \ldots, n$*.*

Exercice 11.9 (Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $X = Y$ p.s.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. intégrables. On suppose que

$$E(X|Y) = Y \text{ p.s. et } E(Y|X) = X \text{ p.s..}$$

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) = E\Big((Y - X)1_{\{X>c\geq Y\}}\Big) \leq 0.$$

En déduire que $E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) = 0$, puis que $P(\{X > c \geq Y\}) = 0$.

Corrigé – *On remarque que* $(X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}} + (X - Y)1_{\{X>c\geq Y\}} = (X - Y)1_{\{X>c\}}$. *On a donc*

$$E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) - E\Big((Y - X)1_{\{X>c\geq Y\}}\Big)$$
$$= E((X - Y)1_{\{X>c\}}) = E(X1_{\{X>c\}}) - E(Y1_{\{X>c\}}).$$

Comme $E(Y|X) = X$ *p.s. et que* $1_{\{X>c\}}$ *est une v.a.r.* $\sigma(X)$*-mesurable bornée, on a* $E(Y1_{\{X>c\}}) = E(X1_{\{X>c\}})$ *et ceci donne alors*

$$E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) - E\Big((Y - X)1_{\{X>c\geq Y\}}\Big) = 0.$$

Comme $Y - X \leq 0$ *sur* $\{X > c \geq Y\}$, *on a bien, finalement*

$$E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) = E\Big((Y - X)1_{\{X>c\geq Y\}}\Big) \leq 0.$$

En changeant X, Y *en* Y, X, *on montre aussi que*

$$E\Big((Y - X)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) \leq 0.$$

On en déduit alors que $E\Big((X - Y)1_{\{X>c,Y>c\}}\Big) = 0$ *et donc que*

$$E\Big((Y - X)1_{\{X>c\geq Y\}}\Big) = 0.$$

Enfin, comme $Y - X < 0$ *sur* $\{X > c \geq Y\}$, *l'égalité précédente permet de conclure que* $P(\{X > c \geq Y\}) = 0$.

2. Montrer que $X = Y$ p.s..

Corrigé – *Pour* $c \in \mathbb{R}$, *on pose* $A_c = \{X > c \geq Y\}$. *On a donc* $P(A_c) = 0$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.

On remarque maintenant que $\{X - Y > 0\} = \cup_{c\in\mathbb{Q}} A_q$. *Par* σ*-sous additivité de* P *on en déduit que*

$$P(\{X - Y > 0\}) \leq \sum_{c\in\mathbb{Q}} P(A_c) = 0.$$

Ici encore, en changeant X, Y *en* Y, X, *on montre aussi que* $P(\{Y - X > 0\}) = 0$ *et donc que* $X = Y$ *p.s.*.

3. on suppose maintenant que X et Y sont de carré intégrables. Montrer qu'une démonstration (beaucoup) plus directe de la question 2 est possible en calculant $E((X - Y)^2)$.

Corrigé – *Comme* $E(X|Y) = Y$ *p.s., on a* $E(XY) = E(Y^2)$. *De même, comme* $E(Y|X) = X$ *p.s., on a* $E(YX) = E(X^2)$. *On en déduit que*

$$E((X-Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2) - E(XY) - E(YX) = 0,$$

et donc que $X = Y$ *p.s..*

N.B. Le cas où X et Y sont seulement intégrables (traité dans les questions 1 et 2) peut aussi se faire avec la question 3 en tronquant les v.a.r. X et Y.

Exercice 11.10 (Espérance du produit et produit des espérances) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a. intégrables t.q. XY est intégrable et $E(X|Y) = E(X)$ p.s.. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Corrigé – *Grâce à la proposition 11.11 on a, pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$,*borélienne bornée,*

$$E(E(X|Y)\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y))$$

Comme $E(X|Y) = E(X)$ *p.s., on en déduit, pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$,*borélienne bornée,*

$$E(X)E(\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y)). \tag{11.14}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. *Pour* $s \in \mathbb{R}$, *on pose* $T_n(s) = \max\{-n, \min\{s, n\}\}$. *La fonction* T_n *est borélienne (car continue) bornée (par n) de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On peut donc utiliser (11.14) avec* $\varphi = T_n$. *On obtient* $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$.

Comme Y *est intégrable, on a, par convergence dominée,* $\lim_{n\to+\infty} E(T_n(Y)) = E(Y)$ *(noter que* $|T_n(Y)| \le |Y|$*).*

Comme XY *est intégrable (et c'est uniquement ici que cette hypothèse est utilisée), on a, par convergence dominée,*

$$\lim_{n\to+\infty} E(XT_n(Y)) = E(XY)$$

(noter que $|XT_n(Y)| \le |XY|$*).*

En passant à limite quand $n \to +\infty$ *sur l'égalité* $E(X)E(T_n(Y)) = E(XT_n(Y))$, *on a donc* $E(X)E(Y) = E(XY)$.

Exercice 11.11 (Égalité de lois donne égalité d'espérances conditionnelles) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y, Z trois v.a.r.. On suppose que X et Y sont intégrables et que $(X, Z) \sim (Y, Z)$.

1. Montrer que $E(X|Z) = E(Y|Z)$ p.s..

Corrigé – *On note m la loi commune à* (X, Z) *et* (Y, Z). *Soit* ψ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a*

$$E(X\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} x\psi(z)dm(x,z),$$

et, de même

$$E(Y\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} y\psi(z)dm(y,z) = \int_{\mathbb{R}^2} x\psi(z)dm(x,z).$$

On a donc $E(X\psi(Z)) = E(Y\psi(Z))$, *ce qui donne bien* $E(X|Z) = E(Y|Z)$ *p.s..*

2. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(X)$ et $f(Y)$ sont intégrables (ou que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Montrer que $E[f(X)|Z] = E[f(Y)|Z]$ p.s..

Corrigé – *On suppose que* $f(X)$ *et* $f(Y)$ *sont intégrables. On note toujours* m *la loi commune à* (X, Z) *et* (Y, Z)*. On a alors, pour toute fonction* ψ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*,*

$$E(f(X)\psi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\psi(z)dm(x,z) = E(f(Y)\psi(Z)).$$

On a donc $E(f(X)\psi(Z)) = E(f(Y)\psi(Z))$*, ce qui donne bien*

$$E(f(X)|Z) = E(f(Y)|Z) \text{ p.s.}.$$

Noter que l'intégrabilité de X *et* Y *est inutile pour cette question. C'est l'intégrabilité de* $f(X)$ *et* $f(Y)$ *qui a été utilisée.*

Si on retire l'hypothèse que $f(X)$ *et* $f(Y)$ *sont intégrables mais que* f *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*, le même raisonnement permet de conclure en prenant des fonctions* ψ *boréliennes positives.*

Exercice 11.12 (Convergence faible et espérances conditionnelles) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$, X une v.a. intégrable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. intégrables. On suppose que $X_n \to X$ faiblement dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to +\infty$ (ce qui est équivalent à dire que, pour tout v.a.r. U bornée, on a $\lim_{n\to+\infty} E(X_nU) = E(XU)$).

1. Montrer que pour toute v.a.r. U, $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E(E(X_n|\mathcal{B})U) = E(E(X|\mathcal{B})U).$$

Corrigé – *Soit* U *une v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable et bornée. On a*

$$E(E(X_n|\mathcal{B})U) = E(X_n|U) \text{ et } E(E(X|\mathcal{B})U) = E(X|U).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} E(X_nU) = E(XU)$*, on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty} E(E(X_n|\mathcal{B})U) = E(E(X|\mathcal{B})U).$$

2. Montrer que

$$E(X_n|\mathcal{B}) \to E(X|\mathcal{B}) \text{ faiblement dans } L^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *Soit* U *une v.a.r. bornée. On pose* $V = E(U|\mathcal{B})$ *de sorte que* V *est une v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable bornée (voir l'exercice 11.6). Comme* $E(X_n|\mathcal{B})$ *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) et* $E(X|\mathcal{B})$ *sont des v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable et intégrable, on a (voir aussi l'exercice 11.6)*

$$E(UE(X_n|\mathcal{B})) = E(VE(X_n|\mathcal{B})) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

et

$$E(UE(X|\mathcal{B})) = E(VE(X|\mathcal{B})).$$

D'après la première question, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathcal{B})\mathrm{V}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})\mathrm{V})$, *on en déduit que*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathcal{B})\mathrm{U}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})\mathrm{U}).$$

Ce qui donne que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathcal{B}) \to \mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathcal{B})$ *faiblement dans* $\mathrm{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 11.13 (Minoration d'une espérance conditionnelle) Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$ et Y est une v.a.r. positive. Soit U une v.a.r. positive, $\mathcal{B}$-mesurable et t.q. pour toute v.a.r. positive $\mathcal{B}$-mesurable Z on ait $\mathrm{E}(\mathrm{YZ}) \geq \mathrm{E}(\mathrm{UZ})$. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{B}) \geq \mathrm{U}$ p.s..

Corrigé – *Soit* $\mathrm{A} = \{\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{B}) < \mathrm{U}\}$. *Comme* U *et* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{B})$ *sont* $\mathcal{B}$*-mesurable, la v.a.r.* 1_A *est* $\mathcal{B}$*-mesurable. L'hypothèse donne alors* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}1_\mathrm{A}) \geq \mathrm{E}(\mathrm{U}1_\mathrm{A})$. *Comme* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}1_\mathrm{A}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathcal{B})1_\mathrm{A})$, *on en déduit*

$$\mathrm{E}((\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathcal{B}) - \mathrm{U})1_\mathrm{A}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathcal{B})1_\mathrm{A}) - \mathrm{E}(\mathrm{U}1_\mathrm{A}) \geq 0.$$

Comme $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathcal{B}) - \mathrm{U} < 0$ *sur* A, *on a donc* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$, *ce qui prouve que* $\mathrm{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{B}) \geq \mathrm{U}$ *p.s..*

Exercice 11.14 (Dépendance linéaire et dépendance non linéaire) Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. de carré intégrable et non constantes (on rappelle que la v.a.r. X est dite constante s'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{X} = a$ p.s.).

1. (Dépendance linéaire.) On pose $\overline{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{X})}}$ et $\overline{\mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathrm{Y})}}$.

(a) Montrer que $|\mathrm{Cov}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}})| \leq 1$.

Corrigé – *Comme* $Var(\mathrm{X}) = \mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2)$, *on a, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,*

$$Cov(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}}) = \frac{\mathrm{E}((\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y}))}{\sqrt{Var(\mathrm{X})Var(\mathrm{Y})}} \leq \frac{\sqrt{Var(\mathrm{X})Var(\mathrm{Y})}}{\sqrt{Var(\mathrm{X})Var(\mathrm{Y})}} = 1$$

(b) Montrer que $|\mathrm{Cov}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}})| = 1$ si et seulement si il existe $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, t.q. $\mathrm{Y} = \alpha\mathrm{X} + \beta$.

Corrigé – *Si* $Cov(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}}) = 1$, *on doit avoir une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée à la question précédente. Les v.a.r.* $\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ *sont alors colinéaires. Il existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *t.q.* $(a,b) \neq (0,0)$ *t.q.*

$$a(\mathrm{X}-\mathrm{E}(\mathrm{X})) + b(\mathrm{Y}-\mathrm{E}(\mathrm{Y})) = 0 \text{ p.s..}$$

Comme la v.a.r. X *est non constante, on a* $b \neq 0$ *et, avec* $\alpha = -a/b \neq 0$ *et* $\beta = \mathrm{E}(\mathrm{Y}) + (a/b)\mathrm{E}(\mathrm{X})$,

$$\mathrm{Y} = \alpha\mathrm{X} + \beta.$$

(c) Donner un exemple pour lequel $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$ (avec f fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et $\mathrm{Cov}(\overline{\mathrm{X}},\overline{\mathrm{Y}}) = 0$.

Corrigé – *Voici un exemple simple. On prend* $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et* P *définie par* $P(\{i\}) = 1/3$ *pour* $i = 1, 2, 3$. *On définit* X *et* Y *en posant*

$$X(1) = 1, X(2) = 0, X(3) = -1,$$
$$Y(1) = 1, Y(2) = -2, Y(3) = 1.$$

Les v.a.r. X *et* Y *sont bien de carré intégrable et non constantes. On a* $E(X) = E(Y) = 0$ *et* $Cov(X, Y) = 0$ *(et donc* $Cov(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$*). Enfin, on a* $Y = f(X)$ *pour tout fonction borélienne t.q.* $f(1) = f(-1) = 1$ *et* $f(0) = -2$.

2. (Dépendance.)

(a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $E(Y|X) = E(Y)$ p.s..

Corrigé – *Cette question est démontrée dans l'exercice 11.5.*

(b) Montrer qu'il existe f (fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) t.q. $Y = f(X)$ p.s. si et seulement si $E(Y|X) = Y$ p.s..

Corrigé – *Cette question est une conséquence de la proposition 11.11.*

Si il existe f *(fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*) t.q.* $Y = f(X)$ *p.s., on a alors* $E(Y\psi(X)) = E(f(X)\psi(X))$ *pour toute fonction borélienne bornée* ψ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Ceci montre que* $E(Y|X) = f(X)$ *p.s. et donc* $E(Y|X) = Y$ *p.s..*

Réciproquement, on sait qu'il existe toujours φ *fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *t.q.* $E(Y|X) = \varphi(X)$ *p.s.. Si* $E(Y|X) = Y$ *p.s., on a donc* $Y = \varphi(X)$ *p.s..*

Exercice 11.15 (Lorsque $E(Y|X) = X$ **p.s.. . .)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. de carré intégrable.

On suppose que $E(Y|X) = X$ p.s..

1(a) Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la v.a.r. $\varphi(X)$ est de carré intégrable. Montrer que $\int_\Omega Y\varphi(X)dP = \int_\Omega X\varphi(X)dP$.

Corrigé – *Cette propriété a été vue dans la proposition 11.2. On peut la montrer à partir de la définition 11.1 en considérant* $T_n(\varphi(X))$ *avec*

$$T_n(s) = \min\{\max\{-n, s\}, n\}.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la v.a.r.* $T_n(\varphi(X))$ *est* $\sigma(X)$*-mesurable bornée. Comme* $E(Y|X) = X$ *p.s., on a donc*

$$\int_\Omega YT_n(\varphi(X))dP = \int_\Omega XT_n(\varphi(X))dP.$$

Comme $\varphi(X) \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans cette égalité quand* $n \to +\infty$. *On obtient bien* $\int_\Omega Y\varphi(X)dP = \int_\Omega X\varphi(X)dP$, *c'est-à-dire*

$$E(Y\varphi(X)) = E(X\varphi(X)).$$

(b) Montrer que $E(Y) = E(X)$ et $E(XY) = E(X^2)$.

Corrigé – *En prenant* $\varphi(s) = 1$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$*, la question précédente donne* $E(Y) = E(X)$. *Puis, en prenant* $\varphi(s) = s$ *(ce qui est possible car* X^2 *est intégrable), on a* $E(YX) = E(X^2)$.

2(a) Montrer que $E(X^2) \leq E(Y^2)$.

Corrigé – *Comme* $E(XY) = E(X^2)$*, on a*

$$0 \leq E((Y-X)^2) = E(Y^2) + E(X^2) - 2E(XY) = E(Y^2) - E(X^2).$$

Ce qui donne bien $E(X^2) \leq E(Y^2)$.

On peut aussi faire cette question en remarquant que l'inégalité de Jensen donne $E(Y^2|X) \geq E(Y|X)^2$ *p.s.. On a donc* $E(Y^2|X) \geq X^2$ *p.s.. On en déduit, en particulier, que* $E(Y^2) \geq E(X^2)$.

(b) Montrer que $Y = X$ p.s. si et seulement si $E(Y^2) = E(X^2)$.

Corrigé – *Si* $Y = X$ *p.s., on a, bien sûr,* $E(Y^2) = E(X^2)$. *Réciproquement, si* $E(Y^2) = E(X^2)$*, la question précédente donne* $E((Y-X)^2) = 0$ *et donc* $Y = X$ *p.s..*

Exercice 11.16 (V.a. gaussien et espérance conditionnelle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X, Y)^t$ un v.a. gaussien de dimension 2, On note a l'espérance de X, b l'espérance de Y et D la matrice de covariance du v.a. $(X, Y)^t$ (on a donc $D_{1,1} = \mathrm{Var}(X)$, $D_{2,2} = \mathrm{Var}(Y)$ et $D_{1,2} = D_{2,1} = \mathrm{Cov}(X, Y)$). On suppose que $\mathrm{Var}(Y) > 0$.

1. Calculer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (en fonction de a, b et D) de manière à avoir $E[X] = E[\alpha + \beta Y]$ et $E[XY] = E[(\alpha + \beta Y)Y]$.

Corrigé – *On a* $E[X] = a$, $E[Y] = b$, $E[Y^2] = Var(Y) + E[Y]^2 = D_{2,2} + b^2$ *et*

$$E[XY] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] + E[X]E[Y] = D_{1,2} + ab.$$

On cherche donc α *et* β *t.q.*

$$\alpha + b\beta = a,$$
$$b\alpha + (D_{2,2} + b^2)\beta = D_{1,2} + ab.$$

Comme $D_{2,2} \neq 0$*, ce système de 2 équations à 2 inconnues (qui sont* α *et* β*) a bien une unique solution. Cette solution est*

$$\beta = \frac{D_{1,2}}{D_{2,2}}, \quad \alpha = a - b\frac{D_{1,2}}{D_{2,2}}.$$

Avec α et β ainsi déterminés, on définit la fonction affine l de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $l(s) = \alpha + \beta s$ pour $s \in \mathbb{R}$ et on définit la v.a.r. Z par $Z = X - l(Y)$.

2. Montrer que $(Z, Y)^t$ est un v.a. gaussien. Montrer que $\mathrm{Cov}(Z, Y) = 0$. En déduire que Z et Y sont des v.a.r. indépendantes [On pourra utiliser la question 1(b) de l'exercice 10.15].

Corrigé – *Soit* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. *On va montrer que la v.a.r.* $a_1 Z + a_2 Y$ *suit une loi gaussienne (ceci montre bien que le vecteur aléatoire* $(Z, Y)^t$ *est un vecteur gaussien). Comme* $Z = X - l(Y) = X - \alpha - \beta Y$, *on a*

$$a_1 Z + a_2 Y = a_1 X + (a_2 - a_1 \beta) Y - a_1 \alpha.$$

Comme $(X, Y)^t$ *est un v.a. gaussien, la v.a.r.* $a_1 X + (a_2 - a_1 \beta) Y$ *suit une loi gaussienne. Il existe donc* $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $a_1 X + (a_2 - a_1 \beta) Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. *On a alors*

$$a_1 X + (a_2 - a_1 \beta) Y - a_1 \alpha \sim \mathcal{N}(m - a_1 \alpha, \sigma^2).$$

ceci prouve que $a_1 X + (a_2 - a_1 \beta) Y - a_1 \alpha$ *suit une loi gaussienne. La v.a.r.* $a_1 Z + a_2 Y$ *suit donc une loi gaussienne pour tout* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. *Ceci prouve bien que le vecteur aléatoire* $(Z, Y)^t$ *est un vecteur gaussien.*

On calcule maintenant $Cov(Z, Y)$. *On rappelle que* $Z = X - (\alpha + \beta Y)$. *On remarque d'abord que* $E[Z] = E[X] - E[\alpha + \beta Y] = 0$ *(grâce à la première relation satisfaite par* α *et* β*). Puis,*

$$Cov(Z, Y) = E[ZY] = E[XY] - E[(\alpha + \beta Y) Y].$$

La seconde relation satisfaite par α *et* β *donne alors* $Cov(Z, Y) = 0$.

Comme $(Z, Y)^t$ *est un vecteur gaussien et que* $Cov(Z, Y) = 0$, *la question 1(b) de l'exercice 10.15 donne que* Z *et* Y *sont indépendantes.*

3. Montrer que $E(X|Y) = l(Y)$ p.s.

Corrigé – *La v.a.r.* $l(Y)$ *est intégrable (car sa loi est gaussienne). Pour montrer que* $E(X|Y) = l(Y)$ *p.s., il suffit, d'après la proposition 11.11, de montrer que* $E(l(Y)\varphi(Y)) = E(X\varphi(Y))$ *pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *borélienne bornée.*

Soit donc φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *borélienne bornée. Comme* Z *et* Y *sont indépendantes et que* $E[Z] = 0$, *on a* $E[Z\varphi(Y)] = E[Z]E[\varphi(Y)] = 0$. *Comme* $Z = X - l(Y)$ *on a donc*

$$E[X\varphi(Y)] = E[l(Y)\varphi(Y)].$$

Ce qui prouve bien que $E(X|Y) = l(Y)$ *p.s.*

4. Calculer (en fonction de D) Var(Z).

Corrigé – *Comme* $E[Z] = 0$ *et* $E[Z\, l(Y)] = E[Z]E[l(Y)] = 0$, *on a*

$$\begin{aligned} Var(Z) = E[Z^2] = E[XZ] &= E[X^2] - E[X l(Y)] \\ &= E[X^2] - \alpha E[X] - \beta E[XY]. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'utiliser les valeurs de α *et* β *et le fait que*

$$E[X^2] = D_{1,1} + a^2,\ E[X] = a,\ E[X, Y] = D_{1,2} + ab.$$

On obtient

$$Var(Z) = D_{1,1} - \frac{D_{1,2}^2}{D_{2,2}}$$

Dans la suite, on note $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(Z)}$ et, pour $a \in \mathbb{R}$ on note μ_a la loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

5. Soit f une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(a) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu_a$.

(a) Montrer que ψ est une fonction continue (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si $\sigma > 0$.

Corrigé – *On utilise ici le théorème 4.52. On remarque que*

$$\psi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} F(x,a) dx,$$

avec $F(x,a) = f(x) e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. *La fonction* $a \mapsto F(x,a)$ *est continue, pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Pour montrer que* ψ *est continue, il suffit (d'après le théorème 4.52) de montrer que la fonction* $x \mapsto F(x,a)$ *est dominée, localement uniformément par rapport à a, par une fonction intégrable. Nous montrons maintenant cette domination.*

Soit $M > 0$. *Pour tout* $a \in]-M,M[$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|F(x,a)| \le g_M(x)$ *avec*

$$g_M(x) = |f(x)| e^{\frac{-((|x|-M)^+)^2}{2\sigma^2}}.$$

(La vérification de $|F(x,a)| \le g_M(x)$ *peut se faire en distinguant les cas* $x \in [-M,M]$, $x > M$ *et* $x < -M$.*) La fonction* g_M *est bien intégrable (pour la mesure de Lebesgue). Le théorème 4.52 donne alors que* ψ *est continue sur* $]-M,M[$. *Comme* M *est arbitraire, on en déduit que* ψ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $E[f(X)|Y] = \psi(l(Y))$ p.s.

Corrigé – *Si* $\sigma > 0$, *la fonction* ψ *est continue, elle est donc borélienne. On remarque aussi que* ψ *est bornée (en effet, soit* $M \in \mathbb{R}_+$ *t.q.* $|f(x)| \le M$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On a alors aussi* $|\psi(a)| \le M$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$*).*

Si $\sigma = 0$, *on a* $\psi(a) = f(a)$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$. *La fonction* ψ *est donc aussi borélienne bornée.*

Comme ψ *est borélienne,* $\psi(l(Y))$ *est donc une v.a.r.. Comme* ψ *est bornée, la v.a.r.* $\psi(l(Y))$ *est bornée et donc intégrable. Pour montrer que* $E[f(X)|\,Y] = \psi(l(Y))$ *p.s., il suffit, comme à la question précédente (cf proposition 11.11), de montrer que* $E[\psi(l(Y))\varphi(Y)] = E[f(X)\varphi(Y)]$ *pour toute application* φ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *borélienne bornée.*

Soit donc φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a, comme* Z *et* Y *sont indépendantes,*

$$E[f(X)\varphi(Y)] = E[f(Z + l(Y))\varphi(Y)]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z + l(y)) dP_Z(z) \right) \varphi(y) dP_Y(y).$$

On utilise maintenant le fait que $Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, *on en déduit*

$$\int_{\mathbb{R}} f(z + l(y)) dP_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z + l(y)) d\mu_0(z).$$

le changement de variable $\overline{z} = z + l(y)$ *donne alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(z + l(y)) d\mu_0(z) = \int_{\mathbb{R}} f(\overline{z}) d\mu_{l(y)}(\overline{z}) = \psi(l(y)).$$

On a donc, finalement,

$$\mathrm{E}[f(\mathrm{X})\varphi(\mathrm{Y})] = \int_{\mathbb{R}} \psi(l(y))\varphi(y)d\mathrm{P_Y}(y) = \mathrm{E}[\psi(l(\mathrm{Y}))\varphi(\mathrm{Y})].$$

Ce qui prouve bien $\mathrm{E}[f(\mathrm{X})|\mathrm{Y}] = \psi(l(\mathrm{Y}))$ *p.s..*

Exercice 11.17 (Indépendance et espérance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux sous–tribus de $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$). On pose aussi $\mathcal{C} = \{\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2; \mathrm{B}_1 \in \mathcal{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathcal{B}_2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ (c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$).

   Soit Y une v.a.r. intégrable. On note $\sigma(\mathrm{Y})$ la tribu engendrée par Y. On suppose que $\sigma(\mathrm{Y})$ et $\mathcal{B}_1$ sont indépendantes de $\mathcal{B}_2$.

2. Soit U_1 une v.a.r. $\mathcal{B}_1$-mesurable et bornée et U_2 une v.a.r. $\mathcal{B}_2$-mesurable et intégrable. Montrer que YU_1 et U_2 sont des v.a.r. indépendantes. En déduire que $\mathrm{YU}_1\mathrm{U}_2$ est intégrable et que $\mathrm{E}(\mathrm{YU}_1\mathrm{U}_2) = \mathrm{E}(\mathrm{YU}_1)\mathrm{E}(\mathrm{U}_2)$.

3. On pose $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{B}_1]$ (la v.a.r. Z_1 est $\mathcal{B}_1$-mesurable intégrable et $\mathrm{E}(\mathrm{YU}) = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_1\mathrm{U})$ pour toute v.a.r. $\mathcal{B}_1$-mesurable bornée).

   (a) Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}1_\mathrm{C}) = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_1 1_\mathrm{C})$ pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$.

   (b) Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{Y}1_\mathrm{B}) = \mathrm{E}(\mathrm{Z}_1 1_\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$.

4. Montrer que $\mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{B}] = \mathrm{E}[\mathrm{Y}|\mathcal{B}_1]$ p.s..

Exercice 11.18 (Espérance conditionnelle d'une somme) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d.. On suppose que X_1 est intégrable (on a donc aussi X_i intégrable pour tout $i \in \mathbb{N}^*$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$.

1. (Cette question reprend l'exercice 11.8.) Soit $n > 1$. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathrm{S}_n) = \dfrac{\mathrm{S}_n}{n}$ p.s..

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{D}_n$ la tribu engendrée par l'ensemble des v.a.r. S_k, $k \geq n$. Montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathcal{D}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1|\mathrm{S}_n) = \frac{\mathrm{S}_n}{n}$ p.s.. [On pourra utiliser l'exercice 11.17 en choisissant convenablement $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.]

Exercice 11.19 (Exercice liminaire aux martingales) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ un espace probabilisé et $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de tribus sur E t.q. $\mathrm{T}_n \subset \mathrm{T}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et t.q. T est la tribu engendrée par $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{T}_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^2_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{T}_n)$ l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu T_n. Nous allons montrer que $\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{T}_n)$ converge vers X dans $\mathrm{L}^2_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $e \in \mathrm{L}^2_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$ et une sous-suite de la suite $(\mathrm{E}(\mathrm{X}|\mathrm{T}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers e dans $\mathrm{L}^2_\mathbb{R}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, p)$.

2. Montrer que $\int \mathrm{XY}dp = \int e\mathrm{Y}dp$, pour tout v.a.r. Y T_n-mesurable et de carré intégrable.

3. Montrer que $\int XYdp = \int eYdp$, pour tout v.a.r. Y de carré intégrable. En déduire que $e = X$ p.s..
4. Montrer que $\|E(X|T_n)\|_2 \leq \|X\|_2$. En déduire que la suite $(E(X, T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^2_{\mathbb{R}}(E, T, p)$.

Exercice 11.20 (Espérance conditionnelle pour une suite décroissante de tribus) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de tribus incluses dans $\mathcal{A}$. On suppose $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on pose $\mathcal{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ (de sorte que $\mathcal{B}$ est aussi une tribu incluse dans $\mathcal{A}$).

1. Soit X une v.a.r.. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe Y_n v.a.r. $\mathcal{B}_n$-mesurable t.q. $X = Y_n$ p.s.. Montrer qu'il existe Y v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable t.q. $X = Y$ p.s..

   N.B. Cette première question montre en quel sens on peut écrire $L^p(\Omega, \mathcal{B}, P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^p(\Omega, \mathcal{B}_n, P)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

   Corrigé – *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{A}$ t.q. $P(A_n) = 0$ et $X = Y_n$ sur A_n^c. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On a donc $P(A) = 0$ (par σ-sous–additivité de P) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = Y_n$ sur A^c.*

   On définit maintenant $\bar{Y}$ de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\bar{Y}(\omega) = \liminf_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$. Comme $Y_n = X$ sur A^c (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on a donc $\bar{Y} = X$ sur A^c et donc $\bar{Y} = X$ p.s..

   Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme Y_n est $\mathcal{B}_p$-mesurable pour $n \geq p$ (car $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_p$), la stabilité des fonctions mesurables donne que $\bar{Y}$ est $\mathcal{B}_p$-mesurable. Soit C un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$, on a donc $\bar{Y}^{-1}(C) \in \mathcal{B}_p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Par la définition de $\mathcal{B}$, on en déduit que $\bar{Y}^{-1}(C) \in \mathcal{B}$. On a donc $\bar{Y}$ $\mathcal{B}$-mesurable de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\bar{Y} = X$ p.s.. Il nous reste à modifier légèrement $\bar{Y}$ pour obtenir une v.a.r.. Pour cela, on pose $E = \{\omega \in \Omega, \bar{Y}(\omega) = \pm\infty\}$. On a $E \in \mathcal{B}$ (car $\bar{Y}$ est $\mathcal{B}$-mesurable). On peut définir Y par

   $$Y(\omega) = \bar{Y}(\omega) \text{ si } \omega \notin E,$$
   $$Y(\omega) = 0 \text{ si } \omega \in E.$$

   La fonction Y est ainsi une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable et $Y = X$ p.s. (noter que $E \subset A$).

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et de carré intégrable.

   (a) On suppose que $X_n \to X$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to +\infty$. Montrer que X est $\mathcal{B}$-mesurable (au sens qu'il existe Y $\mathcal{B}$-mesurable t.q. $X = Y$ p.s.).

   Corrigé – *On peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous-suite (encore notée $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$), que $X_n \to X$ p.s.. (Après cette extraction, on a toujours $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$.)*

   Comme $X_n \to X$ p.s., il existe donc $A \in \mathcal{A}$ t.q. $P(A) = 0$ et $X_n(\omega) \to X(\omega)$ (quand $n \to +\infty$) pour tout $\omega \in A^c$. On procède alors comme à la question précédente en posant $\bar{Y}(\omega) = \liminf_{n\to+\infty} X_n(\omega)$. La fonction $\bar{Y}$ va de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ et est $\mathcal{B}_p$-mesurable pour tout $p \in \mathbb{N}$ (car X_n est $\mathcal{B}_p$-mesurable pour $n \geq p$). La fonction $\bar{Y}$

est donc $\mathcal{B}$*-mesurable et* $\bar{Y} = X$ *p.s. (car* $Y = X$ *sur* A^c*). Enfin, on pose* $E = \{\omega \in \Omega, \bar{Y}(\omega) = \pm\infty\}$*. On a* $E \in \mathcal{B}$ *(car* $\bar{Y}$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable) et on définit* Y *par*

$$Y(\omega) = \bar{Y}(\omega) \text{ si } \omega \notin E,$$
$$Y(\omega) = 0 \text{ si } \omega \in E.$$

La fonction Y *est ainsi une v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable et* $Y = X$ *p.s..*

(b) On suppose que $X_n \to X$ faiblement dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to +\infty$. Montrer que X est $\mathcal{B}$-mesurable.

Corrigé – *On peut montrer cette question en utilisant une petite remarque d'analyse fonctionnelle (voir la remarque 6.85). Puisque* $X_n \to X$ *faiblement dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *quand* $n \to +\infty$*, il existe une suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q.*

i. $Y_n \to X$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *quand* $n \to +\infty$*,*

ii. pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* Y_n *est une combinaison convexe de l'ensemble des* X_p*,* $p \geq n$*.*

Comme X_p *est* $\mathcal{B}_n$*-mesurable pour* $p \geq n$*, la v.a.r.* Y_n *est aussi* B_n*-mesurable. On est ainsi ramené à la question précédente et on obtient qu'il existe* Y *v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable t.q.* $X = Y$ *p.s..*

3. Soit X une v.a.r. de carré intégrable.
Montrer que $E(X|\mathcal{B}_n) \to E(X|\mathcal{B})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *On pose* $Z_n = E(X|\mathcal{B}_n)$ *(en étant quelque peu pointilleux, on devrait plutôt dire qu'on choisit un élément de l'ensemble* $E(X|\mathcal{B}_n)$*). On pose aussi* $Z = E(X|\mathcal{B})$ *et on raisonne par l'absurde.*

Si $Z_n \not\to Z$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *quand* $n \to +\infty$*, il existe* $\varepsilon > 0$ *et une sous-suite, encore notée* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, t.q.*

$$\|Z_n - Z\|_2 \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{11.15}$$

On remarque maintenant que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *(plus précisément, on a* $E(Z_n^2) \leq E(X^2)$ *car* $E(Z_n^2) = E(Z_nX) \leq \sqrt{E(Z_n^2)}\sqrt{E(X^2)}$*). Comme* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un espace de Hilbert, on peut donc supposer, toujours après extraction d'une sous-suite, qu'il existe* $\bar{Z}$ *t.q.*

$$Z_n \to \bar{Z} \text{ faiblement dans } L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \text{ quand } n \to +\infty.$$

On montre maintenant que $\bar{Z} = Z$ *p.s..*

La question précédente montre que $\bar{Z}$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable. Puis pour tout* U *v.a.r.* $\mathcal{B}$*-mesurable et de carré intégrable on a*

$$E(Z_nU) = E(XU) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $Z_n \to \bar{Z}$ *faiblement dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, on peut passer à la limite (quand* $n \to +\infty$*) dans cette égalité. On obtient*

$$E(\bar{Z}U) = E(XU).$$

Ce qui prouve que $\bar{Z} = E(X|\mathcal{B})$ *p.s. et donc que* $\bar{Z} = Z$ *p.s.. Pour conclure, il reste à montrer que* $Z_n \to Z$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *(en contradiction avec (11.15)). Pour cela, il suffit de montrer que* $E(Z_n^2) \to E(Z^2)$ *(car* $E((Z_n - Z)^2) = E(Z_n^2) - 2E(Z_nZ) + E(Z^2)$

et $E(Z_n Z) \to E(Z^2)$ *grâce à la convergence faible de* Z_n *vers* Z*). On utilise une nouvelle fois la convergence faible de* Z_n *vers* Z *(et le fait que* $Z_n = E(X|\mathcal{B}_n)$ *et* $Z = E(X|\mathcal{B})$ *pour écrire que*

$$E(Z_n^2) = E(Z_n X) \to E(ZX) = E(Z^2) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Finalement, on obtient bien que $Z_n \to Z$ *dans* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, en contradiction avec (11.15).*

Exercice 11.21 (Projection sur $L^2(\Omega, \tau(X), P)$ versus projection sur ev(X)) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $\mathcal{B}$ est une sous–tribu de $\mathcal{A}$, on note encore P la restriction de P à $\mathcal{B}$, de sorte que $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est encore un espace probabilisé. On rappelle que $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et que l'on peut considérer $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ comme un s.e.v. de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est donc un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (en choisissant un représentant de X, X est donc une v.a.). On note ev(X) le s.e.v. engendré par X (noter que ev(X) est un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$).

Si V est un s.e.v. fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note P_V l'opérateur de projection orthogonale sur V.

1. On suppose que X est constante et non nulle (c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ t.q. $X = a$ p.s.). Montrer que $P_{ev(X)} = P_{L^2(\Omega,\tau(X),P)}$ (*i.e.* $ev(X) = L^2(\Omega, \tau(X), P)$).
2. On suppose que X n'est pas constante. Montrer que pour toute sous–tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, $P_{ev(X)} \neq P_{L^2(\Omega,\mathcal{B},P)}$ (*i.e.* $ev(X) \neq L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$).

   Remarque : Si Y est une v.a. de carré intégrable, on a $E(Y|X) = E[Y|\tau(X)] = P_{L^2(\Omega,\tau(X),P)} Y$.

Exercice 11.22 (Loi de X et Y et loi de (X, Y)) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r.. On suppose que le couple (X, Y) a pour loi une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$) et que cette densité est donnée par la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$g(x, y) = \frac{1 + x^2}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1+x^2)|y|}{2} - \frac{x^2}{2}} \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que X a pour loi la loi normale réduite.

   Corrigé – *Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. En utilisant la loi de* (X, Y)*, on obtient*

$$E(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) g(x, y) dy dx.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,y)dy = \frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(1+x^2)|y|}{2}}dy = \frac{1+x^2}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(1+x^2)y}{2}}dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a donc $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X})) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. *Ce qui prouve que* X *a pour loi la loi normale réduite.*

2. Montrer que Y a pour loi une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur les boréliens de $\mathbb{R}$) et donner une expression de cette densité.

Corrigé – *Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *En utilisant la loi de* (X,Y), *on obtient*

$$\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)g(x,y)dxdy.$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, *on pose* $h(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)dx$, *c'est-à-dire*

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(1+x^2)|y|}{2}}dx.$$

On a alors $\mathrm{E}(\varphi(\mathrm{Y})) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)h(y)dy$. *Ce qui prouve que* Y *a pour loi une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité est donnée par la fonction* h.

3. Soit $y \le 0$. Montrer que

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} < y\}) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}}e^{\frac{y}{2}}.$$

Soit $y > 0$, montrer que

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} < y\}) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+y}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

Corrigé – *Soit* $y \in \mathbb{R}$. *En utilisant la densité* h *de la loi de* Y, *on a*

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} < y\}) = \int_{-\infty}^{y} h(z)dz = \int_{-\infty}^{y}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(1+x^2)|z|}{2}}dx\Big)dz.$$

Avec le théorème de Fubini-Tonelli, on en déduit

$$\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} < y\}) = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(1+x^2)|z|}{2}}dz\Big)\frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Si $y \le 0$, *on a*

$$\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(1+x^2)|z|}{2}}dz = \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{(1+x^2)z}{2}}dz = \frac{2}{(1+x^2)}e^{\frac{(1+x^2)y}{2}}.$$

Ce qui donne

$$P(\{Y < y\}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(1+x^2)y}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{\frac{x^2(y-1)}{2}}dx.$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable $x\sqrt{1-y} = u$ *et on obtient*

$$P(\{Y < y\}) = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1-y}}.$$

On déduit en particulier de cette formule que $P(\{Y < 0\}) = 1/2$ *et comme* $h(-z) = h(z)$*, on trouve bien que*

$$P(\{Y \in \mathbb{R}\}) = 2\int_{-\infty}^0 h(z)dz = 2P(\{Y < 0\}) = 1.$$

On calcule maintenant $P(\{Y < y\})$ *si* $y > 0$*. On a*

$$P(\{Y < y\}) = P(\{Y \in \mathbb{R}\}) - P(\{Y \geq y\}) = 1 - P(\{Y \geq y\}).$$

et, avec le théorème de Fubini-Tonelli,

$$P(\{Y \geq y\}) = \int_y^{+\infty} h(z)dz = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_y^{+\infty} e^{-\frac{(1+x^2)|z|}{2}}dz\Big)\frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Comme $y > 0$*, on a*

$$\int_y^{+\infty} e^{-\frac{(1+x^2)|z|}{2}}dz = \int_y^{+\infty} e^{-\frac{(1+x^2)z}{2}}dz = \frac{2}{(1+x^2)}e^{\frac{-(1+x^2)y}{2}}.$$

Ce qui donne

$$P(\{Y \geq y\}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(1+x^2)y}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{-\frac{y}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2(y+1)}{2}}dx.$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable $x\sqrt{1+y} = u$ *et on obtient*

$$P(\{Y \geq y\}) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{1+y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1+y}}.$$

On a bien, finalement,

$$P(\{Y < y\}) = 1 - \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{1+y}}.$$

4. (Espérances conditionnelles) Montrer que $E(Y|X) = 0$ p.s.. Donner $E(Y^2|X)$ en fonction de X. En déduire la variance de Y.

Corrigé – *On montre tout d'abord que* Y *est une v.a.r. de carré intégrable. En utilisant le téorème de Fubini-Tonelli et la question précédente, on a*

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \int_\Omega Y^2 dP = \int_\Omega\Big(\int_0^{+\infty} 1_{[0,Y^2(\omega)[}(t)dt\Big)dP(\omega)\\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_\Omega 1_{]t,+\infty[}(Y^2(\omega))dP(\omega)\Big)dt = \int_0^{+\infty} P(\{Y^2 > t\})dt\\ &= \int_0^{+\infty} 2uP(\{|Y| > u\})du = \int_0^{+\infty} 2u\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{1+u}}du < +\infty.\end{aligned}$$

Comme Y *est de carré intégrable les espérances conditionnelles* $E(Y|X)$ *et* $E(Y^2|X)$ *sont bien définies.*

Pour calculer $E(Y|X)$ *et* $E(Y^2|X)$, *on utilise la proposition 11.11. Soit* φ *une fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on a*

$$E(Y\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} y\varphi(x)g(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} yg(x,y)dy\Big)\varphi(x)dx.$$

Comme $g(x,-y) = g(x,y)$, *on a* $\int_{\mathbb{R}} yg(x,y)dy = 0$ *pour tout* x *et donc* $E(Y\varphi(X)) = 0$.

On en déduit que $E(Y|X) = 0$ *p.s.*.

On procède de manière analogue pour Y^2. *On a*

$$E(Y^2\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} y^2\varphi(x)g(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} y^2g(x,y)dy\Big)\varphi(x)dx.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} y^2g(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} y^2\frac{1+x^2}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(1+x^2)|y|}{2}-\frac{x^2}{2}}dy = \frac{1+x^2}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_0^{+\infty} y^2e^{-\frac{(1+x^2)y}{2}}dy.$$

On calcule cette dernière intégrale en intégrant deux fois par parties. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} y^2g(x,y)dy = \frac{8}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a donc

$$E(Y^2\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{8}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}\varphi(x)dx.$$

Ce qui donne, en posant $\psi(x) = \frac{8}{(1+x^2)^2}$,

$$E(Y^2\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = E(\psi(X)\varphi(X)).$$

On en déduit que

$$E(Y^2|X) = \psi(X) = \frac{8}{(1+X^2)^2} \textit{ p.s.}\ .$$

On calcule maintenant la variance de Y, *notée* $Var(Y)$. *Comme* $E(Y) = E(E(Y|X)) = 0$ *et* $E(Y^2) = E(E(Y^2|X))$, *on a* $Var(Y) = E(E(Y^2|X)) = E(\psi(X))$ *et donc*

$$Var(Y) = 8E(\frac{1}{(1+X^2)^2}).$$

On remarque maintenant que

$$E(\frac{1}{(1+X^2)^2}) = E(\frac{1}{1+X^2}) - E(\frac{X^2}{(1+X^2)^2}). \tag{11.16}$$

. *Mais, on a*

$$\sqrt{2\pi}E(\frac{X^2}{(1+X^2)^2}) = 2\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^2}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}E(\frac{X^2}{(1+X^2)^2}) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)dx\\ &= 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E(\frac{X^2}{(1+X^2)^2}) = E(\frac{1}{(1+X^2)}) - \frac{1}{2}.$$

En revenant à (11.16), on a donc $E(\frac{1}{(1+X^2)^2}) = \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $Var(Y) = 4$.

11.3.2 Martingales

Exercice 11.23 (Quelques propriétés des martingales) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$) et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de v.a.r. (c'est-à-dire un processus réel). On suppose que X_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous–martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$). Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une sous–martingale, on a*

$$E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \geq X_n \text{ p.s. et donc } E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) \geq E(X_n).$$

Or (comme les fonctions constantes sont $\mathcal{B}_n$*-mesurables bornées),*

$$E(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) = E(X_{n+1}).$$

On a donc $E(X_{n+1}) \geq E(X_n)$.

2. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Montrer que $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s. pour tout $m \geq 0$.

Corrigé – *Pour* $m = 0$, *le fait que* $E(X_n|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *découle du fait que* X_n *est* $\mathcal{B}_n$*-mesurable. On montre maintenant la propriété demandée par récurrence sur* $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour $m = 1$ *le fait que* $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *est donné dans la définition de martingale.*

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s., pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On veut montrer que* $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s., pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale, on a* $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_{n+m}) = X_{n+m}$ *p.s. et donc :*

$$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_{n+m}\text{-mesurable bornée.}$$

Comme $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+m}$, *on a donc aussi*

$$E(X_{n+m+1}U) = E(X_{n+m}U) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

L'hypothèse de récurrence donne $E(X_{n+m}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s.. On a donc :*

$$E(X_{n+m}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

On a en déduit :

$$E(X_{n+m+1}U) = E(X_nU) \text{ pour tout } U\ \mathcal{B}_n\text{-mesurable bornée.}$$

Ce qui montre que $E(X_{n+m+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s. et termine la récurrence.*

3. Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et que $\varphi(X_n)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on rappelle que $\varphi(X_n)$ est une notation pour désigner $\varphi \circ X_n$). Montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

   Corrigé – *On remarque tout d'abord que $\varphi(X_n)$ est bien $\mathcal{B}_n$-mesurable (car X_n est $\mathcal{B}_n$-mesurable et φ est borélienne), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale, il suffit alors d'utiliser le proposition 11.7 sur l'inégalité de jensen. Soit $n \in \mathbb{N}$. La proposition 11.7 donne*

   $$E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)) \text{ p.s..}$$

   Comme $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s., on en déduit $E(\varphi(X_{n+1})|\mathcal{B}_n) \geq \varphi(X_n)$ p.s., ce qui montre bien que $(\varphi(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Exercice 11.24 (Martingale construite avec les espérances d'une v.a.)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit X une v.a.r. intégrable. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_n = E(X|\mathcal{B}_n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)$.

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{F}_n = \tau(X_1, \ldots, X_n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque tout d'abord que X_n est bien $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable. Il reste à montrer que $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ p.s..*

Soit U uner v.a.r. $\mathcal{B}_n$-mesurable bornée. Comme $X_n = E(X|\mathcal{B}_n)$ p.s., on a $E(X_nU) = E(XU)$. Mail, comme $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$, la v.a.r. U est aussi $\mathcal{B}_{n+1}$-mesurable et le fait que $X_{n+1} = E(X|\mathcal{B}_{n+1})$ p.s. donne alors $E(X_{n+1}U) = E(XU)$. On a donc

$$E(X_nU) = E(X_{n+1}U).$$

On en déduit bien que $X_n = E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n)$ p.s.. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)$.

Pour montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$, il suffit de montrer que $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (le raisonnement précédent permet alors de conclure en remplaçant $\mathcal{B}_n$ par $\mathcal{F}_n$).

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Comme X_p est $\mathcal{B}_n$-mesurable pour tout $p \leq n$, il est clair aussi que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{B}_n$. Soit U une v.a.r. $\mathcal{F}_n$ mesurable bornée. La v.a.r. U est donc aussi $\mathcal{B}_n$-mesurable. Puisque $X_n = E(X|\mathcal{B}_n)$, on a

$$E(X_nU) = E(XU).$$

On en déduit bien que $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ p.s., ce qui termine cette démonstration.

Exercice 11.25 (Martingale d'un jeu équilibré) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X_0 une v.a.r. intégrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. intégrable et de moyenne

nulle. On suppose que la suite formée de X_0 et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + J_{n+1}$ et $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $X_0, \ldots, X_n$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_n$).

Corrigé – *Par récurrence sur n, on remarque tout d'abord que* X_n *est bien intégrable pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la v.a.r.* X_n *est donc* $\mathcal{B}_n$*-mesurable et intégrable. Il reste à montrer que* $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s..*

Soit U *une v.a.r.* $\mathcal{B}_n$*-mesurable bornée. On a* $E(X_{n+1}U) = E(X_nU) + E(J_{n+1}U)$. *En utilisant la proposition 3.30, on remarque que les v.a.r.* $X_0, \ldots, X_n$, J_{n+1} *sont indépendantes. Puis, avec la proposition 2.60, on remarque que la tribu engendrée par* J_{n+1} *est indépendante de la tribu engendrée par* $X_0, \ldots, X_n$ *(qui est* $\mathcal{B}_n$*). On en déduit que* J_{n+1} *et* U *sont des v.a.r. indépendantes. Ceci donne* $E(J_{n+1}U) = E(J_{n+1})E(U) = 0$ *(car* J_{n+1} *est de moyenne nulle). Finalement, on a donc* $E(X_{n+1}U) = E(X_nU)$, *ce qui donne bien* $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$ *p.s..*

Exercice 11.26 (Séries de Fourier et martingales) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \Rightarrow X^+ \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P).$$

$(L^2(\Omega, \mathcal{B}, P) = L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P).)$

On prend maintenant $\Omega =]0,1[$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(]0,1[)$ et $P = \lambda$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). On pose $H = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on définit $e_p \in H$ par $e_p(x) = \exp(2i\pi px)$ pour $x \in]0,1[$. On rappelle que $\{e_p,\ p \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H. pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = ev\{e_p,\ -n \le p \le n\}$ (c'est un s.e.v. fermé de H).

Soit $X \in H$. On sait que $X_n \to X$ dans H, quand $n \to +\infty$, avec $X_n = P_{V_n}X$ où P_{V_n} désigne l'opérateur de projection orthogonale sur V_n (X_n est donc une somme partielle de la série de Fourier de X).

1. Montrer que $P_{V_n}(X_{n+1}) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, monter qu'il n'existe pas de sous–tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ t.q. $V_n = L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$. [On pourra, par exemple, commencer par remarquer que V_n est formé de fonctions analytiques.]
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{B}_n = \tau(e_p,\ -n \le p \le n)$. A-t-on $V_n \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P)$ ou $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{B}_n, P) \subset V_n$?

Exercice 11.27 (Quelques questions sur les temps d'arrêt) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., adaptée à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et τ défini de Ω dans $\mathbb{R}$ par
$$\tau(\omega) = 1 \text{ si } X_1(\omega) \in E \text{ et } \tau = 5 \text{ si } X_1(\omega) \notin E.$$
Montrer que τ est un temps d'arrêt.

Corrigé – *En posant* $C = \{w \in \Omega,$ *t.q.* $X_1(\omega) \in E\}$, *on a* $\tau = 1_C + 5\,1_{C^c}$. *Comme* X_1 *est une v.a.r., on a* $C \in \mathcal{A}$. *La fonction* τ *est donc bien mesurable (de* Ω *muni de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{N}$ *muni de* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*).*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on va montrer que* $\{\tau = n\} \in \mathcal{B}_n$.

Si $n \notin \{1, 5\}$, *on a* $\{\tau = n\} = \emptyset \in \mathcal{B}_n$.
Si $n = 1$, *on a* $\{\tau = 1\} = C = X_1^{-1}(E) \in \mathcal{B}_1$ *car* X_1 *est* $\mathcal{B}_1$*-mesurable.*
Si $n = 5$, *on a* $\{\tau = 5\} = C^c \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_5$ *car* X_1 *est* $\mathcal{B}_1$*-mesurable et que* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une filtration.*

On en déduit bien que τ *est un temps d'arrêt.*

2. Soit ν et τ deux temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\nu + \tau$ est encore un temps d'arrêt (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Corrigé – *La mesurabilité de* $\nu + \tau$ *(de* Ω *muni de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *muni de* $\mathcal{P}(\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$*) découle de la mesurabilité de* ν *et* τ.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a* $\{\nu + \tau = n\} = \cup_{p=0}^{n}(\{\nu = p\} \cap \{\tau = n - p\})$. *Pour tout* $0 \le p \le n$, *on a* $\{\nu = p\} \in \mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_n$ *et* $\{\tau = n - p\} \in \mathcal{B}_{n-p} \subset \mathcal{B}_n$ *et donc* $\{\nu = p\} \cap \{\tau = n - p\} \subset \mathcal{B}_n$. *On en déduit que* $\{\nu + \tau = n\} \in \mathcal{B}_n$, *ce qui montre bien que* $\nu + \tau$ *est un temps d'arrêt.*

3. Soit ν et τ deux temps d'arrêt, par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et t.q. $\nu \le \tau$ p.s.. Soit $\mathcal{B}_\nu$ et $\mathcal{B}_\tau$ les deux tribus associées. Montrer que $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{B}_\tau$. [Si T est un temps d'arrêt, on rappelle que $\mathcal{B}_T = \{A \in \mathcal{B}_\infty$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{B}_n\}$.]

Corrigé – *Soit* $A \in B_\nu$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Comme* $\nu \le \tau$, *on a* $\{\tau = n\} = \cup_{p=0}^{n}\{\nu = p\}$ *et donc*
$$A \cap \{\tau = n\} = \cup_{p=0}^{n}(A \cap \{\nu = p\}).$$
Comme $A \in B_\nu$, *on a* $A \cap \{\nu = p\} \in \mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_n$ *pour tout* $p \le n$. *On a donc* $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{B}_n$, *ce qui prouve que* $A \in B_\tau$.

Exercice 11.28 (Martingale arrêtée à un temps d'arrêt) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est intégrable et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ϕ_n est bornée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(\Delta X)_n = X_n - X_{n-1}$ et $(\phi \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} \phi_k (\Delta X)_k$ (ceci est une intégrale stochastique discrète).

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est prévisible (c'est-à-dire que ϕ_{n+1} est $\mathcal{B}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$). Montrer que $((\phi \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale.

Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $1 \le k \le n$, la v.a.r. $(\Delta X)_k$ est $\mathcal{B}_k$-mesurable et donc $\mathcal{B}_n$-mesurable. La v.a.r. ϕ_k est $\mathcal{B}_{k-1}$-mesurable et donc aussi $\mathcal{B}_n$-mesurable. La stabilité des fonctions mesurables montre alors que $(\phi \cdot X)_n$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable. De plus, comme les ϕ_k sont bornées et les X_k sont intégrables, la v.a.r. $(\phi \cdot X)_n$ est aussi intégrable. (elle donc $\mathcal{B}_n$-mesurable et intégrable).*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre maintenant que $E((\phi \cdot X)_{n+1}|\mathcal{B}_n) = (\phi \cdot X)_n$ p.s.. Pour cela, on utilise la linéarité de l'éspérance conditionnelle, on obtient

$$E((\phi \cdot X)_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \sum_{k=1}^{n+1} E(\phi_k(\Delta X)_k|\mathcal{B}_n).$$

Pour $k \le n$, la v.a.r. $\phi_k(\Delta X)_k$ est $\mathcal{B}_n$-mesurable et donc

$$E(\phi_k(\Delta X)_k|\mathcal{B}_n) = \phi_k(\Delta X)_k \text{ p.s.}.$$

Pour $k = n+1$, ϕ_{n+1} est $\mathcal{B}_n$-mesurable et $E(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n$, on a donc (avec l'exercice 11.4)

$$E(\phi_{n+1}(\Delta X)_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \phi_{n+1} E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{B}_n) = \phi_{n+1}(X_n - X_n) = 0 \text{ p.s.}.$$

On en déduit que

$$E((\phi \cdot X)_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(\Delta X)_k \text{ p.s.} = (\phi \cdot X)_n \text{ p.s.}.$$

Ce qui prouve bien que $((\phi \cdot X)_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une martingale.

2. (Exemple) Soit ν un temps d'arrêt. On prend ici $\phi_n = 1_{\{\nu \ge n\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est prévisible et $(\phi \cdot X)_n = X_{\nu \wedge n} - X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (On rappelle que $\nu \wedge n(\omega) = \min\{\nu(\omega), n\}$ et donc que $X_{\nu \wedge n}(\omega) = X_{\min\{\nu(\omega),n\}}(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$.)

   Remarque : La question précédente permet de montrer qu'une martingale arrêtée à un temps d'arrêt est encore une martingale et donne donc une démonstration du théorème 11.18.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1 - \phi_n = 1_{\{\nu < n\}} = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{\nu = k\}}$. Pour $k \le n-1$, on a $\{\nu = k\} \in \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_{n-1}$, la v.a.r. $1_{\{\nu = k\}}$ est donc $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable. On en déduit que $1 - \phi_n$ (et donc aussi ϕ_n) est $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable. Ceci prouve que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est prévisible.*

   Pour $1 \le k \le n$, on a $\phi_k(\Delta X)_k = 1_{\nu \ge k}(X_k - X_{k-1})$. On a donc

$$(\phi \cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{k \le \nu}(\Delta X)_k = \sum_{k=1}^{\min\{\nu,n\}} (\Delta X)_k = X_{\nu \wedge n} - X_0.$$

Exercice 11.29 (Caractérisation des martingales régulières) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^1 (c'est-à-dire t.q. $\sup\{E(|X_n|), n \in \mathbb{N}\} < \infty$).

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable si et seulement si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale régulière (c'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$). [On pourra utiliser le théorème de Vitali, théorème 4.51 et le théorème 11.19.]

Corrigé – *On remarque tout d'abord que, d'après le théorème 11.19, il existe une v.a.r.* X *t.q.* $X_n \to X$ *p.s.. Le théorème de Vitali (théorème 4.51) montre alors que* $X_n \to X$ *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *si et seulement si la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équi-intégrable. Ceci donne bien le résultat demandé.*

2. On suppose qu'il existe $q > 1$ t.q. $\sup\{E(|X_n|^q),\ n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale régulière.

Corrigé – *Comme cela a été dit à la question précédente il existe une v.a.r.* X *t.q.* $X_n \to X$ *p.s.. La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant bornée dans* $L^q_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *avec* $q > 1$*, le théorème 6.10 donne la convergence de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* X *dans* $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc une martingale régulière.*

Exercice 11.30 (Une condition pour qu'un temps d'arrêt soit intégrable) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On suppose qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$P(\{T > kn_0\}) \le (1-\varepsilon_0)^{k-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \tag{11.17}$$

Montrer que $E(T) < \infty$.

Corrigé – *Comme* T *est mesurable et prend ses valeurs dans* $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$*, son espérance est bien définie. grâce au théorème de convergence monotone, on peut écrire*

$$E(T) = \int_{\{T\le n_0\}} T dP + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\{kn_0 < T \le (k+1)n_0\}} T dP.$$

On en déduit, en posant $u_k = (k+1)(1-\varepsilon_0)^{k-1}$*, que*

$$E(T) \le n_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)n_0 P(\{T > kn_0\}) \le n_0(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k).$$

La série de terme général u_k *est convergente car* $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = (1-\varepsilon_0) < 1$*. On en déduit que* $E(T) < +\infty$*.*

2. On suppose qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $P(\{n+n_0 \ge T > n\}) \ge \varepsilon_0 P(\{T > n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'inégalité (11.17) est vraie.

Corrigé – *On montre (11.17) par récurrence sur k. Pour* $k = 1$*, l'inégalité (11.17) est vraie puisque* $P(\Omega) = 1$*. Soit* $k \in \mathbb{N}^*$*, on suppose que (11.17) est vraie (pour cette valeur de k) et on démontre (11.17) pour* $k+1$*. D'après l'hypothèse de cette question, on a*

$$P(\{(k+1)n_0 \ge T > kn_0\}) \ge \varepsilon_0 P(\{T > kn_0\}),$$

ce qui donne

$$P(\{T > kn_0\}) - P(\{T > (k+1)n_0\}) \ge \varepsilon_0 P(\{T > kn_0\}),$$

et donc

$$P(\{T > (k+1)n_0\}) \leq (1-\varepsilon_0)P(\{T > kn_0\}) \leq (1-\varepsilon_0)^k.$$

Ce qui termine la récurrence.

3. On suppose qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. $E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) \geq \varepsilon_0$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(\{n+n_0 \geq T > n\}) \geq \varepsilon_0 P(\{T > n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $E(T) < \infty$.

   Corrigé – *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $P(\{n+n_0 \geq T > n\}) = E(1_{\{T \leq n+n_0\}}1_{\{T>n\}})$. Comme $\{T \leq n\} \in \mathcal{B}_n$, on a $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{B}_n$. La v.a.r. $1_{\{T>n\}}$ est donc $\mathcal{B}_n$-mesurable (et, bien sûr, bornée). On a donc (en utilisant $E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) > \varepsilon_0$ p.s.)*

   $$E(1_{\{T \leq n+n_0\}}1_{\{T>n\}}) = E(E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n)1_{\{T>n\}}) \geq \varepsilon_0 E(1_{\{T>n\}}) = \varepsilon_0 P(\{T > n\}).$$

   Ce qui donne bien $P(\{n+n_0 \geq T > n\}) \geq \varepsilon_0 P(\{T > n\})$.

   Par la question 2, (11.17) est vraie et donc, par la question 1, $E(T) < +\infty$.

Exercice 11.31 (On joue à pile ou face...)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. ne prenant que les valeurs 1 et -1 et t.q. $P(\{J_n = 1\}) = P(\{J_n = -1\}) = 1/2$. On pose $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + J_{n+1}$. Soit a et b deux entiers strictement positifs et, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \inf\{n \geq 0 \text{ t.q. } X_n(\omega) = -a \text{ ou } X_n(\omega) = b\} \\ &\qquad\qquad \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } X_n(\omega) \in \{-a, b\}, \\ T(\omega) &= +\infty \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On note $p_a = P(\{\omega \in \Omega, \text{ t.q. } X_{T(\omega)}(\omega) = -a\})$ (p_a est donc la probabilité que X_n atteigne $-a$ avant b). Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $X_0, \ldots, X_n$ et on pose, pour $\omega \in \Omega$, $Y_n(\omega) = X_{\min(n,T(\omega))}(\omega)$.

1. Montrer que $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration et que T est un temps d'arrêt pour cette filtration.

   Corrigé – *On a bien $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une filtration.*

   Soit $n \in \mathbb{N}$. La définition de T donne

   $$\{T = n\} = X_n^{-1}(\{-a, b\}) \cap \Big(\cap_{k=0}^{n-1} X_k^{-1}(\{-a, b\}^c) \Big).$$

   Comme $X_n^{-1}(\{-a, b\}) \in \mathcal{B}_n$ et $X_k^{-1}(\{-a, b\})^c \in \mathcal{B}_n$ pour tout $k \leq n$, on a bien $\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$. Ce qui montre que T est un temps d'arrêt.

2. Montrer que $E(T) < \infty$.

   Corrigé – *On utilise ici l'exercice 11.30. On pose $n_0 = a + b$ et $\varepsilon_0 = (1/2)^{n_0}$. On va montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) \geq \varepsilon_0$ (l'exercice 11.30 donne alors $E(T) < +\infty$).*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, la v.a.r. X_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs (X_k ne prend que des valeurs entières entre $-k$ et k). La tribu $\mathcal{B}_n$, qui est la tribu engendrée par $X_0, \ldots, X_n$, est donc engendrée par une partition de Ω. Un élément de cette partition est déterminé par les valeurs prises par les X_k, $k = 0, \ldots, n$. On note $A_1, \ldots, A_m$ la partition de Ω engendrant $\mathcal{B}_n$. Il est possible de montrer que $P(A_i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, mais ceci n'est pas nécessaire pour la suite. En utilisant l'exercice 11.2, on a alors

$$E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\int_{A_i} 1_{\{T \leq n+n_0\}} dP}{P(A_i)} 1_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(\{T \leq n+n_0\} \cap A_i\}}{P(A_i)} 1_{A_i} \text{ p.s..} \tag{11.18}$$

Si pour certaines valeurs de i on a $P(A_i) = 0$, l'égalité (11.18) est encore vraie en supprimant ces valeurs de i dans la somme. C'est pour cela qu'il est inutile de démontrer que $P(A_i) > 0$ pour tout i.

Soit $1 \leq i \leq m$, on montre maintenant que $P(\{T \leq n+n_0\} \cap A_i\} \geq \varepsilon_0 P(A_i)$. Comme T est un temps d'arrêt, on a $\{T \leq n\} \in \mathcal{B}_n\}$, il existe donc $I \subset \{1, \ldots, m\}$ t.q.

$$\{T \leq n\} = \cup_{i \in I} A_i.$$

On distingue maintenant les cas $i \in I$ et $i \notin I$.

Premier cas, $i \in I$. *Ce cas est facile car on alors $T \leq n \leq n + n_0$ sur A_i et donc $P(\{T \leq n+n_0\} \cap A_i\} = P(A_i) \geq \varepsilon_0 P(A_i)$.*

Second cas, $i \notin I$. *Dans ce cas on a $T > n$ sur A_i. Ceci n'est possible que si, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, X_k est strictement entre $-a$ et b. Il existe donc $c \in \mathbb{Z}$ t.q. $X_n = c$ sur A_i, avec $-a < c < b$. Comme $c + n_0 = c + a + b > b$, on remarque alors que*

$$A_i \cap \left(\cap_{j=1}^{n_0} \{J_{n+j} = 1\} \right) \subset \{T \leq n + n_0\}.$$

On a donc

$$P(\{T \leq n+n_0\}) \geq P(A_i \cap \left(\cap_{j=1}^{n_0} \{J_{n+j} = 1\} \right)).$$

On utilise maintenant l'indépendance de la tribu $\mathcal{B}_n$ (engendrée par $J_1, \ldots, J_n$) et des tribus engendrées par $J_{n+1}, \ldots, J_{n+n_0}$, ce qui est donné par l'hypothèse d'indépendance des J_k et la proposition 2.60, on obtient

$$P(\{T \leq n+n_0\}) \geq p(A_i) \prod_{j=1}^{n_0} P(\{J_{n+j} = 1\}) = p(A_i)(\frac{1}{2})^{n_0} = \varepsilon_0 P(A_i).$$

On peut maintenant revenir à (11.18). On obtient

$$E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) \geq \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_0 1_{A_i} \text{ p.s.,}$$

et on en déduit bien, comme $A_1, \ldots, A_m$ est une partition de Ω, $E(1_{\{T \leq n+n_0\}}|\mathcal{B}_n) \geq \varepsilon_0$ p.s.. L'exercice 11.30 donne alors $E(T) < +\infty$.

3. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Corrigé – *Le deuxième item de l'exemple 11.16 (démontré dans l'exercice 11.25) donne que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$).*

4. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) et que $p_a = b/(a+b)$.

   Corrigé – *Comme* T *est un temps d'arrêt, le théorème 11.18 (sur les martingales arrêtées) et la question précédente donnent que la suite* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi une martingale (par rapport à la filtration* $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

   Comme $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale, on a* $E(Y_n) = E(Y_0)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Mais,* $Y_0 = X_0 = 0$*, on a donc* $E(Y_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   On utilise maintenant le fait $E(T) < +\infty$. *Ceci donne que* $T < +\infty$ *p.s.. On en déduit que* Y_n *tend p.s. vers* X_T *(c'est-à-dire vers la v.a.r.* $\omega \mapsto X_{T(\omega)}$ *en posant, par exemple,* $X_\infty = 0$*). Comme* $|Y_n| \le \max\{a, b\}$ *p.s. (et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*), le théorème de convergence dominée donne*

   $$E(Y_n) \to E(X_T) \text{ quand } n \to +\infty.$$

   Comme $E(Y_n) = 0$ *on a donc* $E(X_T) = 0$. *On conclut en remarquant que*

   $$E(X_T) = -aP(\{X_T = -a\}) + bP(\{X_T = b\}) = -ap_a + b(1-p_a) = b - (a+b)p_a,$$

   et donc $p_a = \dfrac{b}{a+b}$.

N.B. : On peut aussi montrer que $E(T) = ab$.

Exercice 11.32 (Il est temps de s'arrêter) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose aussi que $E[|X_n|] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) τ borné,

   $$E[|X_\tau|] < \infty.$$

   Corrigé – τ *est borné, il existe donc* $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\tau \le n$*, on a alors* $|X_\tau| \le \sum_{k=0}^{n} |X_k|$*, et donc*

   $$E(|X_\tau|) \le \sum_{k=0}^{n} E(|X_k|) < +\infty.$$

   On suppose dans la suite que pour tout temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) τ borné,

   $$E(X_\tau) = E(X_0).$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\Lambda \in \mathcal{F}_p$. On définit σ_p par

   $$\sigma_p(\omega) = p \text{ si } \omega \in \Lambda \text{ et } \sigma_p(\omega) = p+1 \text{ si } \omega \notin \Lambda.$$

   Montrer que σ_p est un temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = p$*, on a* $\{\sigma_p = n\} = \Lambda \in \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_n$.
Si $n = p+1$*, on a* $\{\sigma_p = n\} = \Lambda^c \in \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$.
Si $n \notin \{p, p+1\}$*, on a* $\{\sigma_p = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$.

On a donc $\{\sigma_p = n\} \in \mathcal{F}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et ceci montre que* σ *est un temps d'arrêt par rapport à* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et ν_p défini par $\nu_p(\omega) = p+1$ pour tout $\omega \in \Omega$.
   Montrer que ν_p est aussi un temps d'arrêt (par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

   Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On a* $\{\nu_p = n\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$ *si* $n = p+1$ *et* $\{\nu_p = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$ *si* $n \neq p+1$*. On a donc* $\{\nu_p = n\} \in \mathcal{F}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et ceci montre que* ν *est un temps d'arrêt par rapport à* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En remarquant que $X_\tau = X_\tau 1_A + X_\tau 1_{A^c}$ (pour tout temps d'arrêt τ et tout événement A), montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Corrigé – *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. On veut montrer que* $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *p.s., c'est-à-dire que*

$$E(X_{n+1}U) = E(X_nU), \tag{11.19}$$

pour toute v.a.r. U $\mathcal{F}_n$*-mesurable bornée.*

On commence par montrer (11.19) si $U = 1_\Lambda$ *avec* $\Lambda \in \mathcal{F}_n$*. Soit donc* $\lambda \in \mathcal{F}_n$*. On utilise alors les temps d'arrêt* σ_n *et* ν_n*, définis dans les deux questions précédentes, avec* $p = n$*. Comme ces deux temps d'arrêt sont bornés on a*

$$E(X_{\nu_n}) = E(X_{\sigma_n}) = E(X_0).$$

Mais, $X_{\sigma_n} = X_{\sigma_n} 1_\Lambda + X_{\sigma_n} 1_{\Lambda^c} = X_n 1_\Lambda + X_{n+1} 1_{\Lambda^c}$ *et* $X_{\nu_n} = X_{n+1}$*. On a donc*

$$E(X_{n+1}) = E(X_n 1_\Lambda + X_{n+1} 1_{\Lambda^c}) = E(X_n 1_\Lambda) + E(X_{n+1} 1_{\Lambda^c}),$$

ce qui donne $E(X_{n+1}(1 - 1_{\Lambda^c})) = E(X_n 1_\Lambda)$*. Comme* $1 - 1_{\Lambda^c} = 1_\Lambda$*, on a donc montré (11.19) pour* $U = 1_\Lambda$.

Par linéarité de l'espérance, on remarque alors que (11.19) est encore pour U *v.a.r. étagée formée avec des éléments de* $\mathcal{F}_n$*, c'est-à-dire toute v.a.r.* U *de la forme* $\sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}$ *avec* $A_i \in \mathcal{F}_n$ *et* $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant U $\mathcal{F}_n$*-mesurable bornée. Il existe alors une suite* $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de v.a.r. étagées formées avec des éléments de* $\mathcal{F}_n$ *t.q.* $U_k \to U$ *p.s. quand* $k \to +\infty$ *et* $|U_k| \leq |U|$ *p.s. (et pour tout* k*). Grâce au théorème de convergence dominée, on peut alors passer à la limite quand* $k \to +\infty$ *dans l'égalité* $E(X_{n+1}U_k) = E(X_nU_k)$ *et on obtient bien (11.19). Ceci prouve que* $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *p.s. et donc que* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une martingale.*

That's all folks !

Références

Index